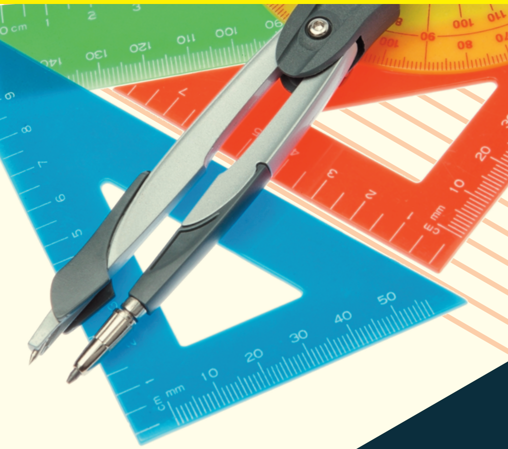
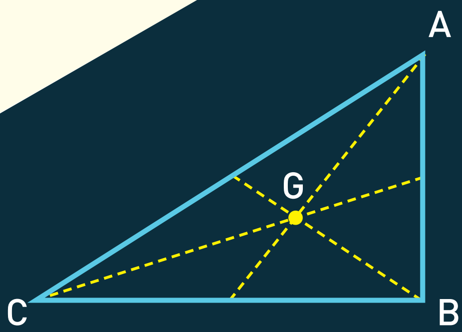
MINISTERUL EDUCAȚIEI

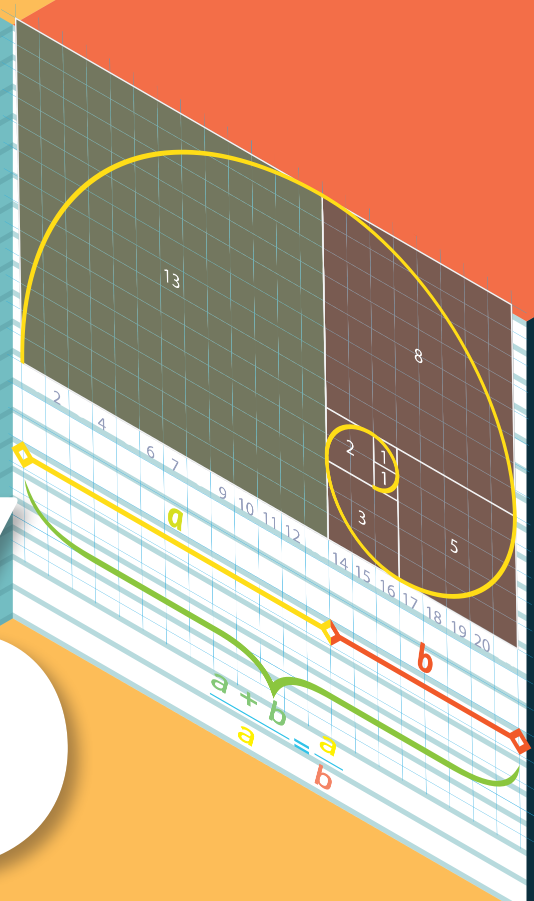
LITERA

Dorin Linț
Maranda Linț
Sorin Doru Noaghi



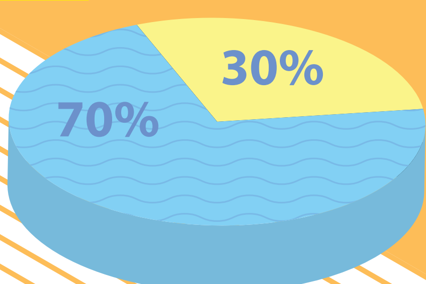
$2+x=1$





Matematică 6

Manual pentru clasa a VI-a



Acest proiect de manual școlar este realizat în conformitate cu Programa școlară aprobată prin Ordinul ministrului educației și cercetării nr. 3393/28.02.2017.

MINISTERUL EDUCAȚIEI

LITERA

Dorin Linț

Maranda Linț

Sorin Doru Noaghi

Matematică

6

Manual pentru clasa a VI-a

Manualul școlar a fost aprobat de Ministerul Educației prin ordinul de ministru nr. 5268/04.08.2023.

Manualul este distribuit elevilor în mod gratuit, atât în format tipărit, cât și digital, și este transmisibil timp de patru ani școlari, începând cu anul școlar 2023–2024.

Inspectoratul școlar ....

Școala/Colegiul/Liceul ....

ACEST MANUAL A FOST FOLOSIT:

Anul	Numele elevului	Clasa	Anul școlar	Aspectul manualului*	
				la primire	la predare
1					
2					
3					
4					

* *Pentru precizarea aspectului manualului se va folosi unul dintre următorii termeni: nou, bun, îngrijit, neîngrijit, deteriorat.*
- Cadrele didactice vor verifica dacă informațiile înscrise în tabelul de mai sus sunt corecte.
- Elevii nu vor face niciun fel de însemnări pe manual.

Matematică. Manual pentru clasa a VI-a
Dorin Linț, Maranda Linț, Sorin Doru Noaghi

Referenți științifici: lector univ. dr., Marius-Nicolae Heljiu, Departamentul de Matematică-Informatică, Facultatea de Științe, Universitatea din Petroșani
prof. dr. Dan-Ștefan Marinescu, Colegiul Național „Iancu de Hunedoara", Hunedoara

LITERA®

Editura Litera
tel.: 0374 82 66 35; 021 319 63 90; 031 425 16 19
e-mail: contact@litera.ro
www.litera.ro

Editor: Vidrașcu și fiii
Redactor: Carmen Birta
Corector: Carmen Bîtlan
Credite foto: Shutterstock
Ilustrație copertă: Getty Images
Copertă: Lorena Ionică
Tehnoredactare și prepress: A.B.C. POINT DESIGN SRL

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
LINŢ, DORIN
Matematică : manual pentru clasa a VI-a / Dorin Linţ, Maranda Linţ, Sorin Doru Noaghi.
Bucureşti : Litera, 2023
ISBN 978-630-319-188-1

I. Linţ, Maranda
II. Noaghi, Sorin Doru

37
51

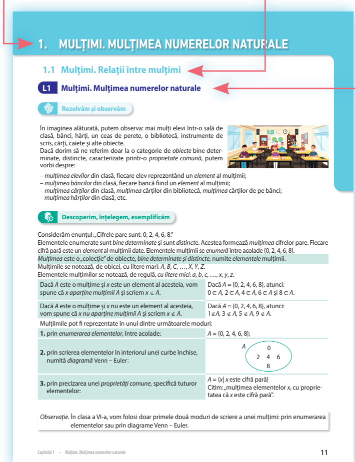
CUPRINS

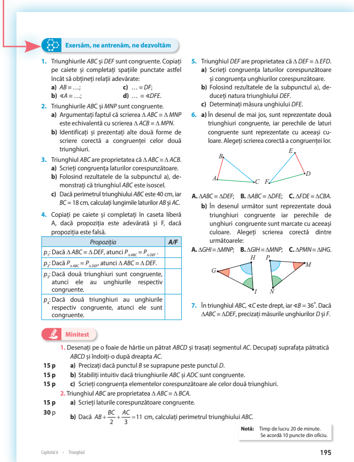
PREZENTAREA MANUALULUI

- Manualul de *Matematică – clasa a VI-a* cuprinde șase capitole, totalizând 16 unități de învățare care respectă domeniile și conținuturile prevăzute de programa școlară. Unitățile de învățare sunt divizate în lecții a căror parcurgere poate fi realizată în 1-2 ore de curs.
- Lecțiile conțin activități de învățare-evaluare cu caracter practic-aplicativ, care determină realizarea competențelor specifice cu care acestea sunt corelate.
- Manualul conține, de asemenea:
  - Teste de evaluare inițială
  - Autoevaluare prin miniteste – la finalul lecțiilor
  - Teste de evaluare sumativă – la finalul fiecărui capitol și la finalul manualului
  - Probleme recapitulative

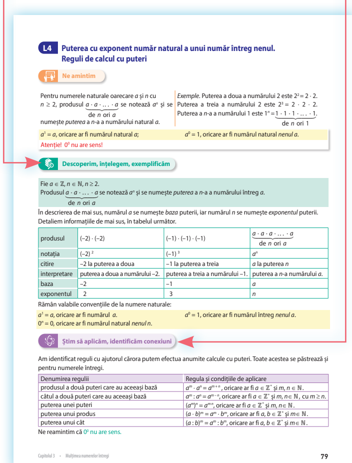
PAGINI DE CONȚINUT

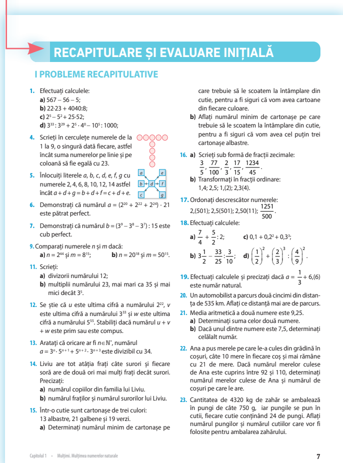
Titlul capitolului · Titlul unității · Titlul lecției · Activități de învățare propuse



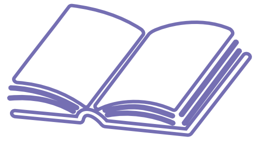


Activități de învățare · Recapitulare





Despre rubrici



Ne amintim

concepte, cunoștințe pe care elevii le-au dobândit în lecții anterioare, în scopul valorificării achizițiilor acestora și vizând identificarea firească a noilor conținuturi prin conexiuni logice

Rezolvăm și observăm

exerciții/probleme relevante pentru *identificarea* sau *deducerea* unor elemente noi pe baza observației: proprietăți, algoritmi, implicații

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

conținuturile prevăzute de programa școlară, însoțite de exemple concludente, comentarii, modele de rezolvare

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

aplicații rezolvate, unele rezultate matematice remarcabile care realizează conexiuni între elementele de conținut din lecție, achiziții anterioare și viața cotidiană

Dicționar

descrierea unor termeni noi sau mai puțin cunoscuți, care sunt utilizați în lecție

Minitest

itemi obiectivi, semiobiectivi, subiectivi prin care elevul conștientizează gradul de înțelegere a lecției

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

activități eșalonate în funcție de gradul de dificultate și de parcurgerea conținuturilor în cadrul unității de învățare

Reținem!

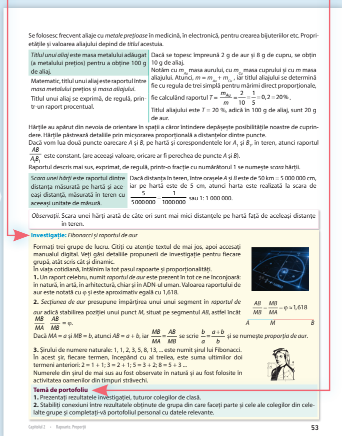
rezultate matematice utile în activitatea practică de aplicare a noțiunilor studiate

Temă de portofoliu. activitate individuală sau de grup care constă în parcurgerea unor etape descrise, folosind modele prezentate de manual

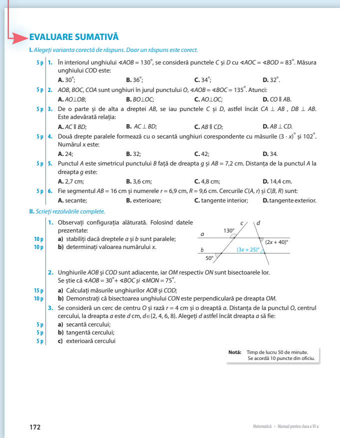
EVALUARE PRIN METODE TRADIȚIONALE SAU COMPLEMENTARE

Investigație

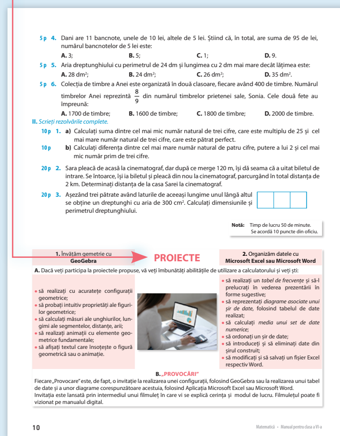
Temă de portofoliu



Evaluare sumativă



Proiecte



VARIANTA DIGITALĂ

Varianta digitală cuprinde integral conținutul manualului în variantă tipărită, având în plus exerciții interactive, jocuri educaționale, animații, filme și simulări. Activitățile multimedia interactive de învățare **(AMII)** aduc un plus de valoare cognitivă.

Paginile din manual pot fi vizionate pe desktop, laptop, tabletă, telefon, oferind o experiență excelentă de navigare. Navigarea în varianta digitală permite parcurgerea manualului și revenirea la activitatea de învățare precedentă.

AMII ANIMAT

- cuprinde animații sau filme, activități care se găsesc în partea de jos a paginii. Pentru vizionare, se activează butonul *Redă* (▶).

AMII STATIC

- cuprinde desene, fotografii, simboluri, indicații și răspunsuri, rezolvări ale problemelor, informații suplimentare care se derulează cu ajutorul butoanelor de navigare.

BUTOANE FOLOSITE ÎN VARIANTA DIGITALĂ

AJUTOR	deschide ghidul de utilizare a manualului digital.
CUPRINS	deschide cuprinsul manualului digital și permite deschiderea de conținuturi/lecții.
◀ ▶	permit parcurgerea manualului și deschiderea unei anumite pagini.

AMII INTERACTIV

- cuprinde exerciții de alegere duală, de alegere multiplă, de asociere, de completare, de ordonare, situate în partea de jos a paginii.
- butoanele de validare sunt: *Resetează* (care aduce exercițiul la starea lui inițială) și *Verifică* (prin care se verifică rezolvarea).
- utilizatorul are la dispoziție trei încercări de a răspunde corect, după care răspunsul corect este afișat automat.

Competențe generale:

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar
2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale
3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici, în diverse contexte matematice
4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, a concluziilor și a demersurilor de rezolvare pentru o situație dată
5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date
6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

Competențe specifice

1.1 Identificarea unor noțiuni specifice mulțimilor și relației de divizibilitate în ℕ

1.2 Identificarea rapoartelor, proporțiilor și a mărimilor direct sau invers proporționale

1.3 Identificarea caracteristicilor numerelor întregi, în contexte variate

1.4 Recunoașterea fracțiilor echivalente, a fracțiilor ireductibile și a formelor de scriere a unui număr rațional

1.5 Recunoașterea unor figuri geometrice plane (drepte, unghiuri, cercuri, arce de cerc) în configurații date

1.6 Recunoașterea unor elemente de geometrie plană asociate noțiunii de triunghi

2.1 Evidențierea în exemple a relațiilor de apartenență, de incluziune, de egalitate și a criteriilor de divizibilitate cu 2, 5, 10^n, 3 și 9 în ℕ

2.2 Prelucrarea cantitativă a unor date, utilizând rapoarte și proporții, pentru organizarea de date

2.3 Utilizarea operațiilor cu numere întregi pentru rezolvarea ecuațiilor și inecuațiilor

2.4 Aplicarea regulilor de calcul cu numere raționale pentru rezolvarea ecuațiilor de tipul $x + a = b$, $x \cdot a = b$, $x : a = b$, $(a \neq 0)$, $a \cdot x + b = c$, unde a, b, c sunt numere raționale

2.5 Recunoașterea coliniarității unor puncte, a faptului că două unghiuri sunt opuse la vârf, adiacente, complementare sau suplementare și a paralelismului sau perpendicularității a două drepte

2.6 Calcularea unor lungimi de segmente, măsuri de unghiuri, în contextul geometriei triunghiului

3.1 Utilizarea unor modalități adecvate de reprezentare a mulțimilor și de determinare a c.m.m.d.c și a c.m.m.m.c

3.2 Aplicarea unor metode specifice de rezolvare a problemelor în care intervin rapoarte, proporții și mărimi direct/invers proporționale

3.3 Aplicarea regulilor de calcul și folosirea parantezelor în efectuarea operațiilor cu numere întregi

3.4 Utilizarea proprietăților operațiilor pentru compararea și efectuarea calculelor cu numere raționale

3.5 Utilizarea unor proprietăți referitoare la distanțe, drepte, unghiuri, cerc pentru realizarea unor construcții geometrice

3.6 Utilizarea criteriilor de congruență și a proprietăților unor triunghiuri particulare pentru determinarea caracteristicilor unei configurații geometrice

4.1 Exprimarea în limbaj matematic a unor situații concrete care se pot descrie utilizând mulțimile și divizibilitatea

4.2 Exprimarea în limbaj matematic a relațiilor și a mărimilor care apar în probleme cu rapoarte, proporții și mărimi direct sau invers proporționale

4.3 Redactarea etapelor de rezolvare a ecuațiilor și a inecuațiilor studiate, în mulțimea numerelor întregi

4.4 Redactarea etapelor de rezolvare a unor probleme, folosind operații în mulțimea numerelor raționale

4.5 Exprimarea, prin reprezentări geometrice sau în limbaj specific matematic, a noțiunilor legate de dreaptă, unghi și cerc

4.6 Exprimarea în limbaj geometric simbolic și figurativ a caracteristicilor liniilor importante în triunghi

5.1 Analizarea unor situații date în contextul mulțimilor și al divizibilității în ℕ

5.2 Analizarea unor situații practice cu ajutorul rapoartelor, proporțiilor și a colecțiilor de date

5.3 Interpretarea unor date din probleme care se rezolvă utilizând numere întregi

5.4 Determinarea unor metode eficiente în efectuarea calculelor cu numere raționale

5.5 Analizarea seturilor de date numerice sau a reprezentărilor geometrice în vederea optimizării calculelor cu lungimi de segmente, distanțe, măsuri de unghiuri și de arce de cerc

5.6 Analizarea unor construcții geometrice în vederea evidențierii unor proprietăți ale triunghiurilor

6.1 Transpunerea, în limbaj matematic, a unor situații date, utilizând mulțimi, operații cu mulțimi și divizibilitatea în ℕ

6.2 Modelarea matematică a unei situații date în care intervin rapoarte, proporții și mărimi direct sau invers proporționale

6.3 Transpunerea, în limbaj algebric, a unei situații date, rezolvarea ecuației sau inecuației obținute și interpretarea rezultatului

6.4 Interpretarea matematică a unor probleme practice prin utilizarea operațiilor cu numere raționale

6.5 Interpretarea informațiilor conținute în reprezentări geometrice pentru determinarea unor lungimi de segmente, distanțe și a unor măsuri de unghiuri/arce de cerc

6.6 Transpunerea în limbaj specific a unei situații date, legate de geometria triunghiului, rezolvarea problemei obținute și interpretarea rezultatului

Fișa de observare a comportamentului

Comportamentul	Niciodată	Uneori	Deseori	Întotdeauna
Am dovedit interes în învățare.				
Am urmat instrucțiunile profesorului.				
Am lucrat individual.				
Am cerut ajutor când am avut nevoie.				
Când am greșit, am vrut să aflu cum pot să corectez.				
Am dus activitățile până la capăt.				
Mi-am spus părerea.				
Am cooperat cu ceilalți în activitățile de grup.				

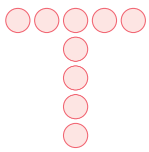
La finalul fiecărei unități, evaluează activitatea pe care ai desfășurat-o și modul în care te-ai simțit parcurgând aceste lecții.

RECAPITULARE ȘI EVALUARE INIȚIALĂ

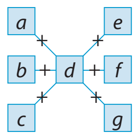
I. PROBLEME RECAPITULATIVE

1. Efectuați calculele:
a) $567 - 56 - 5$;
b) $22 \cdot 23 + 4040 : 8$;
c) $2^5 - 5^2 + 25 \cdot 52$;
d) $3^{33} : 3^{29} + 2^5 \cdot 4^0 - 10^5 : 1000$.

2. Scrieţi în cerculețe numerele de la 1 la 9, o singură dată fiecare, astfel încât suma numerelor pe linie și pe coloană să fie egală cu 23.



3. Înlocuiți literele a, b, c, d, e, f, g cu numerele 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 astfel încât $a + d + g = b + d + f = c + d + e$.



4. Demonstrați că numărul $a = (2^{20} + 2^{22} + 2^{24}) \cdot 21$ este pătrat perfect.

5. Demonstrați că numărul $b = (3^9 - 3^8 - 3^7) : 15$ este cub perfect.

6. Comparați numerele n și m dacă:
a) $n = 2^{44}$ și $m = 8^{15}$; **b)** $n = 20^{18}$ și $m = 50^{15}$.

7. Scrieți:
a) divizorii numărului 12;
b) multiplii numărului 23, mai mari ca 35 și mai mici decât 3^5.

8. Se știe că u este ultima cifră a numărului 2^{22}, v este ultima cifră a numărului 3^{33} și w este ultima cifră a numărului 5^{55}. Stabiliți dacă numărul $u + v + w$ este prim sau este compus.

9. Demonstrați că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, numărul $a = 3^n \cdot 5^{n+1} + 5^{n+2} \cdot 3^{n+3}$ este divizibil cu 34.

10. Liviu are tot atâția frați câte surori și fiecare soră are de două ori mai mulți frați decât surori. Precizați:
a) numărul copiilor din familia lui Liviu.
b) numărul fraților și numărul surorilor lui Liviu.

11. Într-o cutie sunt cartonașe de trei culori: 13 albastre, 21 galbene și 19 verzi.
a) Determinați numărul minim de cartonașe pe care trebuie să le scoatem la întâmplare din cutie pentru a fi siguri că vom avea cartoane din fiecare culoare.
b) Determinați numărul minim de cartonașe pe care trebuie să le scoatem la întâmplare din cutie, pentru a fi siguri că vom avea cel puțin trei cartonașe albastre.

12. **a)** Scrieţi sub formă de fracţii zecimale:
$\frac{3}{5}, \frac{77}{100}, \frac{2}{3}, \frac{17}{15}, \frac{1234}{45}$.
b) Transformaţi în fracţii ordinare:
1,4; 2,5; 1,(2); 2,3(4).

13. Ordonaţi descrescător numerele:
2,(501); 2,5(501); 2,50(1); $\frac{1251}{500}$.

14. Efectuaţi calculele:
a) $\frac{7}{4} + \frac{5}{2} : 2$; **c)** $0{,}1 + 0{,}2^2 + 0{,}3^3$;
b) $4\frac{1}{2} - \frac{33}{25} : \frac{3}{10}$; **d)** $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 : \left(\frac{4}{9}\right)^2$.

15. Efectuați calculele și precizați dacă $a = \frac{1}{3} + 6{,}(6)$ este număr natural.

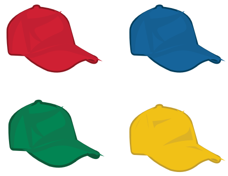
16. Un automobilist a parcurs două cincimi din distanța de 535 km. Calculați ce distanță mai are de parcurs.

17. Media aritmetică a două numere este 9,25.
a) Determinaţi suma celor două numere.
b) Dacă unul dintre numere este 7,5, determinați celălalt număr.

18. Ana a pus merele pe care le-a cules din grădină în coşuri, câte 10 mere în fiecare coş și mai rămâne cu 21 de mere. Dacă numărul merelor culese de Ana este cuprins între 92 și 110, determinați numărul merelor culese de Ana și numărul de coșuri pe care le are.

19. Cantitatea de 4320 kg de zahăr se ambalează în pungi de câte 750 g, iar pungile se pun în cutii, fiecare cutie conținând 24 de pungi. Determinați numărul pungilor și numărul cutiilor care vor fi folosite pentru ambalarea zahărului.

20. Într-un magazin, erau de vânzare 14 șepcuțe: roșii, albastre, verzi și galbene.



Se știe că:

a) sunt cel puțin două șepcuțe verzi, dar mai puține decât șepcuțe de oricare dintre celelalte culori;

b) cele mai multe șepcuțe sunt roșii;

c) sunt mai multe șepcuțe galbene decât șepcuțe albastre.

Raul cumpără toate șepcuțele verzi. Calculați câte șepcuțe rămân și ce culoare au acestea.

21. Gabriel a avut 55 de lei. După ce i-a dat surorii sale, Simona, 9,5 lei, Gabriel a primit de la mama lui încă 10 lei. Din banii pe care îi are acum, Gabriel își cumpără 4 creioane, cu 1,2 lei fiecare și un stilou care costă 24,5 lei. Calculați suma de bani cu care va rămâne Gabriel.

22. Bogdan și Grig doresc să-și cumpere aparate de fotografiat. Bogdan alege un aparat care costă 540 lei, iar Grig unul care are prețul de 1,2 ori mai mare. Ei primesc următoarea ofertă: la cumpărarea a două aparate foto, magazinul vinde produsul mai ieftin cu $\frac{7}{10}$ din prețul afișat. Determinați suma plătită pentru cele două aparate, folosind oferta primită.

23. Tudor citește o carte, în fiecare zi același număr de pagini. După patru zile, Tudor a citit 144 pagini. Calculați numărul de pagini pe care le mai are de citit, știind că, pentru a termina cartea, citește, în total, șapte zile.

24. Copiați pe caiete și completați spațiile libere astfel încât afirmațiile să fie adevărate:

a) 3,53 km = … dam;

b) 800 m = … km;

c) 12 000 m^2 = … hm^2 = … ha;

d) 0,014 km^2 = … m^2;

e) 7000 m^3 = … dam^3;

f) 3,5 m^3 = … dm^3.

25. Copiați pe caiete, calculați și completați astfel ca afirmațiile să fie adevărate:

a) 1 km + 2 hm + 3 dam = … m;

b) 3 km – 4,4 hm – 33,3 dam = … cm;

c) 5 ha + 5 ari + 5 m^2 = … m^2;

d) 30 m^2 + 3,303 dam^2 + 33 000 dm^2 = … m^2.

26. Cu ajutorul instrumentelor de geometrie construiți:

a) semidreapta *OA*, având origine punctul *O*;

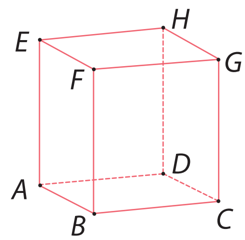
b) segmentul *AB* cu lungimea de 7,5 cm;

c) unghiul drept *ABC* și unghiul alungit *DEF*;

d) punctele distincte *A* și *B* situate la distanța 6 cm unul față de altul și *M* mijlocul segmentului *AB*;

e) punctele distincte *C* și *D* și punctul *S*, simetricul punctului *C* față de *D*.

27. În desenul alăturat este reprezentat cubul *ABCDEFGH*. Numiți:



a) două drepte paralele;

b) trei drepte concurente;

28. Efectuați calculele cu măsuri de unghiuri:

a) $12°34' + 43°26'$;

b) $75°40' + 34°32' - 100°12'$;

c) $12 \cdot (5°4')$;

d) $(25°48') : 4$.

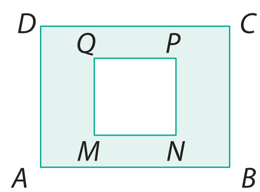
29. Calculați perimetrul și aria unui dreptunghi care are lungimea 21,6 cm, știind că lățimea este o treime din lungime.

30. Într-un acvariu se toarnă 144 litri apă.

a) Calculați înălțimea la care ajunge apa, dacă acvariul are forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile: $L = 96$ cm, $l = 50$ cm și $h = 40$ cm.

b) Exprimați în procente gradul de umplere a acvariului.

31. În figura alăturată este reprezentat un parc *ABCD* în formă de dreptunghi cu *AB* = 85 m, *BC* = 44 m. Pătratul *MNPQ* reprezintă gărduleţul care împrejmuiește patinoarul. Știind că gărdulețul are lungimea de 132 m și că suprafața din jurul patinoarului este acoperită cu dale, calculați:



a) lungimea porțiunii *MN* a gardului;

b) aria suprafeței acoperită cu dale.

II TESTE DE EVALUARE INIȚIALĂ

TESTUL NR. 1

I. *Alegeți varianta corectă de răspuns. Doar un răspuns este corect.*

5 p **1.** Rezultatul calculului $1 + 3^0 + 595 : 17$ este:
A. 35; **B.** 36; **C.** 37; **D.** 38.

5 p **2.** Suma numerelor care dau câtul 4 prin împărțire la 5 este :
A. 100; **B.** 110; **C.** 120; **D.** 200.

5 p **3.** Scris ca fracție zecimală, numărul $\frac{65}{4}$ devine:
A. 16,25; **B.** 12,25; **C.** 15,26; **D.** 16,15.

5 p **4.** Dintre numerele $\overline{aaa0}$, $\overline{bbb1}$, $\overline{ccc2}$, 1234, este divizibil cu 3 numărul:
A. $\overline{aaa0}$; **B.** $\overline{bbb1}$; **C.** $\overline{ccc2}$; **D.** 1234.

5 p **5.** Simi a obținut la geografie notele: 8, 10, 9, 8. Media notelor lui Simi la geografie este:
A. 8; **B.** 8,50; **C.** 8,75; **D.** 9.

5 p **6.** Un pătrat cu perimetrul 0,16 km are lungimea laturii de:
A. 16 m; **B.** 4 m; **C.** 40 m; **D.** 400 m.

II. *Scrieți rezolvările complete.*

20 p **1.** Se consideră numărul $a = 2^4 + 3^8 : 3^5 - (2^7 \cdot 3^9) : (2^5 \cdot 3^8)$.
a) Calculați numărul *a*.
b) Scrieți divizorii numărului *a* și calculați suma acestora.

20 p **2.** Un autoturism parcurge 720 metri într-un minut. Presupunând că viteza rămâne constantă, calculați distanța pe care o parcurge autoturismul în 0,75 ore. Exprimați rezultatul găsit în kilometri.

20 p **3.** Folosind rigla gradată, reprezentați segmentul *AB* cu lungimea de 18 cm. Pe segmentul *AB*, reprezentați punctele *C* și *D* așa încât *AC* să aibă lungimea $\frac{2}{9}$ din lungimea segmentului *AB*, iar *D* să fie mijlocul segmentului *BC*. Calculați lungimile segmentelor *AC*, *BC*, *BD*, *AD*.

Notă: Timp de lucru 50 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

TESTUL NR. 2

I. *Alegeți varianta corectă de răspuns. Doar un răspuns este corect.*

5 p **1.** Rezultatul calculului $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{4} - \frac{5}{6}$ este :
A. $\frac{1}{5}$; **B.** $\frac{2}{5}$; **C.** $\frac{3}{5}$; **D.** $\frac{4}{5}$.

5 p **2.** Dacă $2^x - 2^4 = 48$, atunci *x* este :
A. 8; **B.** 7; **C.** 6; **D.** 5.

5 p **3.** Dacă numărul $\overline{3aa3}$ este divizibil cu 9, atunci *a* este:
A. 0; **B.** 1; **C.** 6; **D.** 3.

5 p **4.** Dani are 11 bancnote, unele de 10 lei, altele de 5 lei. Știind că, în total, are suma de 95 de lei, numărul bancnotelor de 5 lei este:

A. 3; **B.** 5; **C.** 1; **D.** 9.

5 p **5.** Aria dreptunghiului cu perimetrul de 24 dm și lungimea cu 2 dm mai mare decât lățimea este:

A. 28 dm^2; **B.** 24 dm^2; **C.** 26 dm^2; **D.** 35 dm^2.

5 p **6.** Colecția de timbre a Anei este organizată în două clasoare, fiecare având 400 de timbre. Numărul timbrelor Anei reprezintă $\frac{8}{9}$ din numărul timbrelor prietenei sale, Sonia. Cele două fete au împreună:

A. 1700 de timbre; **B.** 1600 de timbre; **C.** 1800 de timbre; **D.** 2000 de timbre.

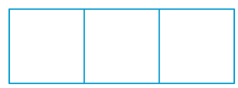
II. *Scrieți rezolvările complete.*

10 p **1. a)** Calculați suma dintre cel mai mic număr natural de trei cifre care este multiplu de 25 și cel mai mare număr natural de trei cifre care este pătrat perfect.

10 p **b)** Calculați diferența dintre cel mai mare număr natural de patru cifre, putere a lui 2 și cel mai mic număr prim de trei cifre.

20 p **2.** Sara pleacă de acasă la cinematograf, dar după ce merge 120 m, își dă seama că a uitat biletul de intrare. Se întoarce, își ia biletul și pleacă din nou la cinematograf, parcurgând în total distanța de 2 km. Determinați distanța de la casa Sarei la cinematograf.

20 p **3.** Așezând trei pătrate având laturile de aceeași lungime unul lângă altul se obține un dreptunghi cu aria de 300 cm^2. Calculați dimensiunile și perimetrul dreptunghiului.



Notă: Timp de lucru 50 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

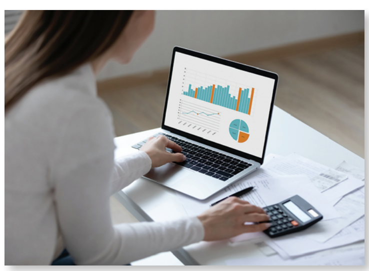
PROIECTE

1. Învățăm gemetrie cu **GeoGebra**

2. Organizăm datele cu **Microsoft Excel sau cu Microsoft Word**

A. Dacă veți participa la proiectele propuse, vă veți îmbunătăți abilitățile de utilizare a calculatorului și veți ști:

- să realizați cu acuratețe configurații geometrice;
- să probați intuitiv proprietăți ale figurilor geometrice;
- să calculați măsuri ale unghiurilor, lungimi ale segmentelor, distanțe, arii;
- să realizați animații cu elemente geometrice fundamentale;
- să afișați textul care însoțește o figură geometrică sau o animație.



- să realizați un *tabel de frecvențe* și să-l prelucrați în vederea prezentării în forme sugestive;
- să reprezentați *diagrame asociate unui șir de date* folosind tabelul de date realizat;
- să calculați *media unui set de date numerice*;
- să ordonați un șir de date;
- să introduceți și să eliminați date din șirul construit;
- să modificați și să salvați un fișier Excel respectiv Word.

B. „PROVOCĂRI"

Fiecare „Provocare" este, de fapt, o invitație la realizarea unei configurații, folosind GeoGebra, sau la realizarea unui tabel de date și a unor diagrame corespunzătoare acestuia, folosind Aplicația Microsoft Excel sau Microsoft Word.
Invitația este lansată prin intermediul unui filmuleț în care vi se explică cerința și modul de lucru. Filmulețul poate fi vizionat pe manualul digital.

1. MULȚIMI. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

1.1 Mulțimi. Relații între mulțimi

L1 Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale

Competențe specifice: 1.1; 2.1; 3.1; 4.1; 5.1; 6.1

Rezolvăm și observăm

În imaginea alăturată, putem observa: mai mulți elevi într-o sală de clasă, bănci, hărți, un ceas de perete, o bibliotecă, instrumente de scris, cărți, caiete și alte obiecte.
Dacă dorim să ne referim doar la o categorie de *obiecte* bine determinate, distincte, caracterizate printr-o *proprietate comună*, putem vorbi despre:

– *mulțimea elevilor* din clasă, fiecare elev reprezentând un *element* al mulțimii;
– *mulțimea băncilor* din clasă, fiecare bancă fiind un *element* al mulțimii;
– *mulțimea cărților* din clasă, *mulțimea* cărților din bibliotecă, *mulțimea* cărților de pe bănci;
– *mulțimea hărților* din clasă etc.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

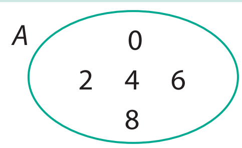
Considerăm enunțul: „Cifrele pare sunt: 0, 2, 4, 6, 8."
Elementele enumerate sunt *bine determinate* și sunt *distincte*. Acestea formează *mulțimea* cifrelor pare. Fiecare cifră pară este un *element* al mulțimii date. Elementele mulțimii se *enumeră* între acolade {0, 2, 4, 6, 8}.

Mulțimea este o „colecție" de obiecte, *bine determinate și distincte*, numite *elementele* mulțimii.

Mulțimile se notează, de obicei, cu litere mari: $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$.
Elementele mulțimilor se notează, de regulă, *cu litere mici*: $a, b, c, \ldots, x, y, z$.

Dacă A este o mulțime și x este un element al acesteia, vom spune că *x aparține mulțimii A* și scriem $x \in A$.	Dacă $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, atunci: $0 \in A$, $2 \in A$, $4 \in A$, $6 \in A$ și $8 \in A$.
Dacă A este o mulțime și x nu este un element al acesteia, vom spune că *x nu aparține mulțimii A* și scriem $x \notin A$.	Dacă $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, atunci: $1 \notin A$, $3 \notin A$, $5 \notin A$, $9 \notin A$.

Mulțimile pot fi reprezentate în unul dintre următoarele moduri:

1. prin *enumerarea elementelor*, între acolade:	$A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$;
2. prin scrierea elementelor în interiorul unei curbe închise, numită *diagramă* Venn-Euler:	
3. prin precizarea unei *proprietăți comune*, specifică tuturor elementelor:	$A = \{x \mid x$ este cifră pară$\}$ Citim: „mulțimea elementelor x, cu proprietatea că x este cifră pară".

Observație. În clasa a VI-a, vom folosi doar primele două moduri de scriere a unei mulțimi: prin enumerarea elementelor sau prin diagrame Venn-Euler.

Mulțimea formată cu toate numerele naturale se numește *mulțimea numerelor naturale* și se notează $\mathbb{N}$.	Scriem $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$.
Mulțimea numerelor naturale diferite de 0 se numește *mulțimea numerelor naturale nenule* și se notează $\mathbb{N}^*$.	Scriem $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$.
O mulțime se numește *mulțime numerică* dacă toate elementele sale sunt numere.	Mulțimea $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ este o mulțime *numerică*. Mulțimile $\mathbb{N}$ și $\mathbb{N}^*$ sunt mulțimi *numerice*.
O mulțime se numește *mulțime nenumerică* dacă aceasta conține cel puțin un element care nu este număr.	Mulțimile $B = \{m, a, t, e\}$, $C = \{a, 1, 2\}$, $M = \{\blacklozenge, \bullet, *\}$ sunt mulțimi *nenumerice*.

O mulțime poate să nu aibă *niciun element*, poate să aibă un *număr finit de elemente* sau poate să aibă un *număr infinit de elemente*.

O mulțime care nu are niciun element se numește *mulțimea vidă* și se notează $\varnothing$.	Mulțimea consoanelor din cuvântul „*ie*” este mulțimea vidă.
O mulțime care are un număr bine precizat (finit) de elemente se numește *mulțime finită*. Numărul elementelor unei mulțimi finite M se numește *cardinalul* acelei mulțimi și se notează card M.	Mulțimea vidă este o mulțime finită, cardinalul său este 0 prin definiție și scriem card $\varnothing = 0$. Mulțimea $M = \{1, 4, 7, 9\}$ este mulțime finită, *cardinalul* său este 4 și scriem card $M = 4$.
O mulțime care nu are un număr finit de elemente se numește *mulțime infinită*.	Mulțimile $\mathbb{N}$ și $\mathbb{N}^*$ sunt mulțimi infinite. În geometrie, dreapta, semidreapta, segmentul de dreaptă sunt formate dintr-*un număr nesfârșit* de puncte, adică dintr-o *infinitate* de puncte. În concluzie, dreapta, semidreapta, segmentul de dreaptă sunt *mulțimi infinite* de puncte.

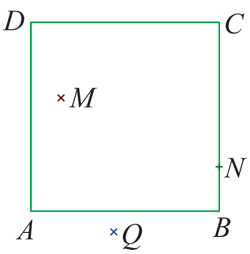
Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicația 1

În imaginea alăturată, $ABCD$ este pătrat, punctul M este în interiorul pătratului, punctul N este situat pe latura BC, iar punctul Q este în exteriorul pătratului.

a) Scrieți mulțimea V, a vârfurilor pătratului, mulțimea L, a laturilor pătratului și mulțimea P, a punctelor reprezentate, care nu aparțin pătratului.

b) Despre fiecare dintre punctele A, B, C, D, M, N, Q, stabiliți dacă aparțin pătratului $ABCD$. Scrieți rezultatul obținut, în fiecare caz, folosind unul din simbolurile $\in$ sau $\notin$.



Soluție. **a)** $V = \{A, B, C, D\}$; $L = \{AB, BC, CD, DA\}$; $P = \{M, Q\}$. **b)** $A \in ABCD$; $B \in ABCD$; $C \in ABCD$; $D \in ABCD$; $N \in ABCD$; $M \notin ABCD$; $Q \notin ABCD$.

Puțină gramatică

Numeralul cardinal exprimă un număr natural, fără a face referire la obiecte sau la ordinea obiectelor.
Numeralul ordinal exprimă locul sau ordinea numerică a obiectelor dintr-o înșiruire.

Aplicația 2.

La o activitate de voluntariat au participat *nouăzeci și doi* de elevi ai școlii noastre. *Doi* dintre aceștia au coordonat activitatea, iar ceilalți *nouăzeci* s-au organizat în *nouă* grupe cu același număr de elevi. *Prima*, *a doua* și *a treia* grupă sunt formate din elevi de clasa *a cincea* (a V-a), următoarele *trei* conțin numai elevi de clasa *a șasea* (a VI-a), iar celelalte grupe conțin numai elevi de clasa *a șaptea* (a VII-a).

I. a) Scrieți mulțimea *C*, a *numeralelor cardinale* întâlnite în text.
b) Scrieți mulțimea *O*, a *numeralelor ordinale* întâlnite în text.
c) Scrieți mulțimea *G*, a grupelor în care ar putea fi Claudiu, știind că este elev de clasa a VII-a.

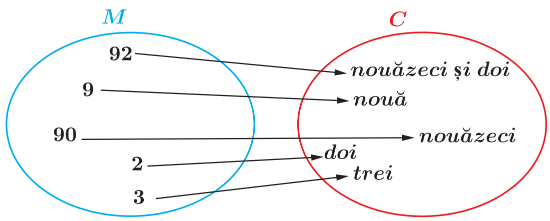
Soluție.

I. a) C = {*nouăzeci și doi*, *doi*, *nouăzeci*, *nouă*, *trei*}.
b) O = {*prima*, *a doua*, *a treia*, *a cincea*, *a șasea*, *a șaptea*}.
c) În clasa a șaptea sunt elevii din ultimele trei grupe. G = {grupa *a șaptea*, grupa *a opta*, grupa *a noua*}.

II. Notăm cu *A* mulțimea elevilor participanți la activitate, cu *B* mulțimea elevilor care coordonează activitatea, cu *D* mulțimea elevilor organizați pe grupe, cu *E* mulțimea grupelor și cu *F* mulțimea grupelor elevilor de clasa a șaptea. Reprezentați prin diagrame Venn-Euler mulțimea M = {card *A*, card *B*, card *D*, card *E*, card *F*} și mulțimea C. Stabiliți, prin săgeți, corespondența între elementele celor două mulțimi.

Soluție.

Din text, rezultă:
card $A = 92$; card $B = 2$; card $D = 90$;
card $E = 9$; card $F = 3$;
Atunci, $M = \{2, 3, 9, 90, 92\}$. Fiecare element din mulțimea *C* reprezintă cardinalul uneia dintre mulțimile *A*, *B*, *D*, *E*, *F*.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Considerăm cuvintele: numărul; școala; matematica.
a) Scrieți, prin enumerarea elementelor, mulțimea literelor din care sunt formate cuvintele date.
b) Copiați pe caiete și completați tabelul următor, folosind modelul dat.

Cuvântul	numărul	școala	matematica
Numărul literelor cuvântului	7		
Mulțimea formată cu literele cuvântului	{n, u, m, ă, r, l}		
Cardinalul mulțimii formate cu literele cuvântului	6		

2. Considerăm numerele: 2022; 321321; 11001100.
a) Scrieți, prin enumerarea elementelor, mulțimea cifrelor din care sunt formate numerele date.
b) Copiați pe caiete și completați tabelul următor, folosind modelul dat.

Numărul	2022	321 321	11 001 100
Numărul cifrelor numărului	4		
Mulțimea formată cu cifrele numărului	{0, 2}		
Cardinalul mulțimii formate cu cifrele numărului	2		

3. Considerăm mulțimile:
$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{4, 6, 8, 10\}$,
$C = \{100, 200, 300, \ldots 900\}$, $D = \{0, 5, 10, 15, 20, \ldots, 40\}$.
Determinați cardinalul fiecăreia dintre mulțimile date.

4. Scrieți, folosind diagrame Venn-Euler:
a) mulțimea *A*, formată din toate numerele naturale mai mici decât 3;
b) mulțimea *B*, formată din toate numerele impare cuprinse între 7 și 14;
c) mulțimea *C*, formată din vocalele cuvântului *exercițiu*.

5. Se consideră mulțimea *P*, a tuturor județelor și mulțimea *T*, a tuturor orașelor României.
a) Scrieți trei elemente ale mulțimii *P*.
b) Scrieți patru elemente ale mulțimii *T*.

6. Scrieți mulțimea cifrelor din sistemul zecimal de numerație, în fiecare dintre următoarele moduri:
a) prin enumerarea elementelor;
b) prin diagrame Venn-Euler.

7. Fie *M* mulțimea numerelor naturale de forma $m = 5 \cdot n + 3$, $n \in \mathbb{N}$.
a) Scrieți cele mai mici cinci elemente conținute de mulțimea *M*.
b) Verificați dacă numerele 29, 48 și 2023 sunt elemente ale mulțimii *M*.
c) Demonstrați că mulțimea *M* nu conține pătrate perfecte

8. Scrieți mulțimea tuturor numerelor, de cel mult două cifre, care se pot forma doar cu cifrele 0 și 1.

9. Considerăm mulțimile: $M = \{2, 4, 6, 9\}$, $P = \{1, 2, 4, 8\}$. Copiați tabelul pe caiete și completați în caseta liberă litera ***A***, dacă afirmația este adevărată și litera ***F***, dacă afirmația este falsă.

Propoziția	***A/F***
$2 \in P$	**A**
$2^2 \notin P$	
$2 \in M$ și $2 \notin P$	
$4 \in M$ sau $4 \in P$	

Propoziția	***A/F***
$5 \notin P$	
$3^2 \notin M$	
$6 \in M$ sau $6 \in P$	
card M = card P	

10. Folosind harta administrativă a României, scrieți mulțimea județelor din care fac parte orașele: Alba-Iulia, Bușteni, Constanța, Deva, Eforie, Mangalia, Piatra-Neamț, Timișoara, Sinaia.

11. Fie *a*, *b* cifre nenule în baza 10 care verifică inegalitățile: $1 < a + 2 \cdot b < 7$.
a) Scrieți mulțimea tuturor numerelor de două cifre care se pot forma cu cifrele *a* și *b*.
b) Determinați cardinalul mulțimii obținute.

Minitest

Alegeți litera care indică varianta corectă. Doar un răspuns este corect.

15 p **1.** Se consideră mulțimea *T* a tuturor orașelor din Transilvania. Un element al mulțimii *T* este:
A. Buzău; **B.** Arad; **C.** Târgoviște; **D.** Medgidia.

15 p **2.** Mulțimea cifrelor impare, scrisă prin enumerarea elementelor, este:
A. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$; **B.** $\{1, 3, 4, 5, 7, 9\}$; **C.** $\{1, 3, 5, 9\}$; **D.** $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.

20 p **3.** Cel mai mare element al mulțimii pătratelor perfecte de cel mult două cifre este:
A. 90; **B.** 100; **C.** 81; **D.** 99.

20 p **4.** Dacă *x* este număr natural și $2 \in \{x - 3, x + 3\}$, atunci *x* este egal cu:
A. 2; **B.** 3; **C.** 1; **D.** 5.

20 p **5.** Dacă $y + 2$ și $y + 5$ sunt elemente ale mulțimii $\{4, 6, 7, 8\}$, atunci *y* este egal cu:
A. 2; **B.** 4; **C.** 6; **D.** 7.

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

L2 Relații între mulțimi

Rezolvăm și observăm

Considerăm mulțimea A, a numerelor naturale impare, mai mici decât 13, mulțimea B, a numerelor naturale impare și mulțimea $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$.

a) Scrieți mulțimea A prin enumerarea elementelor.

b) Pentru mulțimile A și C, stabiliți dacă există elemente care aparțin uneia dintre mulțimi și nu aparțin și celeilalte.

Soluție

a) Numerele naturale impare, mai mici decât 13 sunt: 1, 3, 5, 7, 9, 11, deci $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$.

b) Cum $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, deducem că cele două mulțimi *au exact aceleași elemente*.

Despre mulțimile A și C vom spune că sunt *egale*.

c) Pentru mulțimile A și B, stabiliți dacă există elemente care aparțin uneia dintre mulțimi și nu aparțin și celeilalte.

c) Dacă un element aparține mulțimii A, atunci acesta este impar, deci aparține și mulțimii B. Pe de altă parte, numărul 27 este impar, adică aparține mulțimii B, dar nu aparține mulțimii A. Prin urmare, există elemente ale mulțimii B care nu aparțin mulțimii A.

Vom spune că:
- mulțimea A *este inclusă* în mulțimea B sau că mulțimea B *include* mulțimea A sau că mulțimea A este *submulțime* sau *parte* a mulțimii B.
- mulțimea B *nu este inclusă* în mulțimea A sau că mulțimea A *nu include* mulțimea B.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Două mulțimi sunt *egale* dacă au *aceleași elemente*. Dacă A și B sunt două mulțimi egale, scriem $A = B$.	Dacă A este mulțimea cifrelor în baza 10 și B este mulțimea numerelor naturale mai mici decât 10, atunci $A = B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
Dacă A și B nu sunt egale, scriem $A \neq B$.	Dacă A este mulțimea cifrelor în baza 2, iar $B = \{0, 1, 2\}$, atunci $A = \{0, 1\}$ și nu conține elementul 2, deci $A \neq B$.
Mulțimea A *este inclusă* în mulțimea B dacă toate elementele mulțimii A sunt și elemente ale mulțimii B. Dacă mulțimea A *este inclusă* în mulțimea B, scriem $A \subset B$; Mulțimea A se numește *submulțime* sau *parte* a mulțimii B.	$\varnothing \subset M$, oricare ar fi mulțimea M. $M \subset M$, oricare ar fi mulțimea M. Toate elementele mulțimii $A = \{0, 1\}$ sunt și elemente ale mulțimii $B = \{0, 1, 2\}$, deci $A \subset B$, iar A este *submulțime* a mulțimii B.
Dacă mulțimea A *nu este inclusă* în mulțimea B, scriem $A \not\subset B$.	Pentru mulțimile $A = \{a, 2, c\}$ și $B = \{a, c, 7\}$, $2 \in A$, dar $2 \notin B$, deci $A \not\subset B$. $7 \in B$, dar $7 \notin A$, deci $B \not\subset A$.

Observații.
Dacă mulțimea A *este inclusă* în mulțimea B, mai spunem și că mulțimea B *include* mulțimea A și scriem $B \supset A$.
Dacă A *nu este inclusă* în mulțimea B, mai spunem și că mulțimea B *nu include* mulțimea A și scriem $B \not\supset A$.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

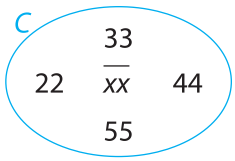
Aplicația 1

Se consideră mulțimile $A = \{11, 22, 33, 44, 55\}$, $B = \{11, \overline{2a}, \overline{b5}, 44, \overline{cc}\}$ și mulțimea C dată prin diagrama alăturată.

a) Determinați cifrele a, b, c astfel încât $A = B$.

b) Pentru a, b, c, determinate la subpunctul a), identificați cifra x astfel încât $B = C$.

c) Folosind valorile obținute la subpunctele a) și b), stabiliți relația dintre mulțimile A și C.



Soluție. **a)** Pentru ca $A = B$, adică pentru ca A și B *să aibă aceleași elemente, trebuie ca* $\overline{2a} = 22$, $\overline{b5} = 55$ și $\overline{cc} = 33$. Obținem $a = 2$, $b = 5$, $c = 3$.

b) Din $B = C$, rezultă $\overline{xx} = 11$, deci $x = 1$. **c)** $A = \{11, 22, 33, 44, 55\} = C$.

Reținem!

1. Orice mulțime este egală cu ea însăși. $A = A$, oricare ar fi mulțimea A.

2. Dacă $A = B$, atunci $B = A$.

3. Dacă $A = B$ și $B = C$, atunci $A = C$.

Observații. **1.** Dacă $A = B$, atunci card A = card B.

2. Există mulțimi diferite care au același număr de elemente, adică $A \neq B$ *și card* A = card B

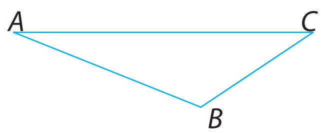
Aplicația 2

Triunghiul ABC, reprezentat în imagine, este mulțimea tuturor punctelor din plan situate pe cel puțin unul dintre segmentele AB, BC, AC.

a) Scrieți mulțimea L, a laturilor triunghiului și mulțimea V, a vârfurilor triunghiului.

b) Scrieți submulțimile mulțimii L care au cardinalul 2.

c) Scrieți toate submulțimile mulțimii V.



Soluție. **a)** $L = \{AB, BC, CA\}$; $V = \{A, B, C\}$. **b)** $\{AB, BC\}$; $\{AB, CA\}$; $\{BC, CA\}$;

c) $\varnothing$; $\{A\}$; $\{B\}$; $\{C\}$; $\{A, B\}$; $\{B, C\}$; $\{A, C\}$; $\{A, B, C\}$.

Aplicația 3

Stabiliți, argumentat, dacă sunt adevărate sau sunt false propozițiile: $\{1, 2, 3\} \subset \{0, 2, 1, 7\}$; $\{3\} \subset \{0, 1, 2, 3, 7\}$; $\varnothing \not\subset \{0\}$; $\{a, b, c\} \supset \{a, c\}$.

Rezolvare

Propoziția	*A/F*	Justificare
$\{1, 2, 3\} \subset \{0, 2, 1, 7\}$	F	$3 \in \{1, 2, 3\}$, dar $3 \notin \{0, 2, 1, 7\}$
$\{3\} \subset \{0, 1, 2, 3, 7\}$	A	$3 \in \{3\}$ și $3 \in \{0, 1, 2, 3, 7\}$
$\varnothing \not\subset \{0\}$	F	$\varnothing$ este submulțime a oricărei mulțimi
$\{a, b, c\} \supset \{a, c\}$	A	$a \in \{a, c\}$ și $a \in \{a, b, c\}$; $c \in \{a, c\}$ și $c \in \{a, b, c\}$.

Reținem!

a) Mulțimea vidă este submulțime a oricărei mulțimi A. Scriem $\varnothing \subset A$.

b) Dacă $A \subset B$ și $B \subset C$, atunci $A \subset C$.

c) Au loc afirmațiile: $\mathbf{c_1}$: Dacă $A \subset B$ și $B \subset A$, atunci $A = B$. $\mathbf{c_2}$: Dacă $A = B$, atunci $A \subset B$ și $B \subset A$.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

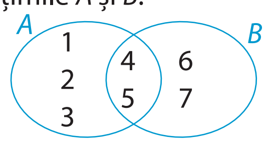
1. Fie mulțimea $M = \{2, 3, 4, 5, 7, 8\}$. Copiați pe caiete și scrieți în caseta liberă ***A***, dacă propoziția este adevărată și ***F***, dacă propoziția este falsă.

Propoziția	***A/F***	Propoziția	***A/F***
$\{2, 3\} \subset M$		$\{2, 6\} \not\subset M$	
$\{6, 7\} \not\subset M$		$\{3, 4, 5\} \not\subset M$	
$\{3, 6, 7\} \subset M$		$\{0, 1, 6\} \not\subset M$	
$\{2, 8\} \subset M$		$\{1, 2, 3, 4, 5, 8\} \subset M$	

2. Scrieți toate submulțimile pentru fiecare dintre mulțimile:
a) $A = \{a, b\}$;
b) $B = \{0, 1, 2\}$;
c) $C = \{2, 3, 9, 10\}$.

3. Scrieți submulțimile cu două elemente, ale mulțimii literelor cuvântului „*capac*”.

4. În figura următoare sunt reprezentate prin diagrame mulțimile A și B.



a) Determinați mulțimea M, a elementele comune mulțimilor A și B.
b) Scrieți submulțimile mulțimii M.
c) Determinați mulțimea C, a elementelor care aparțin mulțimii A și nu aparțin mulțimii B.
d) Scrieți toate submulțimile mulțimii C.

5. Mulțimea M are zece elemente. Precizați numărul submulțimilor mulțimii M, care au cardinalul 2.

6. Se consideră mulțimea $X = \{13, 23, 33, 43, \dots, 93\}$.
a) Determinați submulțimile mulțimii X care sunt formate numai din numere naturale divizibile cu 3.
b) Decideți, justificând răspunsul dat, dacă există submulțimi nevide ale mulțimii X, formate numai din pătrate perfecte.

7. Determinați valorile numărului natural a, astfel încât mulțimea $\{a, 7\}$ să fie submulțime a mulțimii $\{6, 7, 8\}$.

8. Determinați mulțimea A, știind că $\{1, 3, 5\} \subset A$ și $A \subset \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

9. Mulțimile A și B sunt egale. Determinați elementele a și b pentru fiecare dintre cazurile:
a) $A = \{1, a, 3\}$, $B = \{2, 3, b\}$
b) $A = \{a, 7, 11\}$, $B = \{1, b, 11\}$
c) $A = \{9, 16, a + b\}$, $B = \{a + 5, 16, 23\}$

10. Fie mulțimea $M = \{1, 2, 3, \dots, 9, 10\}$. Determinați submulțimile mulțimii M, de forma $\{a, b, c\}$, unde $a + b = c^2$.

Minitest

1. Alegeți varianta corectă de răspuns. Doar un răspuns este corect.

15 p **a)** O submulțime a mulțimii numerelor prime este:
A. $\{1, 2, 3, 5\}$; **B.** $\{2, 4, 6, \dots\}$; **C.** $\{15, 17\}$; **D.** $\{2, 3, 2+3, 23\}$.

15 p **b)** Dacă elementele mulțimii A sunt toate numerele naturale cuprinse între 2 și 5, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, iar mulțimea C este formată din numerele naturale mai mici decât 5, atunci:
A. $A \subset B$; **B.** $B \subset C$; **C.** $C \subset A$; **D.** $B \subset A$.

15 p **c)** Numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimi $\{1, 11, 111\}$ este:
A. 1; **B.** 2; **C.** 3; **D.** 4.

15 p **d)** Mulțimile $\{x - 3, x + 3\}$ și $\{17, 23\}$ sunt egale pentru x egal cu:
A. 14; **B.** 20; **C.** 26; **D.** 23.

30 p **2.** Copiați pe caiete și completați spațiile libere cu unul din simbolurile $\subset$ sau $\not\subset$ pentru a obține enunțuri adevărate:
a) $\{3\}$ ... $\{1, 2, 3\}$; **b)** $\{a, b, c, d, e\} \dots \{a, b\}$; **c)** $\varnothing \dots \mathbb{N}$.

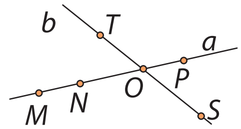
Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

1.2 Operații cu mulțimi

L1 Reuniunea a două mulțimi. Intersecția a două mulțimi. Diferența a două mulțimi

Rezolvăm și observăm

Observați configurația alăturată și identificați:

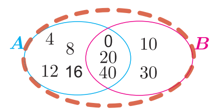


a) mulțimea A, a punctelor reprezentate pe dreapta a;
b) mulțimea B, a punctelor reprezentate pe dreapta b;
c) mulțimea X, a punctelor care aparțin atât dreptei a cât și dreptei b;
d) mulțimea Y, a punctelor reprezentate pe cel puțin una din dreptele a sau b;
e) mulțimea D_1, a punctelor reprezentate pe dreapta a, care nu aparțin dreptei b;
f) mulțimea D_2, a punctelor reprezentate pe dreapta b, care nu aparțin dreptei a.

Soluție. **a)** $A = \{M, N, O, P\}$. **b)** $B = \{S, O, T\}$.
c) $X = \{O\}$. Mulțimea X se numește *intersecția* mulțimilor A și B și scriem $X = A \cap B$.
d) $Y = \{M, N, O, P, S, T\}$. Mulțimea Y se numește *reuniunea* mulțimilor A și B și scriem $Y = A \cup B$.
e) $D_1 = \{M, N, P\}$. Mulțimea D_1 se numește *diferența* dintre mulțimea A și mulțimea B și scriem $D_1 = A \setminus B$.
f) $D_2 = \{S, T\}$. Mulțimea D_2 se numește *diferența* dintre mulțimea B și mulțimea A și scriem $D_2 = B \setminus A$.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

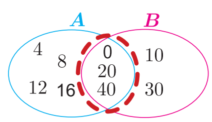
Reuniunea mulțimilor A și B este mulțimea notată $A \cup B$, formată cu elementele care aparțin *cel puțin uneia* dintre cele două mulțimi.



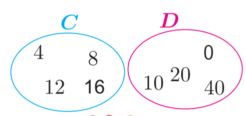
$A \cup B = \{4, 8, 12, 16, 0, 20, 40, 10, 30\}$

Intersecția mulțimilor A și B este mulțimea notată $A \cap B$, formată cu elementele comune ale celor două mulțimi.

Două mulțimi C și D care nu au niciun element comun se numesc *mulțimi disjuncte* și scriem $C \cap D = \varnothing$.

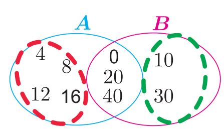


$A \cap B = \{0, 20, 40\}$



$C \cap D = \varnothing$

Diferența dintre mulțimea A și mulțimea B este mulțimea notată $A \setminus B$ sau $A - B$, formată cu elementele care *aparțin* mulțimii A și *nu aparțin* mulțimii B.



$A - B = \{4, 8, 12, 16\}$
$B - A = \{10, 30\}$

Reținem!

Operația	Notație	Caracterizare	Citire
Reuniunea	$A \cup B$	Dacă $x \in A \cup B$, atunci $x \in A$ sau $x \in B$. Dacă $x \in A$ sau $x \in B$, atunci $x \in A \cup B$.	Mulțimea A *reunită* cu mulțimea B sau *reuniunea* mulțimilor A și B.
Intersecția	$A \cap B$	Dacă $x \in A \cap B$, atunci $x \in A$ și $x \in B$. Dacă $x \in A$ și $x \in B$, atunci $x \in A \cap B$.	Mulțimea A *intersectată* cu mulțimea B sau *intersecția* mulțimilor A și B.
Diferența	$A \setminus B$	Dacă $x \in A \setminus B$, atunci $x \in A$ și $x \notin B$. Dacă $x \in A$ și $x \notin B$, atunci $x \in A \setminus B$.	Mulțimea A *minus* mulțimea B sau *diferența* dintre mulțimea A și mulțimea B.

Ştim să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicaţia 1

Andrei, Vlad, Tudor, Silviu, Ioana, Alexandra, Mihai, Sofia şi Simona, elevi în clasa a VI-a, participă la cel puţin unul dintre cursurile de sport. Astfel: Andrei, Vlad, Tudor şi Sofia participă la baschet, Tudor, Silviu, Ioana şi Alexandra participă la înot, Ioana, Alexandra, Mihai, Sofia şi Simona participă la volei. Notăm cu A mulţimea elevilor care participă la baschet, cu B mulţimea elevilor care participă la înot şi cu C mulţimea elevilor care participă la volei.

a) Scrieţi, prin enumerarea elementelor, mulţimile A, B, C şi precizaţi cardinalul fiecăreia.

b) Scrieţi mulţimile: $A \cup B$, $A \cap B$, $B \cap C$, $A \cap C$, $A \cap B \cap C$, $A \setminus B$, $C \setminus B$, $B \setminus C$.

c) Folosind rezultatele de la subpunctul b), precizaţi:

c_1) numărul elevilor care participă la baschet sau înot;

c_2) numărul elevilor care participă la baschet şi volei;

c_3) numărul elevilor care participă la înot şi nu participă la volei.

Soluţie.

a) $A = \{$Andrei, Vlad, Tudor, Sofia$\}$; card $A = 4$;
$B = \{$Tudor, Silviu, Ioana, Alexandra$\}$; card $B = 4$;
$C = \{$Ioana, Alexandra, Mihai, Sofia, Simona$\}$; card $C = 5$;

b) $A \cup B = \{$Andrei, Vlad, Tudor, Sofia, Silviu, Ioana, Alexandra$\}$
$A \cap B = \{$Tudor$\}$; $B \cap C = \{$Ioana, Alexandra$\}$;
$A \cap C = \{$Sofia$\}$; $A \cap B \cap C = \varnothing$;
$A \setminus B = \{$Andrei, Vlad, Sofia$\}$;
$C \setminus B = \{$Mihai, Sofia, Simona$\}$;
$B \setminus C = \{$Tudor, Silviu$\}$.

c) c_1) card $(A \cup B) = 7$; c_2) card $(A \cap C) = 1$; c_3) card $(B \setminus C) = 2$.

Aplicaţia 2

Se notează cu A mulţimea numerelor naturale de două cifre şi cu B mulţimea numerelor naturale de forma $\overline{a5}$.

a) Stabiliţi, argumentat, dacă mulţimea B este inclusă în mulţimea A.

b) Deduceţi relaţia dintre mulţimile $A \cup B$ şi A.

c) Deduceţi relaţia dintre mulţimile $A \cap B$ şi B.

Soluţie. $A = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, \ldots, 25, \ldots 99\}$, $B = \{15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95\}$.

a) Toate elementele mulţimii B sunt şi elemente ale mulţimii A, deci $B \subset A$.

b) $A \cup B = A$.

c) $A \cap B = B$.

Reţinem!

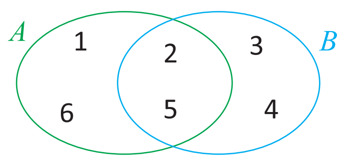
1. $A \cup B = B \cup A$, oricare ar fi mulţimile A şi B.	**3.** Dacă $A \subset B$, atunci $A \cup B = B$ şi $A \cap B = A$.
2. $A \cap B = B \cap A$, oricare ar fi mulţimile A şi B.	**4.** Dacă $A \neq B$, atunci $A \setminus B \neq B \setminus A$.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. În figura alăturată sunt reprezentate prin diagrame mulţimile A şi B.

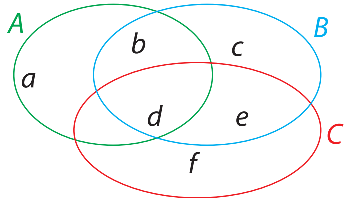
a) Scrieţi, prin enumerarea elementelor, mulţimile A şi B.

b) Determinaţi mulţimile $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ şi $B \setminus A$. Scrieţi-le prin enumerarea elementelor.



2. Fie mulțimile $A = \{2, 3, 5\}$ și $B = \{1, 3, 4, 5\}$. Calculați $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$.

3. În figura următoare sunt reprezentate prin diagrame mulțimile A, B și C.
   a) Scrieți, prin enumerarea elementelor, mulțimile A, B și C.
   b) Determinați mulțimile:
   $A \cup B \cup C, A \cap B \cap C, (B \setminus A) \cap (B \setminus C)$. Scrieți aceste mulțimi prin enumerarea elementelor.



4. **a)** Scrieți două mulțimi a căror reuniune este mulțimea $\{1, 2, 3\}$;
   b) Scrieți două mulțimi disjuncte a căror reuniune este mulțimea $\{0, 1, 2, 3\}$.

5. Determinați mulțimea M, știind că $M \cup \{a\} = \{a, b, c\}$. Identificați toate cazurile posibile.

6. Fie mulțimea $P = \{3, 8\}$.
   a) Scrieți două mulțimi care au ca intersecție mulțimea P.
   b) Scrieți trei mulțimi care au ca intersecție mulțimea P.
   c) Scrieți două mulțimi a căror diferență este mulțimea P.

7. Determinați mulțimea M, știind că $M \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ și $M \cap \{2, 3\} = \varnothing$.

8. Determinați mulțimile A și B, știind că sunt îndeplinite simultan condițiile $A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}, A \cap B = \{2, 6\}, A \setminus B = \{1, 7\}$.

9. Determinați mulțimile A și B, știind că $A \setminus B = \{5, 6\}$, $B \setminus A = \{3, 7\}$ și $A \cap B = \{2, 4\}$.

L2 Aplicații: operații cu mulțimi

Ne amintim

Reuniunea mulțimilor A și B este mulțimea notată $A \cup B$, formată cu elementele care aparțin *cel puțin uneia* dintre cele două mulțimi.

Intersecția mulțimilor A și B este mulțimea notată $A \cap B$, formată cu elementele comune ale celor două mulțimi.

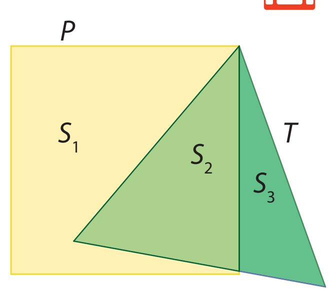
Diferența dintre mulțimea A și mulțimea B este mulțimea notată $A \setminus B$ sau $A - B$, formată cu elementele care *aparțin* mulțimii A și *nu aparțin* mulțimii B.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicația 1.

Prin suprapunerea parțială a suprafeței pătratice P și a suprafeței triunghiulare T, au luat naștere suprafețele S_1, S_2 și S_3.

a) Scrieți fiecare dintre mulțimile S_1, S_2 și S_3 folosind operații între mulțimile de puncte P și T.
b) Stabiliți relații între mulțimile $P \setminus S_2$ și $P \setminus T$.
c) Stabiliți relații între mulțimile $T \cup P, P \cup S_3, S_1 \cup T$ și $S_1 \cup S_2 \cup S_3$.



Soluție.

a) $S_1 = P \setminus T; S_2 = P \cap T; S_3 = T \setminus P$.
b) $P \setminus S_2 = P \setminus T = S_1$;
c) $T \cup P = P \cup S_3 = S_1 \cup T = S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

Aplicația 2

Lacul	Bucura	Zănoaga	Bâlea	Capra	Podragu	Tăul fără fund	Gâlcescu
Adâncimea	15,5 m	29 m	11 m	8	16 m	17,6 m	9 m
Întinderea	10 ha	6,5 ha	4,6 ha	1,6 ha	3 ha	3,76 ha	3 ha
Masivul muntos în care este situat	Retezat	Retezat	Făgăraș	Făgăraș	Făgăraș	Rodnei	Parâng

În tabelul de mai sus, sunt prezentate adâncimea, suprafața și masivul muntos în care sunt situate, pentru câteva din lacurile glaciare din România.

Lacul Zănoaga – cel mai adânc lac glaciar din Romania

a) Folosind datele din tabel, scrieți:
- mulțimea A, a lacurilor care apar în tabel;
- mulțimea B, a lacurilor situate în masivul Făgăraș, care apar în tabel;
- mulțimea C, a lacurilor care apar în tabel și au suprafața mai mare de 3 ha;
- mulțimea D, a lacurilor care apar în tabel și au adâncimea cel puțin 11 m.

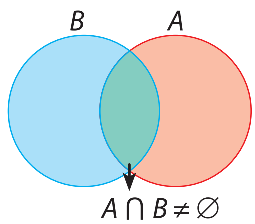
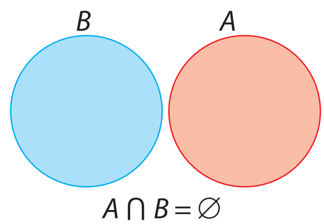
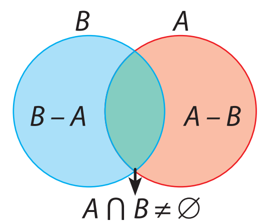
b) Folosind operații cu mulțimi și rezultatele de la subpunctul a), scrieți:
- mulțimea X, a lacurilor care nu sunt situate în masivul Făgăraș;
- mulțimea Y, a lacurilor care au suprafața mai mare de 3 ha și adâncimea de cel puțin 11 m;
- mulțimea Z, a lacurilor care au suprafața mai mare de 3 ha sau adâncimea de cel puțin 11 m.

Soluție.

a) A = {Bucura, Zănoaga, Bâlea, Capra, Podragu, Tăul fără fund, Gâlcescu}; B = {Bâlea, Capra, Podragu}; C = {Bucura, Zănoaga, Bâlea, Tăul fără fund}; D = {Bucura, Zănoaga, Bâlea, Podragu, Tăul fără fund};

b) $X = A \setminus B$ = {Bucura, Zănoaga, Tăul fără fund, Gâlcescu}; $Y = C \cap D$ și $Z = C \cup D$, deci Y = {Bucura, Zănoaga, Bâlea, Tăul fără fund}; și Z = {Bucura, Zănoaga, Bâlea, Podragu, Tăul fără fund}.

Reținem!

card $(A \cup B)$ = = card A + card B – card $(A \cap B)$.	Dacă A și B sunt *disjuncte*, atunci card $(A \cup B)$ = card A + card B.	card $(A \cup B)$ = = card $(A \setminus B)$ + card $(B \setminus A)$ + card $(A \cap B)$.
		

Observații.

1. Dacă $A = B$, atunci $A \setminus B = B \setminus A = \varnothing$.

2. Dacă $A \neq B$, atunci $A \setminus B \neq B \setminus A$.

3. $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \varnothing$, oricare ar fi A și B.

4. Dacă $A \cap B = \varnothing$, atunci $A \setminus B = A$ și $B \setminus A = B$.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Pentru mulțimile $A = \{1, 2, 5, 7\}$ și $B = \{2, 9, 6\}$, calculați: $A \cup B$; $B \cup A$; $A \cap B$; $B \cap A$; $A \setminus B$; $B \setminus A$.

2. Mulțimea A îndeplinește *simultan* condițiile:
   a) $1 \in A$;
   b) Dacă $x \in A$, atunci $(x + 3) \in A$.
   Demonstrați că $10 \in A$.

3. Se consideră mulțimea A formată din cifrele a, pentru care numerele naturale de forma $\overline{2a3}$ sunt divizibile cu 3 și mulțimea B, a numerelor naturale b pentru care $2^b \le 16$.
   Calculați mulțimile A, B, $A \cap B$ și $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

4. Mulțimea A are 25 elemente, mulțimea B are 52 de elemente, iar $A \cap B$ are 2 + 5 elemente. Determinați numărul elementelor mulțimii $A \cup B$.

5. Mulțimea C are 26 elemente, mulțimea D are 62 de elemente, iar $C \cup D$ are 80 elemente. Determinați numărul elementelor mulțimii $C \cap D$.

6. La un test la care au participat 30 de elevi, s-au dat spre rezolvare două probleme. Una dintre probleme a fost rezolvată de către 25 de elevi, cealaltă problemă a fost rezolvată de către 17 elevi, iar 2 elevi nu au rezolvat nicio problemă. Determinați numărul elevilor care au rezolvat ambele probleme. Rezolvați problema cu ajutorul mulțimilor.

7. Se consideră mulțimea
   $$A = \left\{\frac{31}{2}, \frac{32}{3}, \frac{33}{4}, \frac{34}{5}, \ldots\right\}.$$
   Determinați mulțimea $B = A \cap \mathbb{N}$.

8. Fie mulțimile $A = \{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$, $B = \{1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 11^2, 12^2\}$.
   a) Determinați numărul elementelor mulțimilor $A \cup B$ și $A \cap B$.
   b) Comparați suma elementelor mulțimii A cu suma elementelor mulțimii B.

9. Mulțimile A și B sunt disjuncte, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$, iar $A = \{a, b, c\}$ cu $a + b + c = 28$.
   Determinați mulțimea B, identificând toate cazurile posibile.

10. Fiecare dintre cei 232 elevi ai unei școli vorbește cel puțin una din limbile engleză și franceză. Se știe că 194 dintre aceștia vorbesc limba engleză și 96 vorbesc limba franceză.
    a) Determinați numărul elevilor care vorbesc ambele limbi.
    b) Determinați numărul elevilor care vorbesc numai limba engleză.

Minitest

Alegeți varianta corectă de răspuns. Doar un răspuns este corect.

Fie mulțimile $A = \{2, 3, 6\}$, $B = \{1, 3, 4\}$ și $C = \{3, 4, 5\}$. Atunci:

20 p **a)** Mulțimea $A \cup B$ este:
A. $\{1, 2, 3, 6\}$; **B.** $\{1, 2, 4, 6\}$; **C.** $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; **D.** $\{1, 2, 3, 4, 6\}$.

20 p **b)** Mulțimea $B \cap C$ este:
A. $\{3, 4, 5\}$; **B.** $\{3, 5\}$; **C.** $\{3, 4\}$; **D.** $\{4, 5\}$.

20 p **c)** Mulțimea $C \setminus A$ este:
A. $\{3, 4\}$; **B.** $\{4, 5\}$; **C.** $\{3, 5\}$; **D.** $\varnothing$

20 p **d)** Mulțimea $A \setminus B$ este:
A. $\{2, 3, 6\}$; **B.** $\{3, 6\}$; **C.** $\{1, 2, 3, 6\}$; **D.** $\{2,6\}$.

10 p **e)** Mulțimea $A \cap B \cap C$ este:
A. $\varnothing$; **B.** $\{2, 3\}$; **C.** $\{2, 4\}$; **D.** $\{3\}$.

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

1.3 Divizibilitate în mulțimea numerelor naturale

L1 Recapitulare și completări

Ne amintim

Numărul natural a se divide la numărul natural b sau este divizibil cu numărul natural b, dacă există un număr natural c astfel încât $a = b \cdot c$. Scriem $a \vdots b$ sau $b \mid a$.	Exemplu	Cum scriem	Cum citim
	$6 = 3 \cdot 2$;	$6 \vdots 2$ sau $6 \vdots 3$ sau $2 \mid 6$ sau $3 \mid 6$.	6 se divide la 2; 6 este divizibil cu 2; 6 se divide la 3; 6 este divizibil cu 3; 2 îl divide pe 6; 3 îl divide pe 6.

Observații.
1. $0 \vdots b$, oricare ar fi numărul natural b. $(0 = b \cdot 0)$
2. $a \vdots 1$ și $a \vdots a$ oricare ar fi numărul natural a. $(a = 1 \cdot a)$
3. Dacă $a \neq 0$, atunci $a \not\vdots 0$ (0 nu este divizor al niciunui număr natural nenul).
4. Comentariu metodic.
Pentru a nu se crea confuzii, în clasa a VI-a, vom considera divizori doar numere naturale nenule.

Numărul a din relația $a \vdots b$ se numește *multiplu* al numărului b, iar b se numește *divizor* al numărului a.

Numărul 6 este multiplu al lui 2 și al lui 3. Numerele 2 și 3 sunt divizori ai lui 6.

Dacă $a \geq 2$, atunci a are cel puțin doi divizori: numărul 1 și numărul a, care se numesc *divizori improprii* ai lui a.
Dacă a mai are și alți divizori, aceștia se vor numi *divizori proprii* ai lui a.

Pentru numărul 6:
1 și 6 sunt *divizori improprii*;
2 și 3 sunt *divizori proprii*.

Un număr natural $p \geq 2$ care are exact doi divizori (1 și p) se numește *număr prim*.
Orice număr natural $n \geq 2$ care nu este număr prim, se numește număr *compus*.

Observații.
1. *Singurul număr par* care este număr *prim* este numărul 2.
2. Numerele 0 și 1 *nu sunt nici numere prime și nici numere compuse*.
3. Dacă p este număr prim, atunci p nu este pătrat perfect.
4. Numerele prime au doar divizori improprii.
5. Numerele compuse au cel puțin un divizor propriu.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

1. Notăm cu D_n mulțimea divizorilor numărului natural n și cu M_n mulțimea multiplilor numărului natural n.
Pentru numerele 7, 12, 15, scrieți mulțimea D_n, apoi scrieți mulțimea M_n, evidențiind cele mai mici patru elemente ale acesteia.

$D_7 = \{1, 7\}$;
$D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$;
$D_{15} = \{1, 3, 5, 15\}$.

$M_7 = \{0, 7, 14, 21, \ldots\}$;
$M_{12} = \{0, 12, 24, 36, \ldots\}$;
$M_{15} = \{0, 15, 30, 45, \ldots\}$.

Observații. Mulțimea D_n este mulțime finită, oricare ar fi numărul natural nenul n.
Mulțimea M_n este mulțime infinită, oricare ar fi numărul natural nenul n.

2. Considerăm mulțimea $A = \{16, 19, 26, 29, 36, 39, 46, 49, 56, 59, 66, 69, 76, 79, 86, 89, 96, 99\}$.

	Soluție.
a) Scrieți submulțimea $B \subset A$, ale cărei elemente sunt numere naturale divizibile cu 2.	**a)** Numerele naturale divizibile cu 2 formează mulțimea multiplilor lui 2, notată M_2. $B = A \cap M_2 = \{16, 26, 36, 46, 56, 66, 76, 86, 96\}$.
b) Scrieți submulțimea $C \subset A$, ale cărei elemente sunt numere naturale divizibile cu 3.	**b)** Numerele naturale divizibile cu 3 formează mulțimea multiplilor lui 3, notată M_3. $C = A \cap M_3 = \{36, 39, 66, 69, 96, 99\}$.
c) Folosind rezultatele de la subpunctele a) și b), scrieți submulțimea $D \subset A$, ale cărei elemente sunt numere naturale divizibile cu 6.	**c)** Un număr natural se divide la 6, doar dacă se divide și la 2 și la 3, adică $M_6 = M_2 \cap M_3$. Prin urmare, $D = B \cap C = \{36, 66, 96\}$.
d) Folosind rezultatele de la subpunctele a) și b), scrieți submulțimea E, ale cărei elemente sunt numere naturale divizibile cu cel puțin unul din numerele 2 sau 3.	**d)** Un număr natural se divide la cel puțin unul dintre numerele 2 și 3, doar dacă acesta aparține reuniunii $M_2 \cup M_3$. Atunci, $E = A \cap (M_2 \cup M_3)$ sau $E = B \cup C = \{16, 26, 36, 39, 46, 56, 66, 69, 76, 86, 96\}$.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Proprietatea	*Exprimarea în limbaj de mulțimi*
1. Dacă numărul natural $p \geq 2$ este *număr prim*, atunci acesta are doar divizori improprii. Dacă numărul natural $p \geq 2$ are numai divizori improprii, atunci p este număr prim.	**1.** Dacă $p \geq 2$ este *număr prim*, atunci $D_p = \{1, p\}$. Dacă $p \geq 2$ și $D_p = \{1, p\}$, atunci p este *număr prim*.
Exemplu: $p = 11$ este număr prim și $D_p = D_{11} = \{1, 11\}$.	
2. Toate numerele pare, diferite de 2, se divid la 2, deci au cel puțin un divizor propriu.	**2.** Oricare ar fi $k \geq 2$, $\{1, 2, 2k\} \subset D_{2k}$.
Exemplu: $62 = 2 \cdot 31$, este număr par și $D_{62} = \{1, 2, 31, 62\}$, deci $\{1, 2, 62\} \subset D_{62}$.	
3. Orice pătrat perfect, diferit de 0 și de 1 are cel puțin 3 divizori.	**3.** Dacă $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, atunci $\{1, p, p^2\} \subset D_{p^2}$.
Exemplu: $16 = 4^2$ și $D_{16} = \{1, 2, 4, 8, 16\}$, deci $\{1, 4, 4^2\} \subset D_{16}$.	
4. Dacă un număr natural este divizibil la două numere prime, atunci acesta este divizibil și la produsul lor. Dacă un număr natural este divizibil la produsul a două numere prime, atunci acesta este divizibil la fiecare dintre ele.	**4.** Dacă p și q sunt numere prime, atunci $M_p \cap M_q \subset M_{pq}$ și $M_{pq} \subset M_p \cap M_q$. Rezultă $M_p \cap M_q = M_{pq}$.
Exemplu: Dacă $a \vdots 2$ și $a \vdots 3$, atunci $a \vdots 6$, adică $a \vdots (2 \cdot 3)$, deci $M_2 \cap M_3 \subset M_6$. Pe de altă parte, dacă $a \vdots 6$, atunci $a \vdots 3$ și $a \vdots 2$, deci $M_6 \subset M_2 \cap M_3$. Prin urmare, $M_2 \cap M_3 = M_6$.	
5. Dacă p este număr prim, $p \mid a$ și a este pătrat perfect, atunci $p^2 \mid a$.	**5.** Dacă p este număr prim, $p \in D_a$ și a este pătrat perfect, atunci $p^2 \in D_a$.
Exemplu: $5 \mid 100$ și 100 este pătrat perfect. $5^2 = 25$ și $25 \mid 100$.	
6. Dacă a este număr natural, iar p este număr prim astfel încât $p \mid a$ și $p^2 \nmid a$ atunci a nu este pătrat perfect.	**6.** Dacă $a \in \mathbb{N}$, p este număr prim astfel încât $p \in D_a$ și $p^2 \nmid a$, atunci a nu este pătrat perfect.
Exemplu: Pentru $a = 300$ și $p = 3$, avem $3 \mid 300$, $3^2 \nmid 300$, deci 300 nu este pătrat perfect, fapt confirmat și de relația $17^2 < 300 < 18^2$.	

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Demonstrați că:

a) Numărul 168 *este divizibil* cu 7.
b) Numărul 92 *nu este divizibil* cu 8.
c) Numărul 6 *divide* numărul 132.
d) Numărul 12 *nu divide* numărul 146.
e) 76 *este multiplu* al numărului 19.
f) 30 *este divizor* al numărului 210.

2. Copiați pe caiete și completați în fiecare casetă liberă unul dintre simbolurile „$\vdots$“, „$\not\vdots$“, „$\mid$“, „$\nmid$“, astfel încât să obțineți enunțuri adevărate:

a) $40 \ \square \ 2$; **e)** $9 \ \square \ 567$;
b) $162 \ \square \ 3$; **f)** $10^3 \ \square \ 700$;
c) $94 \ \square \ 5$; **g)** $2 \ \square \ \overline{1ab8}$;
d) $1001 \ \square \ 10$; **h)** $5 \ \square \ 15^2$.

3. Fie mulțimea $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Scrieți mulțimile formate cu:

a) elementele mulțimii M, care sunt divizori ai numărului 10.
b) elementele mulțimii M, care sunt multipli ai numărului 2.
c) elementele mulțimii M, care nu sunt multipli ai numărului 3.

4. Determinați numărul natural n în fiecare dintre situațiile:

a) n este divizor propriu al numărului 34;
b) $n + 5$ este multiplu al lui 10 și $n < 20$;
c) $n^2 + 1$ este divizor impropriu al numărului 82.

5. Precizați, justificând răspunsul:

a) dacă se pot împărți, în mod egal, 59 de portocale la trei copii;
b) la câți copii se pot împărți, în mod egal, 58 de portocale.

6. Fie mulțimea
$M = \{2, 4, 5, 9, 13, 20, 29, 35, 49, 77, 97\}$.

a) Scrieți, prin enumerarea elementelor, mulțimea P a numerelor prime care aparțin mulțimii M.
b) Scrieți, prin enumerarea elementelor, mulțimea C a numerelor compuse, care aparțin mulțimii M.

7. a) Determinați două numere prime a căror sumă este 91.
b) Determinați două numere prime a căror sumă este 42. Analizați toate cazurile posibile.

8. Notăm cu P mulțimea numerelor naturale prime și cu M_2 mulțimea numerelor naturale pare. Determinați mulțimea $P \cap M_2$.

9. Demonstrați că numărul $a = 2^3 \cdot 5^4 + 1$ este număr compus.

10. Determinați toate numerele prime care sunt divizori ai numărului $b = 7 + 7^2 + 7^3$.

Minitest

20 p **1.** Mulțimea divizorilor numărului 18 este:
A. $\{2, 3, 4, 6, 9, 18\}$; **B.** $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$; **C.** $\{1, 3, 6, 9, 18\}$; **D.** $\{1, 2, 6, 9, 18\}$.

20 p **2.** Numărul natural 3^3 are:
A. 2 divizori; **B.** 3 divizori; **C.** 4 divizori; **D.** 5 divizori.

20 p **3.** Mulțimea multiplilor de două cifre a numărului 18 este:
A. $\{18, 36, 54, 72\}$; **B.** $\{18, 32, 54, 76, 90\}$; **C.** $\{0, 18, 36, 54, 90\}$; **D.** $\{18, 36, 54, 72, 90\}$.

30 p **4.** Numărul multiplilor mai mici decât 100 ai numărului 12 este:
A. 7; **B.** 8; **C.** 9; **D.** 10.

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

L2 Descompunerea numerelor naturale în produs de numere prime

Ne amintim

Orice număr natural $n \geq 2$ se poate scrie ca *putere a unui număr prim* sau ca *produs de puteri cu bazele numere prime diferite*.

Scrierea descrisă mai sus se numește *descompunerea în factori primi a numărului n*.

$2 = 2^1$; $3 = 3^1$; $5 = 5^1$; $7 = 7^1$;
$10 = 2^1 \cdot 5^1$; $100 = 2^2 \cdot 5^2$; $1000 = 2^3 \cdot 5^3$;
$12 = 2^2 \cdot 3^1$; $16 = 2^4$; $15 = 3^1 \cdot 5^1$;
$40 = 2^3 \cdot 5^1$; $75 = 3^1 \cdot 5^2$.

Observație. *Descompunerea în factori primi* a unui număr natural este *unică*, făcând abstracție de *ordinea factorilor*.

$40 = 2^3 \cdot 5^1 = 5^1 \cdot 2^3$;
$1000 = 2^3 \cdot 5^3 = 5^3 \cdot 2^3$.

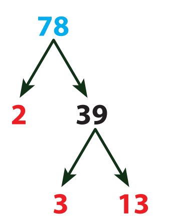
Descoperim, înțelegem, exemplificăm

În practică, este avantajos să folosim *algoritmul de descompunere în factori primi*. Acesta constă în *parcurgerea etapelor* formulate mai jos pentru numărul 98.

Algoritm Succesiunea etapelor parcurse		Divizori primi	Interpretare prin înmulțire	Interpretare prin împărțire
Pasul 1. Se identifică un divizor prim al numărului dat	***Pasul 1′.*** Se calculează câtul împărțirii numărului la divizorul identificat.	$2 \mid 98$	**98** = **2** · 49	**98** : **2** = 49
Pasul 2. Se identifică un divizor prim al câtului obținut la pasul 1′.	***Pasul 2′.*** Se calculează câtul împărțirii câtului de la *pasul 1′* la noul divizor identificat.	$7 \mid 49$	**49** = **7** · 7	**49** : **7** = 7
Pasul 3. Se identifică un divizor prim al câtului obținut la pasul 2′.	***Pasul 3′.*** Se calculează câtul împărțirii câtului de la *pasul 2′* la noul divizor identificat.	$7 \mid 7$	**7** = **7** · 1	**7** : **7** = 1
Pasul 4, … . Se continuă procedeul până când se obține câtul 1, apoi se scrie numărul ca produs de puteri de factori primi.		$\mathbf{98} = \mathbf{2} \cdot \mathbf{7}^2$		

Algoritmul descris se folosește sub forma uneia din schemele prezentate mai jos.

Exemplu: Descompuneți în factori numerele 78 și 210.

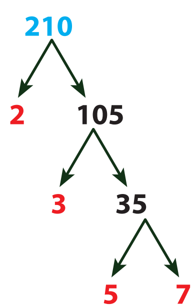


78 = **2** · **3** · **13**

78	2
39	3
13	13
1	

78 = **2** · 39;
39 = **3** · 13;
13 = **13** · 1

Concluzie.
78 = **2** · **3** · **13**.



210	2
105	3
35	5
7	7
1	

210	2 · 5
21	3
7	7
1	

210 = **2** · **3** · **5** · **7**

210 = **2** · 105;
105 = **3** · 35;
35 = **5** · 7;
7 = **7** · 1, sau
210 = **2** · **5** · 21;
21 = **3** · 7;
7 = **7** · 1.
210 = **2** · **3** · **5** · **7**.

Observație. Dacă numărul care urmează a fi descompus se divide la o putere a lui 10, atunci se recomandă folosirea proprietății $10^n = 2^n \cdot 5^n$, obținând în acest fel doi dintre factorii descompunerii.

$700 = 7 \cdot 100 =$
$= 7 \cdot (2^2 \cdot 5^2) =$
$= 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicația 1. Determinați suma $a + b$, știind că a și b sunt numere naturale, a este număr prim și $a \cdot b = 52$.
Soluție. Din $52 = 2^2 \cdot 13$, folosind faptul că a este număr prim, rezultă că sunt posibile situațiile:
a) $a = 2$ și $b = 26$, deci $a + b = 28$; b) $a = 13$ și $b = 4$, deci $a + b = 17$.
În concluzie, $a + b = 28$ sau $a + b = 17$.

Observații

1. Dacă numărul natural a este pătrat perfect, atunci, în descompunerea sa în factori primi, toți exponenții sunt numere pare.

1. Dacă $a = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^{2-n}$ este pătrat perfect, atunci $2 - n$ este număr natural par, adică $n \in \{0, 2\}$.

2. Dacă în descompunerea în factori primi a unui număr natural toți exponenții sunt numere pare, atunci acesta este pătrat perfect.

2. Exponenții tuturor factorilor primi ai descompunerii numărului $b = 2^{202} \cdot 3^{404} \cdot 5^4 \cdot 17^{20}$ sunt numere pare, deci b este pătrat perfect.

3. Dacă în descompunerea în factori primi a numărului natural a există cel puțin un factor al cărui exponent este impar, atunci a nu este pătrat perfect.

3. Numărul $3^{2022} \cdot 11^{4044} \cdot 5^4 \cdot 17^3$ nu este pătrat perfect pentru că, în descompunerea sa în factori primi, apare factorul 17^3, al cărui exponent este impar.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Copiați pe caiete și completați tabelul următor, după modelul prezentat pentru numerele 30 respectiv 36.

Numărul	Descompunerea în factori primi	Numărul	Descompunerea în factori primi
30	$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$	36	$36 = 2^2 \cdot 3^2$
42		56	
70		126	
210		168	

2. Scrieți ca produs de numere prime 15, 21, 22, 39, 51, 65.

3. Descompuneți în factori primi numerele naturale: 4, 6, 7, 10, 15, 20, 24, 45, 54, 63, 72, 88, 125, 169, 240, 576, 605, 1000, 10^5, 10^n, $n \in \mathbb{N}$.

4. Determinați:
a) cel mai mic număr natural, care poate fi scris ca produs de doi factori primi diferiți;
b) cel mai mic număr natural, care poate fi scris ca produs de trei factori primi diferiți.

5. Scrieți ca produs de puteri de factori primi numerele:
a) 125, 169, 240, 576, 605, 1000, 10^5, 10^n, $n \in \mathbb{N}$;
b) 25^2, $4^2 \cdot 9^4$, 28^3, $(8 \cdot 15)^5$.

6. **a)** Determinați diferența $b - a$, știind că $a^2 \cdot b = 28$, $a, b \in \mathbb{N}$.
b) Determinați suma $a + b + c$, știind că $a^2 \cdot b \cdot c = 225$ și că $a > b \geq c > 1$, $a, b, c \in \mathbb{N}$.

7. **a)** Descompuneți în factori primi numărul $A = 54 \cdot p$, știind că p este număr prim și $p > 3$.
b) Descompuneți în factori primi numărul $A = 54 \cdot p$, pentru fiecare din valorile $p \in \{2, 3\}$.

8. Determinați numerele prime a, b și c, știind că $a \cdot b + a \cdot c = 25$.

Minitest

Alegeți litera care indică varianta corectă. Doar un răspuns este corect.

15 p **1.** Mulțimea $A = \{2, 23, 2^3 + 3, 3^2 + 2 \cdot 3, 123\}$ conține n numere prime. Numărul n este:
A. 2; **B.** 3; **C.** 1; **D.** 4.

15 p **2.** Descompunerea în factori primi a numărului 42 este:
A. $2 \cdot 21$; **B.** $3 \cdot 14$; **C.** $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$; **D.** $2 \cdot 3 \cdot 7$.

20 p **3.** Scrierea $2 \cdot 3^3 \cdot 7$ este descompunerea în factori a numărului:
A. 378; **B.** 576; **C.** 376; **D.** 678.

20 p **4.** Dacă x și $x + 11$ sunt numere prime, atunci x este egal cu:
A. 2; **B.** 0; **C.** 6; **D.** 11.

20 p **5.** Cel mai mare număr de forma $\overline{aa}$ care are patru divizori este:
A. 99; **B.** 88; **C.** 77; **D.** 66.

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

L3 Determinarea celui mai mare divizor comun. Numere prime între ele

Ne amintim

Dacă numerele naturale a, b și d verifică relațiile $d \mid a$ și $d \mid b$, atunci numărul d este *divizor comun* al numerelor a și b.

Interpretare, în limbajul mulțimilor

Mulțimea divizorilor comuni ai numerelor naturale a și b este intersecția $D_a \cap D_b$.

Exemplu: Numărul 7 este divizor comun al numerelor naturale 14 și 28 pentru că $7 \mid 14$ și $7 \mid 21$.

Mulțimea divizorilor comuni ai numerelor 14 și 28 este $D_{14} \cap D_{21} = \{1, 2, 7, 14\} \cap \{1, 3, 7, 21\} = \{1, 7\}$.

Observație.

1. Numărul 1 este *divizor comun* al tuturor numerelor naturale. Scriem $1 \mid n$ sau $1 \in D_n$ oricare ar fi numărul natural n.

2. Dacă d este *divizor comun* al numerelor naturale nenule a și b, atunci $d \le a$ și $d \le b$.

Justificare

Orice număr natural n se scrie $n = 1 \cdot n$, deci $1 \mid n$.

Din $d \mid a$, rezultă $a = d \cdot x$, cu $x \ge 1$, deci $d \le a$.
Din $d \mid b$, rezultă $b = d \cdot y$, cu $y \ge 1$, deci $d \le b$.

Numărul natural d care este divizor comun al numerelor a și b și care este multiplu al tuturor celorlalți divizori comuni ai numerelor a și b se numește *cel mai mare divizor comun* al lor.

Considerăm a și b numere naturale, *cel puțin unul nenul*.

Cel mai mare divizor comun al numerelor a și b este cel mai mare număr natural nenul d, cu proprietatea că d este divizor comun al numerelor a și b. Scriem: c.m.m.d.c.$(a, b) = d$ sau $(a, b) = d$.	*Exemplu:* Divizorii comuni ai numerelor 8 și 12 sunt 1, 2, 4, iar $1 < 2 < 4$, deci *cel mai mare divizor comun* al numerelor 8 și 12 este 4. Scriem: c.m.m.d.c. $(8, 12) = 4$ sau $(8, 12) = 4$.
Observație. Cel mai mare divizor comun al *mai multor numere* naturale este cel mai mare număr natural care este divizor comun al tuturor acestor numere.	*Exemplu: Cel mai mare divizor comun* al numerelor 6, 12 și 51 este 3 pentru că divizorii comuni ai numerelor 6, 12, 51 sunt 1 și 3, cel mai mare fiind 3. Scriem $(6, 12, 51) = 3$.
Dacă cel mai mare divizor comun al numerelor naturale nenule a și b este 1, atunci numerele a și b se numesc numere *prime între ele*.	*Exemple:* $(1, 7) = 1$; $(8, 1) = 1$; $(2, 7) = 1$; $(2, 3) = 1$; $(7, 11) = 1$; $(3, 16) = 1$; $(6, 35) = 1$; $(21, 10) = 1$.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Rezultate imediate, utile în rezolvarea problemelor	*Cum scriem în redactarea rezolvării*	*Exemple*
Dacă n este număr natural nenul, atunci cel mai mare divizor comun al numerelor 0 și n este chiar numărul n.	c.m.m.d.c. $(0, n) = n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. $(0, n) = n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.	$(0, 1) = 1$; $(0, 2) = 2$; $(7, 0) = 7$; $(0, 3) = 3$; $(0, 4) = 4$; $(9, 0) = 9$; $(0, 5) = 5$; $(0, 6) = 6$; $(0, 12) = 12$;
Dacă a și b sunt numere naturale nenule și $a \mid b$, atunci cel mai mare divizor comun al numerelor a și b este numărul a.	Din $a \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{N}^*$ și $a \mid b$, rezultă $(a, b) = a$.	$(2, 4) = 2$; $(3, 9) = 3$; $(6, 12) = 6$; $(9, 27) = 9$; $(5, 10) = 5$; $(8, 4) = 4$; $(6, 2) = 2$; $(3, 1) = 1$; $(6, 3) = 3$.
Dacă n este număr natural nenul, atunci cel mai mare divizor comun al numerelor 1 și n este 1.	$(1, n) = 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.	$(1, 2) = 1$; $(1, 3) = 1$; $(1, 6) = 1$; $(1, 5) = 1$; $(1, 9) = 1$; $(1, 8) = 1$; $(10, 1) = 1$; $(11, 1) = 1$; $(12, 1) = 1$.
Orice două numere prime diferite sunt prime între ele.	Din p_1 și p_2 numere prime și $p_1 \neq p_2$, rezultă $(p_1, p_2) = 1$.	$(2, 3) = 1$; $(2, 5) = 1$; $(2, 7) = 1$; $(3, 7) = 1$; $(5, 11) = 1$; $(7, 13) = 1$.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Activitate în perechi

Se grupează elevii clasei în perechi. Un membru al perechii realizează sarcina S1, iar celălalt membru realizează sarcina S2. Ultima parte a activității este comună.

S1: Parcurgeți pașii P2, P3, P4, apoi parcurgeți, împreună cu colegul de echipă, pasul P4′.

S2: Parcurgeți pașii P1, P3′, apoi parcurgeți, împreună cu colegul de echipă, pasul P4′.

Pasul 1. Descompuneți numerele 84 și 90 în factori primi.	***Pasul 1.*** $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$; $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$.
Pasul 2. Scrieți mulțimea divizorilor fiecăruia din numerele 84 și 90.	***Pasul 2.*** $D_{84} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, 7, 4, \mathbf{6}, 12, 14, 21, 28, 42, 84\}$; $D_{90} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, 5, \mathbf{6}, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90\}$.
Pasul 3. Scrieți mulțimea divizorilor comuni ai numerelor 84 și 90.	***Pasul 3.*** $D_{84} \cap D_{90} = \{1, 2, 3, 6\}$.
Pasul 4. Identificați, justificat, cel mai mare divizor comun al numerelor 84 și 90.	***Pasul 4.*** $1 < 2 < 3 < 6$, $(84, 90) = \mathbf{6}$.
Pasul 3′. Scrieți produsul factorilor primi comuni, cu exponentul cel mai mic, care apar în descompunerile de la pasul 1 și calculați produsul acestora.	***Pasul 3′.*** $84 = \mathbf{2^2} \cdot 3^1 \cdot 7^1$; $90 = \mathbf{2^1} \cdot 3^2 \cdot 5^1$. Calculăm produsul $\mathbf{2^1} \cdot 3^1 = \mathbf{6}$.
Pasul 4′. Comparați rezultatul obținut la pasul 3′ cu cel obținut la pasul 4. Stabiliți relația intre *cel mai mare divizor comun* și *produsul puterilor cu exponentul cel mai mic, ale numerelor prime comune* care apar în descompuneri.	*P2 → P3 → P4* și respectiv *P1 → P3′* conduc la același rezultat: $(84, 90) = 6$ sau $(84, 90) = (2^2 \cdot 3^1 \cdot 7^1, 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1) = 2^1 \cdot 3^1 = 6$.

Reținem!

Determinarea c.m.m.d.c. al mai multor numere naturale nenule, *folosind descompunerea* acestora *în factori primi*, se realizează astfel:

1. se descompun numerele în produs de puteri de numere prime diferite;

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1$$
$$168 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 7^1$$

2. c.m.m.d.c. al numerelor date este produsul factorilor primi comuni, scriși o singură dată, cu cel mai mic exponent la care factorul corespunzător apare în descompunerile numerelor.

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1$$
$$168 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 7^1$$
$$(180, 168) = 2^2 \cdot 3^1 = 12$$

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Copiați pe caiete și completați tabelul următor, după model, știind că D_x reprezintă mulțimea divizorilor numărului natural x, D_y reprezintă mulțimea divizorilor numărului natural y, iar (x, y) reprezintă *cel mai mare divizor comun* al numerelor x și y.

x	y	D_x	D_y	$D_x \cap D_y$	(x, y)
10	15	$D_{10} = \{1, 2, 5, 10\}$	$D_{15} = \{1, 3, 5, 15\}$	$D_{10} \cap D_{15} = \{1, 5\}$	$(10, 15) = 5$
30	54				
100	75				

2. Scrieți mulțimile divizorilor numerelor x și y, mulțimea divizorilor comuni ai acestora și identificați, în fiecare caz, cel mai mare divizor comun al lor.

a) $x = 16$; $y = 24$; **b)** $x = 28$; $y = 42$.

3. Pentru fiecare pereche de numere aflați c.m.m.d.c.:

a) 6 și 8; **b)** 12 și 16; **c)** 15 și 20; **d)** 12 și 17; **e)** 24 și 30; **f)** 25 și 35.

4. Folosind descompunerea numerelor în factori primi, determinați c.m.m.d.c. al următoarelor perechi de numere:

a) 36 și 48; **b)** 27 și 63; **c)** 105 și 45; **d)** 66 și 110; **e)** 27 și 135; **f)** $2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4$ și 512.

5. Determinați c.m.m.d.c. al următoarelor grupuri de numere:

a) 24, 36 și 60; **b)** 28, 35 și 210.

6. Scrieți câte o pereche de numere naturale pentru care cel mai mare divizor comun al lor este:

a) 6; **b)** 9; **c)** 10; **d)** 100.

7. Precizați, justificând răspunsul dat, dacă următoarele perechi de numere sunt prime între ele:

a) 4 și 15; **b)** 8 și 9; **c)** 12 și 16; **d)** 21 și 40; **e)** 45 și 56. **f)** 5 și 53.

8. Determinați numărul $\overline{ab}$, știind că este divizor comun al numerelor 54 și 81.

9. Determinați numărul numerelor naturale mai mici decât 100, care sunt prime cu 100.

10. Împărțind numerele 125 și 189 la același număr natural, se obțin resturile 5, respectiv 9. Determinați împărțitorul, știind că este cel mai mare posibil.

Minitest

1. Alegeți varianta corectă de răspuns. Doar un răspuns este corect.

20 p **a)** Un divizor comun al numerelor 18 și 27 este:

A. 2; **B.** 3; **C.** 6; **D.** 12.

20 p **b)** Cel mai mare divizor comun al numerelor 18 și 27 este:

A. 3; **B.** 6; **C.** 9; **D.** 18.

20 p 2. Scrieți divizorii comuni ai numerelor:

a) 28 și 35; **b)** 75 și 100; **c)** 36 și 49; **d)** 20, 30 și 40.

15 p 3. Determinați numărul prim $\overline{cd}$, știind că este divizor comun al numerelor 460 și 138.

15 p 4. Determinați numerele naturale a și b, știind că $a + b = 63$ și $(a, b) = 7$.

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

L4 Determinarea celui mai mic multiplu comun

Ne amintim

Dacă numerele naturale m, a și b verifică relațiile $m \,\vdots\, a$ și $m \,\vdots\, b$, atunci numărul m este *multiplu comun* al numerelor a și b.

Interpretare, în limbajul mulțimilor

Mulțimea multiplilor comuni ai numerelor naturale a și b este intersecția $M_a \cap M_b$.

Exemplu: Numărul 24 este multiplu comun al numerelor naturale 8 și 6 pentru că $24 \,\vdots\, 8$ și $24 \,\vdots\, 6$.
Mulțimea multiplilor comuni ai numerelor 6 și 8 este
$M_6 \cap M_8 = \{\mathbf{0}, 6, 12, 18, \mathbf{24}, \ldots\} \cap \{\mathbf{0}, 8, 16, \mathbf{24}, \ldots\} = \{0, 24, 48, \ldots\}$.

Observație. Numărul 0 este *multiplu comun* al tuturor numerelor naturale. Scriem $0 \,\vdots\, n$ sau $0 \in M_n$, oricare ar fi numărul natural n.

Numărul natural m care este multiplu comun al numerelor a și b și care este divizor al tuturor celorlalți multipli comuni ai numerelor a și b se numește *cel mai mic multiplu comun* al lor.

Ca și la c.m.m.d.c., în practică vom folosi reformulări sau adaptări ale enunțului de mai sus.

Cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale *nenule* a și b este cel mai mic număr natural nenul m cu proprietatea că m este multiplu comun al numerelor a și b.
Scriem: c.m.m.m.c.$[a, b] = m$ sau $[a, b] = m$.

Observație. *Cel mai mic multiplu comun* al *mai multor numere* este cel mai mic număr natural nenul care este multiplu comun al tuturor acestor numere.

Exemplu: Multiplii comuni nenuli ai numerelor 4 și 14 sunt: **28**, 56, 84, 112, …, cel mai mic fiind **28**.
În concluzie, *cel mai mic multiplu comun* al numerelor 4 și 14 este 28.
Scriem: c.m.m.m.c. $[4, 14] = 28$ sau $[4, 14] = 28$.

Exemplu: *Cel mai mic multiplu comun* al numerelor 15, 9 și 10 este 90, pentru că:
$M_{15} = \{0, 15, 30, 45, 60, \mathbf{90}, \ldots\}$
$M_9 = \{0, 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, \mathbf{90}, \ldots\}$
$M_{10} = \{0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, \mathbf{90}, \ldots\}$
$M_{15} \cap M_9 \cap M_{90} = \{0, \mathbf{90}, 180, \ldots\}$
Cel mai mic dintre multiplii comuni nenuli ai numerelor 15, 9, 10 este 90, deci $[15, 9, 10] = 90$.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Rezultate imediate, utile în rezolvarea problemelor	*Cum scriem în redactarea rezolvării*	*Exemple*
Dacă n este număr natural, atunci cel mai mic multiplu comun al numerelor 0 și n este chiar numărul 0.	c.m.m.m.c. $[0, n] = 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ $[0, n] = 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$	$[0, 1] = 0$; $[0, 2] = 0$; $[7, 0] = 0$ $[0, 3] = 0$; $[0, 4] = 0$; $[9, 0] = 0$
Dacă a și b sun numere naturale *nenule* și $a \mid b$, atunci cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b este numărul b.	Din $a \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{N}^*$ și $a \mid b$, rezultă $[a, b] = b$	$[2, 4] = 4$; $[3, 9] = 9$; $[6, 12] = 12$ $[9, 27] = 27$; $[5, 10] = 10$; $[8, 4] = 8$ $[6, 2] = 6$; $[3, 1] = 3$; $[6, 3] = 6$
Dacă n este număr natural nenul, atunci cel mai mic multiplu comun al numerelor 1 și n este n.	$[1, n] = n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$	$[1, 2] = 2$; $[1, 3] = 3$; $[1, 6] = 6$ $[1, 5] = 5$; $[1, 9] = 9$; $[1, 8] = 8$ $[10, 1] = 10$; $[11, 1] = 11$
Din p_1 și p_2 sunt numere prime între ele, atunci cel mai mic multiplu comun al lor este produsul acestora.	Din p_1 și p_2 numere naturale cu $(p_1, p_2) = 1$, rezultă $[p_1, p_2] = p_1 \cdot p_2$	$[2, 3] = 6$; $[2, 5] = 10$ $[2, 7] = 14$; $[3, 7] = 21$ $[5, 12] = 60$; $[7, 8] = 56$

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Consultați manualul digital pentru a descoperi, printr-o activitate practică în perechi, algoritmul de determinare a c.m.m.m.c.

Reținem!

Determinarea c.m.m.m.c. al mai multor numere naturale nenule, *folosind decompunerea* acestora *în factori primi*, se realizează astfel:

1. Se descompun numerele în produs de puteri de numere prime diferite;

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1$$
$$168 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 7^1$$

2. c.m.m.m.c. al numerelor date este produsul factorilor primi comuni și necomuni, scriși o singură dată, cu cel mai mare exponent la care factorul corespunzător apare în descompunerile numerelor.

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1$$
$$168 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 7^1$$
$$[180, 168] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 2520$$

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Copiați pe caiete și completați tabelul următor, știind că M_x reprezintă mulțimea multipilor numărului natural x, că M_y reprezintă mulțimea multiplilor numărului natural y, iar $[x, y]$ reprezintă *cel mai mic multiplu comun* al numerelor x și y. Pentru mulțimile M_x, M_y și $M_x \cap M_y$, scrieți explicit primele patru elemente, după model.

x	y	M_x	M_y	$M_x \cap M_y$	$[x, y]$
10	15	$M_{10} = \{0, 10, 20, 30, \ldots\}$	$M_{15} = \{0, 15, 30, 45, \ldots\}$	$M_{10} \cap M_{15} = \{0, 30, 60, 90, \ldots\}$	$[10, 15] = 30$
36	54				
100	75				

2. Determinați cel mai mic multiplu comun al numerelor, pentru fiecare dintre perechile următoare.
a) 2 și 3; **c)** 10 și 15; **e)** 20 și 30;
b) 4 și 6; **d)** 9 și 12; **f)** 25 și 50.

3. Determinați un număr natural, știind că este mai mic decât 500, iar prin împărțirea sa la fiecare dintre numerele 12, 15, respectiv 18, se obține restul 0.

4. Folosind descompunerea în factori primi a numerelor, calculați cel mai mic multiplu comun pentru fiecare dintre următoarele perechi de numere:
a) 8 și 12; **d)** 16 și 36;
b) 18 și 24; **e)** 24 și 25;
c) 21 și 14; **f)** $3 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4$ și $2 \cdot 243$.

5. Pentru a transporta pietriș de la o carieră de piatră pe un șantier, se folosesc camioane. Acestea pot avea încărcătură maximă de 8 tone, de 9 tone sau de 12 tone. Cu oricare dintre cele trei tipuri de camioane se face transportul, la încărcătură maximă, pentru ultimul transport ar rămâne aceeași cantitate de pietriș. Determinați cea mai mare cantitate de pietriș transportată, știind că aceasta se exprimă, în tone, printr-un număr natural de trei cifre.

6. Calculați cel mai mic multiplu comun al următoarelor grupuri de numere:
a) 4; 6 și 8; **b)** 20; 25 și 45.

7. Scrieți câte o pereche de numere naturale pentru care cel mai mic multiplu comun al lor este:
a) 10; **b)** 18; **c)** 47; **d)** 200.

8. Se consideră numerele naturale $x = 28$ și $y = 42$. Folosind notațiile uzuale pentru c.m.m.d.c. și pentru c.m.m.m.c.:
a) calculați $(x, y) + [x, y]$.
b) verificați dacă afirmația „$x \cdot y = (x, y) \cdot [x, y]$" este adevărată pentru orice două numere naturale x și y.

9. Determinați cel mai mic număr natural care împărțit la numărul 15 dă restul 13, împărțit la 12 dă restul 10 și împărțit la 9 dă restul 7.

10. Determinați numărul natural n pentru care $(n, 36) = 12$ și $[n, 36] = 252$.

11. Determinați cel mai mic număr de sportivi din care, cuprinzând toți sportivii, se pot face echipe de câte 4 sportivi, sau de câte 6 sportivi sau de câte 9 sportivi.

12. Trei elevi aranjează cărțile în biblioteca cabinetului de matematică. Ei observă că dacă le aranjează câte 8 pe fiecare raft, sau câte 12 pe fiecare raft, sau câte 15 pe fiecare raft, rămân nearanjate, de fiecare dată, 7 cărți. Determinați cel mai mic număr posibil de cărți care ar putea fi în dotarea cabinetul de matematică.

13. Sorin reprezintă pe o semidreaptă, începând cu originea O a acesteia, puncte colorate cu albastru, la distanța 12 cm unul față de celălalt. Rareș reprezintă pe aceeași semidreaptă, începând cu originea O a acesteia, puncte colorate cu galben, la distanța 15 cm unul față de celălalt. Determinați distanța față de punctul O la care se află următorul punct colorat cu ambele culori.

Minitest

1. Alegeți litera care indică varianta corectă. Doar un răspuns este corect.

20 p **a)** Un multiplu comun al numerelor 12 și 18 este:
A. 18; **B.** 24; **C.** 72; **D.** 90.

20 p **b)** Cel mai mic multiplu comun al numerelor 12 și 18 este:
A. 72; **B.** 48; **C.** 1; **D.** 36.

20 p **2.** Scrieți câte trei multipli comuni ai numerelor:
a) 8 și 6; **b)** 15 și 20; **c)** 7 și 11; **d)** 12, 18 și 36.

15 p **3.** Determinați numărul natural $\overline{ab}$, știind că este multiplu comun al numerelor 12 și 15.

15 p **4.** Determinați două numere naturale c și d, știind că $c \cdot d = 864$ și $[c, d] = 72$.

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

L5 Proprietăți ale divizibilității în $\mathbb{N}$

Ne amintim

Numărul natural *a* se divide la numărul natural *b*, dacă există un număr natural *c* astfel încât $a = b \cdot c$.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Formularea proprietății	*Cum scriem matematic*	*Exemple*
Orice număr natural nenul *a* este divizibil cu el însuși.	$a \vdots a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{N}^*$.	$1 \vdots 1$; $2 \vdots 2$; $3 \vdots 3$; … .
Dacă *a* și *b* sunt numere naturale, *a* este divizibil cu *b* și *b* este divizibil cu *a*, atunci cele două numere coincid.	Dacă $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ astfel încât $a \vdots b$ și $b \vdots a$, atunci $a = b$.	Din $7 \vdots p$ și $p \vdots 7$, rezultă $p = 7$. Din $1 \vdots p$ și $p \in \mathbb{N}$, rezultă $p = 1$.
Dacă *a*, *b*, *c* sunt numere naturale, *a* este divizibil cu *b* și *b* este divizibil cu *c*, atunci *a* este divizibil cu *c*.	Dacă $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{N}$ astfel încât $a \vdots b$ și $b \vdots c$, atunci $a \vdots c$.	Din $p \vdots 6$ și $6 \vdots 3$, rezultă $p \vdots 3$. Din $p \vdots 6$ și $6 \vdots 2$, rezultă $p \vdots 2$.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Proprietățile specifice relației de divizibilitate, descrise în tabelul de mai sus, conduc și la alte rezultate, considerate proprietăți, cu ajutorul cărora înțelegem și rezolvăm cu mai multă ușurință probleme despre numere naturale.

1. Dacă numărul natural *d* este divizor comun al numerelor naturale *a* și *b*, $b \leq a$, atunci *d* este și divizor al numerelor $a + b$ și $a - b$.	Dacă $d \mid a$ și $d \mid b$, unde $a, b, d \in \mathbb{N}$, $b \leq a$, atunci $d \mid (a + b)$ și $d \mid (a - b)$.
a) Dacă numărul natural *d* divide suma numerelor naturale *a* și *b*, iar *d* este divizor al unuia dintre termenii sumei, atunci *d* este și divizor al celuilalt termen.	Dacă $d \mid (a + b)$ și $d \mid a$, unde $a, b, d \in \mathbb{N}$, atunci $d \mid b$. Dacă $d \mid (a + b)$ și $d \mid b$, unde $a, b, d \in \mathbb{N}$, atunci $d \mid a$.
b) Dacă numărul natural *d* divide diferența numerelor naturale *a* și *b*, iar *d* este divizor al unuia dintre termenii diferenței, atunci *d* este și divizor al celuilalt termen.	Dacă $d \mid (a - b)$ și $d \mid b$, unde $a, b, d \in \mathbb{N}$, $b \leq a$, atunci $d \mid a$. Dacă $d \mid (a - b)$ și $d \mid a$, unde $a, b, d \in \mathbb{N}$, $b \leq a$, atunci $d \mid b$.
2. a) Dacă numărul natural *a* este divizor al produsului $b \cdot c$, iar *a* și *b* sunt prime între ele, atunci *a* este divizor al numărului *c*.	Dacă $a, b, c \in \mathbb{N}$, $a \mid b \cdot c$ și $(a, b) = 1$, atunci $a \mid c$.
b) Probați printr-un exemplu validitatea afirmației de la subpunctul a).	$2 \mid 3 \cdot x$, $x \in \mathbb{N}$, $(2, 3) = 1$ rezultă $2 \mid x$.

Consultați manualul digital pentru a afla justificarea afirmațiilor de mai sus.

Probleme rezolvate

1. a) Calculați c.m.m.d.c. al numerelor 120 și 180.
b) Comparați numerele 3^{120} și 2^{180}, folosind rezultatul obținut la subpunctul a).

Soluție. **a)** $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$,
$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$
$(120, 180) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$
b) $3^{120} = (3^2)^{60} = 9^{60}$ și $2^{180} = (2^3)^{60} = 8^{60}$.
Cum $9 > 8$, obținem $9^{60} > 8^{60}$, adică $3^{120} > 2^{180}$.

2. a) Verificați egalitatea $m \cdot n = (m, n) \cdot [m, n]$ pentru $m = 28$ și $n = 21$.
b) Folosind afirmația $m \cdot n = (m, n) \cdot [m, n]$, oricare ar fi numerele naturale m și n, justificați enunțul următor: „Cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale m și n, prime între ele, este produsul acestora."

Soluție.
a) $(28, 21) = (2^2 \cdot 7, 3 \cdot 7) = 7$; $[28, 21] = 84$;
$\mathbf{(28, 21)} \cdot \mathbf{[28, 21]} = 7 \cdot 84 = 588 = \mathbf{28 \cdot 21}$.
b) Dacă m și n sunt prime între ele, atunci $(m, n) = 1$.
Cum $m \cdot n = (m, n) \cdot [m, n]$, rezultă $m \cdot n = 1 \cdot [m, n]$, adică $[m, n] = m \cdot n$.

Dacă $m, n \in \mathbb{N}$ și $(m, n) = 1$, atunci $[m, n] = m \cdot n$.

3. Determinați numerele naturale n, $4 \cdot n + 3$ și $5 \cdot n + 7$ știind că toate sunt numere prime.
Soluție. Dacă $5 \cdot n + 7$ este număr prim, atunci acesta este impar. Cum 7 este impar, rezultă $5 \cdot n$ este număr par, deci n este par. Singurul *număr prim par* este $n = 2$. Se obțin numerele prime: 2, 11, 17.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Un număr natural este divizibil cu 33. Determinați restul împărțirii acestui număr la 3.

2. Un autobuz are 36 de locuri.
a) Determinați cel mai mic număr de curse care trebuie făcute cu acest autobuz pentru a transporta 144 persoane, așa încât fiecare călător să ocupe un scaun.
b) Determinați cel mai mic număr de curse care trebuie făcute cu acest autobuz pentru a transporta 444 persoane, așa încât fiecare călător să ocupe un scaun.

3. Demonstrați că:
a) numărul $2 \cdot 123 + 2 \cdot 456$ este divizibil cu 2;
b) numărul $5 \cdot 13 + 15 \cdot 57 + 25 \cdot 99$ este multiplu a numărului 5;
c) numărul 4 divide numărul $4 \cdot 123 + 44 \cdot n$, oricare ar fi numărul natural n.

4. Determinați:
a) numerele naturale de forma $\overline{4x3y}$, divizibile cu 3 și cu 5.
b) numerele naturale de forma $\overline{1x2y3x}$, divizibile cu 4 și cu 9.

5. a) Demonstrați că numărul $A = \overline{12x} + \overline{3x4} + \overline{x56}$, scris în baza 10, este divizibil cu 3, oricare ar fi cifra x.
b) Determinați cea mai mare valoare a lui x pentru care A este divizibil cu 6.

6. Demonstrați că nu există niciun număr natural care împărțit la 4 dă restul 3 și împărțit la 6 dă restul 4.

7. Pentru elevii unei clase s-au cumpărat 127 de caiete și 110 creioane, acestea distribuindu-se în mod egal elevilor. Știind că în clasă sunt mai mult de 10 elevi și că, după distribuire, au mai rămas 2 creioane și un caiet, determinați numărul elevilor din clasă.

8. La școala în care învață Ioana sunt înscriși mai puțin de 200 de elevi și aceștia pot fi împărțiți în grupe de câte 18 elevi sau de câte 24 de elevi. Calculați numărul elevilor înscriși la această școală.

9. Determinați cel mai mic număr natural care, împărțit la 25, la 45 respectiv la 50, dă de fiecare dată restul 7.

10. Mulțimea $M = \{3, 4, 8, a, b, c\}$ are proprietatea că printre elementele sale se află atât c.m.m.d.c. cât și c.m.m.m.c. al oricăror două elemente din mulțime. Determinați elementele necunoscute ale mulțimii M.

11. Calculați c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. pentru numerele $a = 4^{25} + 128^7$ și $b = 9^{17} - 27^{11}$.

12. Determinați numerele prime a, b, c care verifică relația $2 \cdot a + 3 \cdot b + 4 \cdot c = 30$.

13. Un produs cosmetic este ambalat în cutiuțe în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 6 cm, 4 cm, respectiv 3 cm, care se pun într-o cutie în formă de cub. Determinați lungimea muchiei cubului, știind că interiorul cubului este complet ocupat și că numărul cutiuțelor este cel mult 50.

Minitest

Alegeți litera care indică varianta corectă. Doar un răspuns este corect.

30 p **1.** Descompunerea în factori a numărului 780 este:
A. $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$; **B.** $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$; **C.** $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$; **D.** $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13$.

30 p **2.** Calculând suma dintre c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. ai numerelor 280 și 392 se obține:
A. 2024; **B.** 2016; **C.** 2026; **D.** 2014.

30 p **3.** Fie P mulțimea numerelor prime și $A = \{7, 25, 47, 64, 91\}$. Calculați mulțimea $A \setminus P$.

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

EVALUARE SUMATIVĂ

I. *Alegeți varianta corectă de răspuns. Doar un răspuns este corect.*

5 p **1.** Dintre mulțimile următoare, este finită mulțimea:
A. $\{1, 10, 100, \ldots\}$; **B.** $\{2^0, 2^1, 2^2, \ldots\}$; **C.** D_{1000}; **D.** M_{100}.

5 p **2.** Cardinalul mulțimii numerelor naturale cuprinse între 5^2 și 2^5 este:
A. 7; **B.** 6; **C.** 8; **D.** 32.

5 p **3.** Numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $\{m, a, t, e\}$ este:
A. 6; **B.** 12; **C.** 8; **D.** 10.

5 p **4.** Suma divizorilor proprii ai numărului 15 este:
A. 24; **B.** 16; **C.** 13; **D.** 8.

5 p **5.** Cel mai mare număr de forma $\overline{1ab}$, divizibil cu 9, este:
A. 199; **B.** 189; **C.** 999; **D.** 198.

5 p **6.** Numărul termenilor divizibili cu 8 din șirul 4; 40; 44; 400; 404; 440; 444 este:
A. 6; **B.** 3; **C.** 4; **D.** 5.

II. *Scrieți rezolvările complete.*

1. Fie mulțimile $A = \{1, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ și C egală cu mulțimea cifrelor divizibile cu 3.

5 p **a)** Scrieți mulțimea C prin enumerarea elementelor.

10 p **b)** Calculați: $A \cup B$, $B \cap C$, $C \setminus A$.

5 p **c)** Determinați numărul a, știind că $(A \cap B) \cup \{a, 5\} = \{3, 4, 5\}$.

2.

10 p **a)** Precizați, argumentat, numărul numerelor de forma $\overline{a0b}$, divizibile cu 2.

10 p **b)** Scrieți mulțimea divizorilor numărului 98.

3. Fie numerele $a = 24$ și $b = 45$.

15 p **a)** Calculați cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b.

5 p **b)** Determinați numerele prime, divizori ai numărului $a + b$.

Notă: Timp de lucru 50 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

2. RAPOARTE. PROPORȚII

2.1. Rapoarte. Proporții. Regula de trei simplă

Competențe specifice: 1.2; 2.2; 3.2; 4.2; 5.2; 6.2

L1 Rapoarte

În viața cotidiană, precum și în studiul diferitelor fenomene științifice, comparăm măsurile unei mărimi cu măsurile altor mărimi. Mărimile fizice la care ne referim pot fi *de același fel* sau pot fi mărimi *diferite*.
În acest sens, este util adesea să cunoaștem câtul (raportul) măsurilor a două *mărimi de același fel* sau câtul (raportul) măsurilor a două *mărimi diferite* care depind una de cealaltă.

Rezolvăm și observăm

Problema **1.**
Radu construiește mai multe rame în formă de pătrat cu latura de 15 cm, pentru concursul de grafică la care participă. În acest scop, Radu cumpără șipci din lemn prelucrat, care au lungimea de 120 cm. Calculați câte rame se pot realiza dintr-o șipcă.

Rezolvare. Pentru că ramele au formă de pătrat cu latura de 15 cm, rezultă că pentru fiecare ramă este nevoie de o șipcă cu lungimea de 60 cm (egală cu perimetrul pătratului), din care se vor tăia cele 4 laturi.

Problema se reformulează astfel:

Stabiliți de câte ori este mai mare lungimea unei șipci de 120 cm decât perimetrul pătratului cu latura de 15 cm.

Din $l = 15$ cm, rezultă $P = 60$ cm, unde l este lungimea laturii pătratului, iar P este perimetrul acestuia. Fie x numărul de rame. Atunci $P \cdot x = 120$ (cm). Cum P este exprimat în aceeași unitate de măsură ca și lungimea șipcii, rezultă $x = 120 : 60$, adică $x = 2$. Prin urmare, lungimea unei șipci este de 2 ori mai mare decât perimetrul pătratului, adică din fiecare șipcă se pot face exact două rame.
În problema de mai sus, toate *mărimile sunt de același fel* (lungimi de segmente), *exprimate în aceeași unitate de măsură*.
Pentru a stabili de câte ori o măsură a unei mărimi este mai mare sau mai mică decât măsura altei mărimi, împărțim numerele corespunzătoare măsurilor celor două mărimi.

Împărțirea $120 : 60$ se scrie $\dfrac{120}{60}$ și spunem că am scris raportul dintre lungimea șipcii și perimetrul ramei.

Evident, raportul dintre perimetrul ramei și lungimea șipcii este $\dfrac{60}{120}$.

Problema **2.**
Un biciclist parcurge distanța de 70 km în 3 ore și jumătate.
Calculați viteza medie cu care se deplasează biciclistul.

Rezolvare.
Viteza medie de deplasare a unui mobil, exprimată în km/h (kilometri pe oră), este *distanța*, exprimată în kilometri, parcursă de acest mobil *într-o oră*.
Dacă în 3,5 ore parcurge 70 km, atunci *într-o oră* va parcurge o *distanță* de 3,5 ori mai mică, adică $70 : 3{,}5$.

În concluzie, viteza medie a biciclistului este dată de raportul $\dfrac{70}{3{,}5}$.

Informația completă este dată de rezultatul împărțirii, numit *valoarea raportului*, adică $v = \dfrac{70}{3{,}5} = 20$ (km/h).

În problema 2, *mărimile sunt diferite*: distanța, măsurată în km și timpul, măsurat în ore.
Raportul măsurilor acestor mărimi fizice (distanța și timpul) conduce la o nouă mărime fizică (viteza), a cărei unitate de măsură este stabilită în raport cu unitățile de măsură ale mărimilor date.

Atunci, dacă un mobil parcurge distanța d km în timpul t h, acesta are viteza medie $v=\frac{d}{t}$ (km/h).

Dacă un mobil parcurge distanța d metri în t secunde, atunci viteza medie a acestui mobil este $v=\frac{d}{t}$ m/s (metri pe secundă).

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

În cazul ambelor probleme, se obține ca model matematic *raportul a două numere*.

Raportul dintre numărul a și numărul b, $b \neq 0$, se notează $\frac{a}{b}$ și reprezintă *câtul $a:b$*, adică $\frac{a}{b}=a:b$.	Raportul dintre numărul 9 și numărul 3 este $\frac{9}{3}$. Raportul dintre numărul 1 și numărul 5 este $\frac{1}{5}$.
Numerele a și b se numesc *termenii raportului*.	Termenii raportului $\frac{9}{3}$ sunt 9 și 3, iar termenii raportului $\frac{1}{5}$ sunt 1 și 5.
Valoarea câtului $a:b$, $b \neq 0$, se numește *valoarea raportului $\frac{a}{b}$*.	Valoarea raportului $\frac{9}{3}$ este 3, iar valoarea raportului $\frac{1}{5}$ este 0,2.
Un raport de forma $\frac{p}{100}$ se numește *raport procentual*.	Orice raport poate fi exprimat ca raport procentual prin amplificări sau simplificări. De exemplu, $^{50)}\frac{1}{2}=\frac{50}{100}$.
Un raport procentual se notează $p\%$ și se citește „p la sută" sau „p procente".	$\frac{50}{100}\overset{not}{=}50\%$.

Reținem!

Raportul a două mărimi fizice reprezintă raportul dintre numerele corespunzătoare măsurilor acestor mărimi. Cele două mărimi fizice pot fi *de același fel* sau pot fi *mărimi fizice diferite*.

Observații.

a) Dacă cele două mărimi fizice sunt de același fel, atunci măsurile lor trebuie exprimate în *aceeași unitate de măsură*, raportul fiind un număr.

b) *Raportul a două mărimi fizice diferite* conduce la o a treia mărime fizică, a cărei unitate de măsură depinde de unitățile de măsură ale mărimilor fizice inițiale.

c) Valoarea unui raport *nu se modifică* dacă fracția prin care este reprezentat se amplifică sau se simplifică printr-un număr nenul.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Problemă rezolvată

Simona parcurge cu bicicleta distanța d, deplasându-se cu viteza medie de 12 km/h și ajunge în 30 de minute la destinație. Victor parcurge aceeași distanță cu motocicleta, în 6 minute.

a) Calculați distanța parcursă de Simona.

b) Calculați viteza medie cu care se deplasează Victor cu motocicleta.

c) Calculați de câte ori este mai mare viteza de deplasare cu motocicleta decât viteza de deplasare cu bicicleta, folosind raportul între viteza motocicletei și viteza bicicletei.

Rezolvare.

a) Notăm cu v_b viteza medie de deplasare a Simonei. Din $v_b = \frac{d}{t}$, obținem $d = v_b \cdot t$. Cum viteza este exprimată în km/h, deducem că distanța va fi exprimată în kilometri, iar timpul trebuie exprimat în ore.

Din 30 min = 0,5 h, rezultă $d = 12 \cdot 0,5 = 6$ (km).

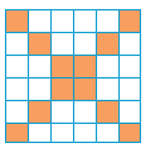
b) Fie v_m viteza medie de deplasare a motocicletei. Dar, $d = 6$ km, iar $t = 6$ min $= \frac{6}{60}\,\text{h} = \frac{1}{10}\,\text{h} = 0,1\,\text{h}$.

Atunci, $v_m = {}^{10)}\frac{6}{0,1} = 60$ (km/h).

c) Cele două viteze sunt mărimi de același fel, exprimate în aceeași unitate de măsură. Atunci, $\frac{v_m}{v_b} = \frac{60}{12} = 5$, deci Victor se deplasează de 5 ori mai repede decât Simona.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Imaginea alăturată este realizată pe o rețea de pătrate. Alegeți varianta corectă de răspuns. Doar un răspuns este corect.



a) Numărul pătrățelelor colorate este:
A. 24; **B.** 16; **C.** 12; **D.** 18.

b) Numărul pătrățelelor necolorate este:
A. 24; **B.** 18; **C.** 16; **D.** 12.

c) Raportul dintre numărul pătrățelelor colorate și numărul pătrățelelor necolorate este:
A. $\frac{1}{3}$; **B.** $\frac{1}{2}$; **C.** $\frac{1}{4}$; **D.** $\frac{2}{3}$.

d) Raportul dintre numărul pătrățelelor colorate și numărul total al pătrățelelor care alcătuiesc pătratul mare este:
A. $\frac{3}{4}$; **B.** $\frac{2}{3}$; **C.** $\frac{1}{2}$; **D.** $\frac{1}{3}$.

2. Scrieți raportul numerelor a și b, apoi calculați valoarea acestui raport, pentru fiecare dintre perechile:

a) $a = 180$ și $b = 240$;

b) $a = 27,5$ și $b = 5,5$;

c) $a = \frac{4}{3}$ și $b = \frac{2}{9}$.

3. În tabelul următor, x și y reprezintă cantități de fructe exprimate în tone. Copiați tabelul pe caiete și completați casetele libere astfel încât valoarea raportului dintre x și y să fie egală cu 4.

x	12			3,6	200
y		5	24		

4. Un stadion are capacitatea de 36 000 locuri. La un meci de fotbal asistă 24 000 spectatori.

a) Determinați raportul dintre numărul locurilor ocupate și numărul total de locuri.

b) Determinați raportul dintre numărul locurilor rămase libere și numărul locurilor ocupate.

5. Desenați segmentele AB și CD având lungimile 12,5 cm, respectiv 250 mm. Stabiliți care dintre segmente este mai mare și de câte ori.

6. Determinați valoarea raportului dintre:

a) o oră și un minut;
b) un gram și un kilogram;
c) un hectar și un metru pătrat.

7. Se consideră rapoartele $\frac{a}{b}=3$, $\frac{b}{c}=12$.

Calculați valoarea rapoartelor $\frac{a}{c}$, $\frac{2\cdot a}{3\cdot b}$, $\frac{5\cdot b}{6\cdot c}$.

Minitest

1.

10 p **a)** Scrieți o pereche de numere care au raportul 10;

20 p **b)** Scrieți două numere care au raportul 1,25.

2. Valoarea raportului $\frac{m}{n}$ este 6. Completați spațiile libere așa încât să obțineți propoziții adevărate.

15 p **a)** Numărul *m* este mai … decât numărul *n* de … ori.

15 p **b)** Dacă *m* și *n* se înmulțesc cu 3, atunci valoarea noului raport este … .

3. Ghiozdanul lui Vlad cântărește, gol, 300 g. În el se află: penarul, care cântărește 400 g, acuarelele, care cântăresc 300 g, caietele, care cântăresc 1,6 kg și manualele, care cântăresc 3,4 kg.

10 p **a)** Calculați cât cântărește ghiozdanului plin.

10 p **b)** Calculați raportul dintre masa ghiozdanului plin și masa penarului.

10 p **c)** Calculați raportul dintre masa acuarelelor și masa ghiozdanului plin.

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

L2 Proporții

Rezolvăm și observăm

Problema 1. Un comerciant vinde căpșuni de aceeași calitate, ambalate în lădițe de 3 kg sau de 5 kg. Pe fiecare lădiță este afișat costul căpșunilor, după cum rezultă din tabelul alăturat. Bunica Emmei și bunica Soniei au cumpărat câte două lădițe de căpșuni.

Cantitatea de căpșuni dintr-o lădiță	3 kg	5 kg
Costul unei lădițe	27 lei	45 lei

a) Știind că Bunica Emmei a cumpărat 8 kg de căpșuni, iar bunica Soniei a cumpărat 10 kg de căpșuni, calculați suma plătită de fiecare.
b) Calculați prețul mediu cu care a cumpărat căpșunile fiecare dintre cele două bunici.
c) Stabiliți prețul căpșunilor din fiecare ladă.

Rezolvare. **a)** Cantitatea de 8 kg se poate obține doar cumpărând o lădiță de 3 kg și o lădiță de 5 kg. Atunci, suma plătită de bunica Emmei este 27 + 45 = 72 (lei). Cu un raționament similar, bunica Soniei a cumpărat două lădițe a câte 5 kg fiecare și a plătit 90 de lei.

b) Prețul căpșunilor cumpărate de bunica Emmei este $P_1=\frac{72}{8}=9$ (lei/kg), iar prețul căpșunilor cumpărate de bunica Soniei este $P_2=\frac{90}{10}=9$ (lei/kg).

c) Prețul căpșunilor din lăzile de 3 kg este $P_3=\frac{27}{3}=9$ (lei/kg), iar prețul căpșunilor din lăzile de 5 kg este $P_4=\frac{45}{5}=9$ (lei/kg).

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Din problema de mai sus, observăm că prețul căpșunilor se poate exprima prin mai multe *rapoarte* care au *aceeași valoare*. Acestea se numesc *rapoarte egale*.

Egalitatea a două rapoarte se numește *proporție*.

$\frac{72}{8}=\frac{90}{10}$; $\frac{90}{10}=\frac{27}{3}$; $\frac{27}{3}=\frac{45}{5}$; $\frac{45}{5}=\frac{72}{8}$; $\frac{27}{3}=\frac{72}{8}$ sunt *proporții*.

Dacă rapoartele $\frac{a}{b}$, $a\neq 0$, $b\neq 0$ și $\frac{c}{d}$, $c\neq 0$, $d\neq 0$ au *aceeași valoare*, atunci scriem *proporția* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Numerele nenule a, b, c, d sunt *termenii* proporției: a și d se numesc *extremi*, iar b și c se numesc *mezi*.

extrem mez

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

mez extrem

Proprietatea fundamentală a unei proporții	*În limbajul simbolisticii matematice*	*Exemple*
În orice proporție, *produsul mezilor este egal cu produsul extremilor.*	Dacă $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$, $d\neq 0$ și $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, atunci $a\cdot d=b\cdot c$.	$\frac{2}{12}=\frac{3}{18}$ și $2\cdot 18=12\cdot 3$.

În practică, este util să formăm o proporție, plecând de la relația între termenii acesteia.

Dacă $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$, $d\neq 0$ și $a\cdot d=b\cdot c$, atunci a, b, c, d sunt termenii unei proporții. De exemplu, se formează proporția $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.	Din $2\cdot 18=12\cdot 3$, se formează proporția $\frac{2}{12}=\frac{3}{18}$.

Cele două enunțuri de mai sus se pot formula, printr-un singur enunț, astfel:

Oricare ar fi numerele nenule a, b, c, d, $a\cdot d=b\cdot c$ dacă și numai dacă $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.	Dacă $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$, $d\neq 0$, atunci $a\cdot d=b\cdot c \Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.	$2\cdot 18=12\cdot 3 \Leftrightarrow \frac{2}{12}=\frac{3}{18}$.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

În funcție de contextul practic în care identificăm o proporție, putem determina un termen al acesteia în funcție de ceilalți trei termeni. Pentru $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$, $d\neq 0$ cu $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, obținem:

Formula	*Mod de calcul*		*Exemple*
un extrem $=\frac{\text{produsul mezilor}}{\text{celălalt extrem}}$	$a=\frac{b\cdot c}{d}$	$d=\frac{b\cdot c}{a}$	Din $\frac{x}{9}=\frac{2,5}{3}$, rezultă $x=\frac{9\cdot 2,5}{3}=7,5$; Din $\frac{4}{9}=\frac{5}{y}$, rezultă $y=\frac{9\cdot 5}{4}=11,25$.
un mez $=\frac{\text{produsul extremilor}}{\text{celălalt mez}}$	$b=\frac{a\cdot d}{c}$	$c=\frac{a\cdot d}{b}$	Din $\frac{12}{m}=\frac{3}{7}$, rezultă $m=\frac{12\cdot 7}{3}=28$; Din $\frac{15}{11}=\frac{p}{33}$, rezultă $p=\frac{15\cdot 33}{11}=45$.

Proprietățile operațiilor cu numere raționale nenule ne permit ca, pornind de la numerele nenule a, b, c, d și *proporția* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, să formăm și alte proporții, fie *folosind aceiași termeni*, cu alte roluri, fie *modificând temenii*, după anumite reguli.

a) *Proporții derivate ale proporției* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, *cu aceiași termeni*

Procedeul	*În limbajul simbolisticii matematice*	*Exemple*
Se schimbă mezii între ei	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$	$\frac{2}{4}=\frac{3}{6} \Leftrightarrow \frac{2}{3}=\frac{4}{6}$
Se schimbă extremii între ei	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{b}=\frac{c}{a}$	$\frac{2}{4}=\frac{3}{6} \Leftrightarrow \frac{6}{4}=\frac{3}{2}$
Se inveresază ambele rapoarte	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$	$\frac{2}{4}=\frac{3}{6} \Leftrightarrow \frac{4}{2}=\frac{6}{3}$

b) *Proporții derivate* ale proporției $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, *cu termeni modificați*

Proporția obținută		*Exemple*
$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$	$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}, a>b, c>d.$	$\frac{4}{2}=\frac{6}{3} \Leftrightarrow \frac{4+2}{2}=\frac{6+3}{3}$ și $\frac{4}{2}=\frac{6}{3} \Leftrightarrow \frac{4-2}{2}=\frac{6-3}{3}$
$\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$	$\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}, a>b, c>d.$	$\frac{4}{2}=\frac{6}{3} \Leftrightarrow \frac{4}{4+2}=\frac{6}{6+3}$ și $\frac{4}{2}=\frac{6}{3} \Leftrightarrow \frac{4}{4-2}=\frac{6}{6-3}$
$\frac{a}{b}=\frac{m\cdot c}{m\cdot d}, m\neq 0$	$\frac{m\cdot a}{m\cdot b}=\frac{c}{d}, m\neq 0$	$\frac{2}{4}=\frac{3}{6} \Leftrightarrow \frac{2}{4}=\frac{0,5\cdot 3}{0,5\cdot 6}$ și $\frac{2}{4}=\frac{3}{6} \Leftrightarrow \frac{5\cdot 2}{5\cdot 4}=\frac{3}{6}$
$\frac{a}{m\cdot b}=\frac{c}{m\cdot d}, m\neq 0$	$\frac{m\cdot a}{b}=\frac{m\cdot c}{d}, m\neq 0$	$\frac{2}{4}=\frac{3}{6} \Leftrightarrow \frac{2}{5\cdot 4}=\frac{3}{5\cdot 6}$ și $\frac{2}{4}=\frac{3}{6} \Leftrightarrow \frac{5\cdot 2}{4}=\frac{5\cdot 3}{6}$
$\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}$	$\frac{a}{b}=\frac{a-c}{b-d}, a>c, b>d.$	$\frac{6}{3}=\frac{4}{2} \Leftrightarrow \frac{6}{3}=\frac{6+4}{3+2}$ și $\frac{6}{3}=\frac{4}{2} \Leftrightarrow \frac{6}{3}=\frac{6-4}{3-2}$.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Identificați perechile de rapoarte care formează proporții:

a) $\frac{2}{3}$ și $\frac{6}{9}$; **c)** $\frac{1}{0,5}$ și $\frac{8}{4}$; **e)** $\frac{2,5}{3,5}$ și $\frac{2}{3}$;

b) $\frac{5}{4}$ și $\frac{25}{20}$; **d)** $\frac{9}{2}$ și $\frac{14}{3}$; **f)** $\frac{1,5}{3}$ și $\frac{3}{6}$.

2. Completați cu numere spațiile libere așa încât să obțineți proporții:

a) $\frac{5}{2}=\frac{\dots}{8}$; **b)** $\frac{\dots}{0,5}=\frac{6}{1,5}$; **c)** $\frac{6}{\dots}=\frac{\dots}{4}$.

3. Scrieți proporții folosind ca termeni următoarele numere:

a) 4; 6; 8; 12; **b)** 9; 3; 6; 4,5.

4. Scrieți proporțiile care se pot forma folosind câte două dintre rapoartele: $\frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{2}{3}, \frac{33}{55}, \frac{51}{85}$.

5. Copiați pe caiete și scrieți în spațiile libere numere astfel încât, din proporția $\frac{5}{9}=\frac{2,5}{4,5}$, să obțineți proporții derivate cu aceiași termeni:

a) $\frac{\dots}{9}=\frac{2,5}{\dots}$; **b)** $\frac{5}{\dots}=\frac{\dots}{4,5}$; **c)** $\frac{9}{\dots}=\frac{4,5}{\dots}$.

6. Copiați pe caiete și scrieți în spațiile libere numere astfel încât să obțineți proporții derivate cu termeni modificați, pornind de la proporția $\frac{5}{9}=\frac{2,5}{4,5}$.

a) $\frac{5}{\dots}=\frac{2,5}{\dots}$; **c)** $\frac{5}{9}=\frac{\dots}{\dots}$; **e)** $\frac{5}{9}=\frac{10}{\dots}$.

b) $\frac{\dots}{9}=\frac{\dots}{4,5}$; **d)** $\frac{30}{9}=\frac{\dots}{4,5}$.

7. Determinați numărul natural $\overline{ab}$, știind că 4; 12; 13 și $\overline{ab}$ sunt termenii unei proporții.

8. Determinați termenul necunoscut, respectiv termenii necunoscuți, din proporțiile:

a) $\frac{3}{7}=\frac{x}{35}$; **c)** $\frac{0,3}{y}=\frac{0,9}{21}$;

b) $\frac{y}{2}=\frac{9}{4,5}$; **d)** $\frac{x}{4}=\frac{25}{x}$.

9. Raportul dintre prețul unui stilou și prețul unui pix este $\frac{22}{3}$. Știind că prețul pixului este de 7,50 lei, calculați prețul stiloului.

10. O proporţie are extremii $2 \cdot n + 7$ şi 10, iar mezii sunt 6 și 25. Calculați numărul n.

11. Scrieți pe caiete și completați spațiile libere astfel încât să obțineți afirmații adevărate.

a) Dacă $\frac{a}{3}=\frac{5}{b}$, atunci $a \cdot b = ...$, iar $30-\frac{150}{a \cdot b}=\ldots$;

b) Dacă $\frac{a}{4}=\frac{8}{b}$ și $\frac{2}{c}=\frac{d}{16}$, atunci $a \cdot b - c \cdot d = \ldots$.

12. Raportul a două numere este $\frac{2}{9}$.

a) Calculați suma acestor numere, știind că numărul mai mic este 10;

b) Calculați produsul acestor numere, știind că numărul mai mare este 4,5.

13. Știind că $\frac{x}{y}=\frac{3}{10}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, calculați:

a) $\frac{x+y}{y}$; **c)** $\frac{x}{10 \cdot y}$;

b) $\frac{x}{y-x}$; **d)** $\frac{10 \cdot x + 3 \cdot y}{9 \cdot y}$.

14. Raportul a două numere este 0,1.

a) Determinați numerele, știind că suma lor este 44.

b) Determinați numerele, știind că diferența lor este 27.

Minitest

Alegeți litera care indică varianta corectă de răspuns. Doar un răspuns este corect.

20 p **1.** Dintre perechile de rapoarte **a)** $\frac{1}{4}$ și $\frac{6}{20}$; **b)** $\frac{7}{3}$ și $\frac{21}{9}$; **c)** $\frac{5}{2}$ și $\frac{15}{8}$; **d)** $\frac{9}{10}$ și $\frac{27}{40}$ formează o proporție:

A. perechea a); **B.** perechea b); **C.** perechea c); **D.** perechea d).

20 p **2.** Dacă $\frac{a}{6}=\frac{0,5}{b}$, atunci produsul $a \cdot b$ este egal cu:

A. 1; **B.** 2; **C.** 3; **D.** 4.

20 p **3.** Numărul x din proporția $\frac{12}{5}=\frac{36}{x}$ este:

A. 15; **B.** 18; **C.** 6; **D.** 9.

30 p **4.** Dacă $\frac{a}{12}=\frac{3}{a}$, numărul natural a este:

A. 15; **B.** 6; **C.** 36; **D.** 4.

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

L3 Șir de rapoarte egale

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Trei sau mai multe rapoarte $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$, cu $b_1 \neq 0, b_2 \neq 0, b_3 \neq 0, \ldots, b_n \neq 0$, care au aceeași valoare, formează un șir de rapoarte egale.

Vom scrie $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$.

Exemple

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{100}{200}$;

$\frac{0,5}{2} = \frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{6}{24} = \frac{3}{12}$.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Problema 1

Sonia citește o carte de 98 de pagini, câte 14 pagini pe zi, Delia citește o carte de 147 de pagini, câte 21 de pagini pe zi, iar Irina citește o carte de 84 de pagini, câte 12 pagini pe zi. Demonstrați că cele trei prietene termină de citit în același număr de zile.

Victor, tatăl Irinei, își propune să citească toate cele trei cărți, citind în fiecare zi atâtea pagini câte citesc împreună cele trei fete într-o zi. Demonstrați că Victor va termina de citit în același număr de zile ca și fiica sa.

Rezolvare. Numărul zilelor în care o persoană termină de citit cartea este valoarea raportului dintre numărul total de pagini citite și numărul de pagini citite într-o zi.

	Sonia	Delia	Irina	Victor
Număr total de pagini	98	147	84	$98 + 147 + 84 = 329$
Nr de pagini pe zi	14	21	12	$14 + 21 + 12 = 47$
Nr de zile în care termină cartea	$\frac{98}{14} = 7$	$\frac{147}{21} = 7$	$\frac{84}{12} = 7$	$\frac{329}{47} = 7$

Tabelul de mai sus furnizează următorul șir de rapoarte egale: $\frac{98}{14} = \frac{147}{21} = \frac{84}{12} = \frac{329}{47}$, toate având valoarea 7.

Cum $329 = 98 + 147 + 84$, iar $47 = 14 + 21 + 12$, șirul se poate scrie astfel: $\frac{98}{14} = \frac{147}{21} = \frac{84}{12} = \frac{98+147+84}{14+21+12}$.

Problema 1 probează, printr-un exemplu, următoarea proprietate a șirurilor de rapoarte egale.

Dacă $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$ $b_1 \neq 0, b_2 \neq 0, \ldots b_n \neq 0$ și $b_1 + b_2 + \ldots + b_n \neq 0$ atunci $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}$.

Problema 2 Determinați numerele x, y și z cu proprietatea $\frac{x}{2} = \frac{y}{12} = \frac{z}{6}$, știind că $x + y + z = 220$.

Folosind proprietatea $\frac{x}{2} = \frac{y}{12} = \frac{z}{6} = \frac{x+y+z}{2+12+6}$, rezultă $\frac{x}{2} = \frac{y}{12} = \frac{z}{6} = \frac{220}{20} = 11$.

Atunci, $\frac{x}{2} = 11$, $\frac{y}{12} = 11$, $\frac{z}{6} = 11$, deci $x = 22$, $y = 132$, $z = 66$.

Problema 3 Diferența dintre două numere este 20. Determinați numerele, știind că sunt direct proporționale cu 4 și 9.

Rezolvare Fie a, b cele două numere. Din enunț, $\frac{a}{4} = \frac{b}{9} = k$. Din $\frac{a}{4} = k$ și $\frac{b}{9} = k$, obținem $a = 4 \cdot k$ respectiv $b = 9 \cdot k$. Avem $b > a$, deci $b - a = 20$, adică $9 \cdot k - 4 \cdot k = 20 \Rightarrow 5 \cdot k = 20$, de unde rezultă $k = 4$. Numerele sunt $a = 4 \cdot 4$ și $b = 9 \cdot 4$, adică $a = 16$, $b = 36$.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Dintre rapoartele $\frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{6}{10}, \frac{10}{15}, \frac{9}{15}, \frac{2}{12}, \frac{21}{35}$, scrieți:

a) un șir de trei rapoarte egale;

b) un șir de cât mai multe rapoarte egale.

2. **a)** Scrieți un șir de patru rapoarte egale cu raportul $\frac{3}{2}$.

b) Scrieți un șir de cinci rapoarte egale cu raportul $\frac{1}{3}$.

3. Alegeți litera care indică varianta corectă de răspuns. Doar un răspuns este corect.

a) Fie șirul de rapoarte egale $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=\frac{d}{5}$.
Dintre numerele *a*, *b*, *c*, *d* mai mare este:

A. *a*; **B.** *b*; **C.** *c*; **D.** *d*.

b) Dacă $\frac{a}{5}=\frac{b}{6}=\frac{1}{2}$, atunci suma numerelor *a* și *b* este:

A. 1; **B.** 1,5; **C.** 5; **D.** 5,5.

c) Dacă $\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\frac{c}{p}=\frac{1}{3}$, atunci $\frac{a+b+c}{m+n+p}$ este:

A. $\frac{1}{3}$; **B.** $\frac{2}{3}$; **C.** $\frac{3}{3}$; **D.** $3\frac{1}{3}$.

4. Calculați termenii necunoscuți din șirul de rapoarte egale: $\frac{1}{5}=\frac{x}{10}=\frac{3}{y}=\frac{4}{z}$.

5. Suma numerelor *a*, *b* și *c* este 72. Calculați *a*, *b* și *c*, știind că $\frac{a}{3}=\frac{b}{5}=\frac{c}{10}$.

6. Diferența numerelor *a* și *b* este 12. Calculați *a* și *b*, știind că $\frac{7}{a}=\frac{3}{b}$.

7. Ionel a cumpărat cu suma de 5600 lei, un laptop, un sistem audio și un ecran de proiecție.
Determinați prețul fiecărui obiect, știind că o optime din prețul laptopului reprezintă o pătrime din prețul sistemului audio și jumătate din prețul ecranului de proiecție. Rezolvați problema, folosind șiruri de rapoarte egale.

8. Fie $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}$.

a) Demonstrați că $a^2+b^2=c^2$.

b) Determinați tripletele de numere naturale (*a*, *b*, *c*) care verifică, în plus, condiția $a+b+c<77$.

Minitest

1. Scrieți pe caiete și completați spațiile punctate astfel încât să obțineți afirmații adevărate.

20 p **a)** Un raport egal cu rapoartele $\frac{2}{5}, \frac{4}{10}, \frac{6}{15}$ este ... .

20 p **b)** Dacă $\frac{4}{3}=\frac{a}{6}=\frac{8}{b}$, atunci $a+b=\dots$.

20 p **c)** Dacă $\frac{1}{5}=\frac{c}{10}=\frac{4}{d-3}$, atunci $d-c=\dots$.

30 p **2.** Determinați numerele *x*, *y* și *z* care verifică egalitățile $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{6}$ și $x+y=49$.

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

L4 Mărimi direct proporționale. Mărimi invers proporționale

Rezolvăm și observăm

Problemă

Cantitatea de 240 kg de mere este depozitată în lădițe. Lădițele de care depozitul dispune sunt de câte 4 kg, 8 kg, 12 kg respectiv 24 kg.

a) Stabiliți dacă poate fi depozitată toată cantitatea, știind că se utilizează câte 5 lădițe de fiecare fel.

b) Comparați cantitatea de mere depozitată în cele patru tipuri de lădițe și observați ce se întâmplă cu cantitatea depozitată când cantitatea de mere din fiecare lădiță crește sau descrește de un număr de ori.

c) Determinați numărul de lădițe folosite pentru depozitare, dacă se folosesc lădițe de același fel.

d) Observați ce se întâmplă cu numărul lădițelor folosite când cantitatea de mere din fiecare lădiță crește sau descrește de un număr de ori.

Rezolvare

a) Cantitatea de mere depozitată în 5 lădițe de un anumit tip este produsul dintre cantitatea depozitată într-o lădiță de acest tip și numărul lădițelor folosite, adică numărul 5.

Cantitatea de mere dintr-o lădiță	**4** kg	**8** kg	**12** kg	**24** kg
Cantitatea depozitată în 5 lădițe	$4 \cdot 5 = 20$ (kg)	$8 \cdot 5 = 40$ (kg)	$12 \cdot 5 = 60$ (kg)	$24 \cdot 5 = 120$ (kg)

Cantitatea care poate fi depozitată în câte 5 lădițe de același fel este $20 + 40 + 60 + 120 = 240$ (kg), adică întreaga cantitate.

b) Datele din tabel arată că, atunci când cantitatea de mere dintr-o lădiță *crește* de un număr de ori, cantitatea de mere depozitate, păstrând neschimbat numărul lădițelor folosite, *crește* de același număr de ori.

8 kg $= 4$ kg $\cdot\, 2$ și 40 kg $= 20$ kg $\cdot\, 2$;
12 kg $= 4$ kg $\cdot\, 3$ și 60 kg $= 20$ kg $\cdot\, 3$;
24 kg $= 4$ kg $\cdot\, 6$ și 120 kg $= 20$ kg $\cdot\, 6$.

Relațiile de mai sus se pot rescrie și prin *șirul de rapoarte egale*: $\frac{4}{20} = \frac{8}{40} = \frac{12}{60} = \frac{24}{120}$.

Vom spune că cele două mărimi (cantitatea de fructe dintr-o lădiță și cantitatea de fructe depozitată într-un număr constant de lădițe) sunt *mărimi direct proporționale*.

c) Numărul lădițelor folosite este raportul dintre cantitatea totală de mere și cantitatea de mere dintr-o lădiță și rezultă din tabelul următor:

Cantitatea de mere dintr-o lădiță	**4** kg	**8** kg	**12** kg	**24** kg
Numărul de lădițe folosite	$\frac{240}{4} = 60$	$\frac{240}{8} = 30$	$\frac{240}{12} = 20$	$\frac{240}{24} = 10$

d) Datele din tabel arată că, atunci când cantitatea de mere dintr-o lădiță *crește* de un număr de ori, numărul lădițelor folosite pentru aceeași cantitate de fructe *descrește* de același număr de ori, adică:

Observăm că în lădițele de 8 kg cantitatea de mere este de *două ori mai mare* decât în cele de 4 kg, iar *numărul lădițelor necesare* pentru a depozita aceeași cantitate de mere *este de două ori mai mic*. Cu un raționament similar pentru celelalte perechi de lădițe, obținem concluzia: Dacă mărim cantitatea de mere dintr-o lădiță de un număr de ori, se micșorează numărul lădițelor necesare de același număr de ori.

Justifică acest fapt și relațiile extrase din tabelul de la c): 8 kg $= 4$ kg$\cdot\, 2$ și 30 lădițe $= 60$ lădițe $: 2$;
12 kg $= 4$ kg $\cdot\, 3$ și 20 lădițe $= 60$ lădițe $: 3$; 24 kg $= 4$ kg $\cdot\, 6$ și 10 lădițe $= 60$ lădițe $: 6$.

Aceste relații se pot rescrie și prin *șirul de produse egale*: $4 \cdot 60 = 8 \cdot 30 = 12 \cdot 20 = 24 \cdot 10$.

Vom spune că cele două mărimi (cantitatea de fructe dintr-o lădiță și numărul lădițelor folosite păstrând cantitatea depozitată constantă) sunt *mărimi invers proporționale*.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Două mărimi care cresc sau descresc, în același timp, de același număr de ori, se numesc mărimi *direct proporționale*.	*Viteza* cu care se deplasează un vehicul și *distanța* parcursă într-un interval de timp dat.
Mulțimile finite, ordonate, de numere $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ și $\{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n\}$ sunt în relație de *proporționalitatea directă* dacă se poate forma șirul de rapoarte egale $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$.	Mulțimile $\{5; 7{,}5; 12\}$ și $\{10; 15; 24\}$ sunt în *relație de direct proporționalitate* pentru că $\frac{5}{10}=\frac{7{,}5}{15}=\frac{12}{24}$.
Valoarea nenulă comună a rapoartelor se numește *raport de proporționalitate* sau *coeficient de proporționalitate* și se notează, de regulă, cu k.	*Raportul de proporționalitate* al mulțimilor ordonate din exemplul de mai sus este $k=0{,}5$.
Două mărimi se numesc mărimi *invers proporționale* dacă, atunci când o mărime crește de un număr de ori, cealaltă mărime descrește de același număr de ori.	*Viteza* cu care se deplasează un vehicul și *timpul* de parcurgere a unei distanțe date.
Mulțimile finite, ordonate, de numere $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ și $\{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n\}$ sunt în relație de *proporționalitate inversă* dacă se poate forma șirul de produse egale $a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = a_3 \cdot b_3 = \ldots = a_n \cdot b_n$.	Mulțimile $\{3, 6, 15\}$ și $\{10, 5, 2\}$ sunt în *relație de invers proporționalitate* pentru că $3 \cdot 10 = 6 \cdot 5 = 15 \cdot 2$.

În rezolvarea multor probleme de aritmetică, informația potrivit căreia două mărimi sunt direct proporționale sau sunt invers proporționale este esențială.

Dicționar

Mulțime ordonată = mulțime ale cărei elemente sunt enumerate într-o ordine bine determinată.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Problemă rezolvată.
Numerele naturale a și b sunt direct proporționale cu 2 și 3, iar numerele b și c sunt invers proporționale cu 2 și 3.
a) Demonstrați că $a = c$.
b) Determinați cele trei numere, știind că $a + 2 \cdot b + 3 \cdot c = 140$.

Rezolvare

a) $\{a, b\}$ și $\{2, 3\}$ sunt în relație de proporționalitate directă, deci $\frac{a}{2}=\frac{b}{3} \Leftrightarrow 3 \cdot a = 2 \cdot b$. (1)

$\{b, c\}$ și $\{2, 3\}$ sunt în relație de proporționalitate inversă, deci $2 \cdot b = 3 \cdot c$. (2)

Din (1) și (2), rezultă $3 \cdot a = 3 \cdot c$, adică $a = c$.

b) Din $a + 2 \cdot b + 3 \cdot c = 140$ și $a = c$, folosind (1), rezultă
$a + 3 \cdot a + 3 \cdot a = 140$, adică $7 \cdot a = 140$ și obținem $a = 20$,
$c = 20$, apoi $2b = 60$, deci $b = 30$.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. În fiecare din tabelele următoare sunt redate valori ale mărimilor A și B.
Precizați dacă acestea sunt mărimi direct proporționale. Justificați răspunsul dat.

a)

A	1	3	6	10	12,5
B	2	6	12	20	25

b)

A	2	4	5	15	20
B	6	12	15	40	60

2. Bogdan cumpără 24 caiete de matematică, de același fel, pentru care plătește 180 lei.

a) Calculați:

a$_1$) prețul unui caiet de matematică;

a$_2$) suma pe care ar fi plătit-o Bogdan dacă ar fi cumpărat șase caiete de matematică de același fel.

b) Copiați pe caiete, apoi completați tabelul următor, știind că *n* reprezintă numărul de caiete cumpărate de Bogdan, iar *s* reprezintă suma, în lei, achitată pentru cele *n* caiete.

s				
n	1	2	6	24
$\frac{s}{n}$				

3. Numerele *x* și *y* sunt direct proporționale cu 2 și 3.

a) Demonstrați că $x < y$.

b) Calculați numărul *x*, dacă $y = 9$.

4. Determinați trei numere direct proporționale cu 3, 7 și 5, știind că cel mai mic dintre ele este 21.

5. Marius, Dan, Vlad și Radu participă la un concurs de tir. Punctajele obținute de cei patru copii la sfârșitul tragerilor sunt numere direct proporționale cu 1,5; 2,5; 1,75, respectiv cu 2.

a) Scrieți concurenții în ordinea descrescătoare a punctajelor, la sfârșitul concursului.

b) Determinați numărul punctelor obținute de fiecare concurent, dacă împreună au acumulat 620 de puncte.

6. Un tren de persoane se deplasează pe distanța de 240 km.

Calculați viteza medie cu care trebuie să se deplaseze trenul pentru a parcurge distanța în 2 ore, în 3 ore, în 4 ore, respectiv în 6 ore.

Copiați pe caiete și completați tabelul următor, știind că *t* reprezintă timpul de parcurgere a distanței, iar *v* reprezintă viteza de deplasare a trenului, exprimată în km/h.

t	2 h	3 h	4 h	6 h
v				
$t \cdot v$				

7. În fiecare din tabelele următoare sunt redate mărimile *A* și *B*.

a)

A	1	3	4	10	18
B	24	8	6	2,4	1,5

b)

A	2	3	4	5	60
B	15	10	7,5	6	0,5

Precizați dacă acestea sunt mărimi invers proporționale. Justificați răspunsul dat.

8. Numerele *x* și *y* sunt invers proporționale cu 7 și 10.

a) Demonstrați că $x > y$.

b) Determinați numărul *y*, știind că $x = 20$.

9. Determinați trei numere invers proporționale cu 4, 15 și 9, știind că cel mai mare dintre ele este 45.

10. Numerele *a* și *b* sunt invers proporționale cu numerele 0,5 și 2,4. Determinați numerele, știind că suma acestora este 58.

Minitest

1. Completați spațiile libere astfel încât să obțineți afirmații adevărate.

15 p **a)** Dacă $\frac{a}{4} = \frac{b}{7}$, atunci *a* și *b* sunt direct proporționale cu numerele … .

15 p **b)** Dacă $c \cdot 3 = d \cdot 5$, atunci *c* și *d* sunt invers proporționale cu numerele … .

20 p **c)** Dacă latura pătratului P_2 este de trei ori mai mare decât latura pătratului P_1, atunci perimetrul pătratului P_1 este de … ori mai … decât perimetrul pătratului P_2.

40 p **2.** Perimetrul unui triunghi este 80 cm. Calculați lungimile laturilor triunghiului, știind că acestea sunt direct proporționale cu numerele 4, 5 și 7.

Notă: Timp de lucru 20 de minute. Se acordă 10 puncte din oficiu.

L5 Regula de trei simplă

Rezolvăm și observăm

Problema 1. Petru a cumpărat 2 kg de piersici cu 16 lei. Calculați cât costă 15 kg de piersici de același fel.

Varianta I.

Prețul unui kilogram de piersici este valoarea raportului $\frac{16}{2}$, adică 8 (lei/kg).

Atunci, 15 kg de piersici costă de 15 ori mai mult, deci $15 \cdot 8 = 120$ (lei).

Varianta a II-a

Notăm cu x costul cantității de 15 kg de piersici.

Cantitatea cumpărată și costul acesteia sunt mărimi *direct proporționale*, deci putem scrie proporția $\frac{2}{16} = \frac{15}{x}$.

Termenul necunoscut al proporției este $x = \frac{15 \cdot 16}{2} = 120$ (lei), deci 15 kg de piersici costă 120 lei.

Problema 2. Mihnea a parcurs o distanță în 4 h, cu viteza de 60 km/h. Calculați în cât timp ar parcurge Mihnea aceeași distanță, cu viteza medie de 80 km/h.

Varianta I

Distanța parcursă de Mihnea este $d = v \cdot t$, unde $v = 60$ km/h și $t = 4$ h. Obținem $d = 240$ km.
Dacă ar circula cu viteza medie de 80 km/h, atunci timpul necesar ar fi $t = \frac{d}{v}$, unde $d = 240$ km, iar $v = 80$ km/h, deci $t = \frac{240}{80} = 3$ (h).

Varianta a II-a

Notăm cu x timpul în care ar parcurge distanța cu viteza medie de 80 km/h. Viteza de deplasare și timpul de parcurgere a aceleiași distanțe sunt mărimi *invers proporționale*, deci se poate scrie egalitatea

$60 \cdot 4 = 80 \cdot x$. Rezultă $x = \frac{60 \cdot 4}{80} = 3$, adică distanța ar fi parcursă în 3 h.

Pentru ambele probleme rezolvate mai sus, varianta a II-a de rezolvare ilustrează posibilitatea determinării unei valori a unei mărimi printr-un calcul simplu, pe baza relației de proporționalitate, directă sau inversă, cu o altă mărime.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Regula de trei simplă este o tehnică prin care se calculează o valoare a unei mărimi fizice, știind că aceasta este *direct proporțională* sau *invers proporțională* cu o altă mărime fizică.

Pentru a aplica *regula de trei simplă*, se stabilește proporționalitatea valorilor celor două mărimi. Apoi, din datele cunoscute, folosind relațiile obținute din proporționalitatea valorilor, se determină termenul necunoscut.

Scrierea schematică a datelor problemei, evidențiind dependența mărimilor și valorile cunoscute ale acestora, oferă toate informațiile necesare rezolvării problemelor, folosind regula de trei simplă. Operațiile care urmează să fie efectuate pentru a afla necunoscuta depind de încadrarea problemei în una din cele două tipuri de proporționalitate.

Dacă valorile primei mărimi sunt a_1 și a_2, iar cele ale celeilalte mărimi sunt b_1 și x, atunci datele problemei se pot scrie schematic astfel:

$$a_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \, b_1$$
$$a_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \, x$$

Pentru determinarea valorii necunoscute, identificăm următoarele două situații:

1. Dacă mărimile sunt *direct proporționale*, atunci mulțimile $\{a_1, a_2\}$ și $\{b_1, b_2\}$ sunt în relație de proporționalitate directă, adică $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{x}$, termenul necunoscut fiind $x = \frac{a_2 \cdot b_1}{a_1}$.

Schematic, dacă sunt mărimi direct proporționale, scriem

a_1 .... b_1
a_2 x

$$x = \frac{a_2 \cdot b_1}{a_1}$$

2. Dacă mărimile sunt *invers proporționale*, atunci mulțimile $\{a_1, a_2\}$ și $\{b_1, b_2\}$ sunt în relație de proporționalitate inversă, adică $a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot x$, termenul necunoscut fiind $x = \frac{a_1 \cdot b_1}{a_2}$.

Schematic, dacă sunt mărimi invers proporționale, scriem

a_1 .... b_1
a_2 x

$$x = \frac{a_1 \cdot b_1}{a_2}$$

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Regula de trei simplă este folosită frecvent în viața cotidiană, în chimie, în fizică, în geografie și în alte domenii.

Problemă rezolvată. Un bazin de înot ar putea fi umplut de trei pompe cu același debit în 45 de minute. După ce au funcționat împreună 30 de minute, două dintre pompe sunt oprite. Calculați timpul necesar pompei rămase în funcțiune pentru a umple bazinul.

Rezolvare. Timpul de funcționare a pompelor și nivelul de umplere a bazinului sunt mărimi *direct proporționale*. Prin urmare, putem folosi regula de trei simplă pentru a afla ce parte din bazin s-a umplut în cele 30 de minute.

45 min .... 1 (întregul bazin)
30 min .... x (parte din bazin)

Obținem $\frac{45}{1} = \frac{30}{x}$, deci $x = \frac{30 \cdot 1}{45} = \frac{2}{3}$.

Știm că funcționând împreună, cele 3 pompe umplu bazinul în 45 de minute. Numărul de pompe folosite și timpul de umplere sunt mărimi *invers proporționale*, deci putem folosi regula de trei simplă pentru a afla în cât timp ar umple bazinul o singură pompă.

3 pompe .... 45 min
1 pompă .... y

Obținem $3 \cdot 45 = 1 \cdot y$, deci $y = \frac{3 \cdot 45}{1} = 135$ (min).

Dacă în cele 30 de minute s-au umplut două treimi din bazin, atunci pompa rămasă în funcțiune trebuie să umple *o treime* din bazin, *singură*.
Timpul de funcționare și nivelul de umplere sunt mărimi *direct proporționale*. Folosim regula de trei simplă pentru a afla în cât timp pompa rămasă în funcțiune umple o treime din bazin.

1 bazin .... 135 min
$\frac{1}{3}$ bazin .... z

$\frac{1}{135} = \frac{\frac{1}{3}}{z}$, deci $z = \frac{135 \cdot \frac{1}{3}}{1} = \frac{135}{3} = 45$ (min).

În concluzie, pompa rămasă în funcțiune trebuie să mai funcționeze încă 45 de minute.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Din 20 kg de caise se fac 12 kg de dulceață. Calculați cantitatea de dulceață care se obține din 25 kg de caise.

2. O echipă de 20 de muncitori poate termina o lucrare în 15 zile. Calculați:
a) în câte zile pot termina lucrarea 15 muncitori;
b) de câți muncitori este nevoie pentru a termina lucrarea în 10 zile.

3. Familia lui Ionel pleacă într-o excursie cu mașina. Pentru a se deplasa 500 km, mașina ar consuma 35 de litri de benzină.
a) Determinați cantitatea de benzină necesară, dacă familia lui Ionel ar reduce distanța parcursă cu 100 km.
b) Calculați suma de bani economisită în condițiile a), știind că un litru de benzină costă 7 lei.

4. Pentru a lista un document de 54 de pagini, o imprimantă funcționează 9 minute. Calculați în câte minute se va lista, la aceeași imprimantă, un document de 270 de pagini.

5. O societate comercială trebuie să achiziționeze cinci mașini noi, fiecare având prețul de 12 000 euro. Determinați numărul de mașini pe care le-ar putea cumpăra societatea comercială dacă prețul pentru o mașină ar deveni 15 000 euro.

6. O fermă are nevoie de oameni la culesul viei. Știind că 36 de persoane reușesc să culeagă via în 6 zile, aflați de câți oameni are nevoie ferma pentru a termina de cules via în cel mult 4 zile.

7. Pentru a realiza un proiect școlar este nevoie de 4 elevi, fiecare lucrând 5 ore. Calculați cât timp ar trebui să lucreze fiecare elev pentru realizarea proiectului, dacă celor 4 elevi li s-ar alătura încă 2 colegi.

8. Dan ajută la amenajarea laboratorului de informatică și lucrează 6 ore pentru a transporta aparatura necesară. Sandu ar realiza același lucru în 10 ore. Calculați în cât timp ar transporta aparatura cei doi elevi, lucrând împreună.

9. O echipă formată din trei tipografi se pregătesc să realizeze un pliant. Primul și al doilea, împreună, ar finaliza pliantul în 6 ore, al doilea și al treilea, împreună, l-ar finaliza în 12 ore, iar primul și al treilea în 8 ore.
   a) Calculați în cât timp ar realiza pliantul fiecare tipograf, lucrând singur.
   b) Calculați în cât timp cei trei tipografi ar realiza pliantul, lucrând împreună.

10. În două borcane de același fel încap 800 grame de gem. Calculați numărul borcanelor de gem pe care trebuie să le cumpere o gospodină pentru a avea 2 kg de gem.

11. Sara și Dora cumpără șampon de același fel, Sara plătește 30 de lei pentru un recipient de 800 ml, iar Dora plătește 18 lei pentru un recipient de 500 ml. Decideți argumentat care dintre cele două fete a cumpărat mai avantajos șamponul.

12. Calculați numărul rochiilor care se pot confecționa din 88 m^2 de material, știind că din 33 m^2 s-au confecționat 15 rochii de același fel.

13. O echipă de muncitori ar termina de zidit o cincime dintr-o clădire în 8 zile.
   a) Determinați numărul de zile în care aceeași echipă ar zidi un sfert din clădire.
   b) Determinați numărul de zile în care aceeași echipă ar termina de zidit întreaga clădire.

14. Dacă s-ar deplasa cu viteza medie de 24 km/h, un biciclist ar ajunge la destinație în 3 ore. Calculați:
   a) viteza medie cu care trebuie să se deplaseze biciclistul pentru a ajunge la destinație în două ore și jumătate.
   b) durata deplasării biciclistului până la destinație, exprimată în minute, dacă acesta s-ar deplasa cu viteza medie de 30 km/h.

15. Iulian cumpără 18 albume pentru fotografii, fiecare având prețul de 24 de lei. Calculați numărul albumelor pe care le-ar cumpăra Petru, cu aceeași sumă, dacă un album ar costa 27 de lei.

Minitest

1. Completați spațiile libere astfel încât să obțineți afirmații adevărate.
   30 p **a)** Dacă 8 caiete costă 60 lei, atunci 9 caiete de același fel, vor costa … lei
   30 p **b)** Dacă o lucrare este finalizată de 16 muncitori în 20 de zile, atunci 40 de muncitori vor finaliza lucrarea în … zile.

30 p 2. Un biciclist ajunge la destinație în 2 ore, deplasându-se cu viteza medie de 30 km/h. Determinați viteza medie de deplasare a biciclistului pentru a ajunge la destinație într-o oră și jumătate.

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

L6 Procente. Rapoarte în viața cotidiană

Ne amintim

Un raport de forma $\frac{p}{100}$ se numește *raport procentual*.
Un raport procentual se notează $p\%$ și se citește „p la sută" sau „p procente".

$\frac{25}{100} \overset{not}{=} 25\ \%$

Orice raport poate fi exprimat ca raport procentual prin amplificări sau simplificări.

$^{25)}\frac{1}{4} = \frac{25}{100}$

Prin urmare, $p\%$ dintr-un număr natural a este produsul $\frac{p}{100} \cdot a = \frac{p \cdot a}{100} = (p \cdot a)\ \%$, iar $p\%$ dintr-o fracție $\frac{a}{n}$, $n \neq 0$ este produsul $\frac{p}{100} \cdot \frac{a}{n} = \frac{p \cdot a}{100 \cdot n} = \frac{p \cdot a : n}{100} = (p \cdot a : n)\ \%$.

25% din 500 este $\frac{25}{100} \cdot 500 = \frac{12500^{(100}}{100} = 125$.

25% din $\frac{2}{5}$ este $\frac{25}{100} \cdot \frac{2}{5} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$.

În aplicații, dacă numărul b reprezintă $p\%$ din numărul a, scriem $\frac{p}{100} \cdot a = b$ sau $\frac{p}{100} = \frac{b}{a}$.

Oricare dintre numerele p, a, b din proporția de mai sus se poate exprima în funcție de celelalte două, astfel:

$p = \frac{b}{a} \cdot 100$; $a = \frac{b}{p} \cdot 100$; $b = \frac{p}{100} \cdot a$.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Prin dizolvarea unei substanțe în apă se obține o *soluție apoasă*.

Problema **1.**
Flavius amestecă 50 g de zahăr cu 150 g de apă și obține o *soluție*.
a) Calculați masa soluției obținute.
b) Calculați raportul dintre masa de zahăr și masa soluției. Exprimați raportul găsit ca raport procentual.

Rezolvare. Notăm m_s masa soluției, cu $m_{apă}$ masa apei și cu m_z masa zahărului.

a) Atunci, $m_s = m_z + m_{apă} = 50\text{ g} + 150\text{ g}$, deci $m_s = 200$ g.

b) $\frac{m_z}{m_s} = \frac{50}{200} = \frac{25}{100}$, deci $\frac{m_z}{m_s} = 25\%$.

Notând cu c raportul dintre masa de zahăr și masa soluției, scriem $c = 25\%$ și vom spune că soluția de zahăr și apă obținută are concentrația de 25%.

Concentrația unei soluții este cantitatea de substanță dizolvată, pentru a obține 100 g de soluție.

Dacă 500 g soluție conține 30 g sare, atunci concentrația soluției se determină prin regula de trei simplă, sau se exprimă prin raportul $\frac{30}{500}$.

Matematic, concentrația unei soluții este raportul dintre *masa substanței* care se dizolvă și *masa soluției*.
Concentrația unei soluții se exprimă, de regulă, printr-un raport procentual.

500 g soluție .... 30 g sare
100 g soluție .... x g sare

$\Rightarrow x = \frac{100 \cdot 30}{500} = 6$.

Prin urmare, soluția are concentrația $c = \frac{6}{100}$ sau $c = 6\%$.

În mod similar, topind împreună două metale, se obține un *aliaj*. Multe aliaje sunt folosite în diferite domenii de activitate. De exemplu, oțelul este folosit în construcții și este un aliaj de fier (Fe) și carbon (C).

Se folosesc frecvent aliaje cu *metale prețioase* în medicină, în electronică, pentru crearea bijuteriilor etc. Proprietățile și valoarea aliajului depind de *titlul* acestuia.

Titlul unui aliaj este masa metalului adăugat (a metalului prețios) pentru a obține 100 g de aliaj.

Matematic, titlul unui aliaj este raportul între *masa metalului* prețios și *masa aliajului*.

Titlul unui aliaj se exprimă, de regulă, printr-un raport procentual.

Dacă se topesc împreună 2 g de aur și 8 g de cupru, se obțin 10 g de aliaj.
Notăm cu m_{Au} masa aurului, cu m_{Cu} masa cuprului și cu m masa aliajului. Atunci, $m = m_{Au} + m_{Cu}$, iar titlul aliajului se determină fie cu regula de trei simplă pentru mărimi direct proporționale, fie calculând raportul $T = \frac{m_{Au}}{m} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0,2 = 20\%$.
Titlul aliajului este $T = 20\%$, adică în 100 g de aliaj sunt 20 g de aur.

Hărțile au apărut din nevoia de orientare în spații a căror întindere depășește posibilitățile noastre de cuprindere. Hărțile păstrează detaliile prin micșorarea proporțională a distanțelor dintre puncte.
Dacă vom lua două puncte oarecare A și B, pe hartă și corespondentele lor A_1 și B_1, în teren, atunci raportul $\frac{AB}{A_1B_1}$ este constant. (are aceeași valoare, oricare ar fi perechea de puncte A și B).
Raportul descris mai sus, exprimat, de regulă, printr-o fracție cu numărătorul 1 se numește *scara* hărții.

Scara unei hărți este raportul dintre distanța măsurată pe hartă și aceeași distanță, măsurată în teren cu aceeași unitate de măsură.

Dacă distanța în teren, între orașele A și B este de 50 km = 5 000 000 cm, iar pe hartă este de 5 cm, atunci harta este realizată la scara de $\frac{5}{5000000} = \frac{1}{1000000}$ sau 1: 1 000 000.

Observații. Scara unei hărți arată de câte ori sunt mai mici distanțele pe hartă față de aceleași distanțe în teren.

Investigație: *Fibonacci și raportul de aur*

Formați trei grupe de lucru. Citiți cu atenție textele de mai jos, apoi accesați manualul digital. Veți găsi detaliile propunerii de investigație pentru fiecare grupă, atât scris cât și dinamic.
În viața cotidiană, întâlnim la tot pasul rapoarte și proporționalități.
1. Un raport celebru, numit *raportul de aur* este prezent în tot ce ne înconjoară: în natură, în artă, în arhitectură, chiar și în ADN-ul uman. Valoarea raportului de aur este notată cu φ și este aproximativ egală cu 1,618.

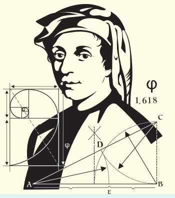
2. *Secțiunea de aur* presupune împărțirea unui unui segment în *raportul de aur* adică stabilirea poziției unui punct M, situat pe segmentul AB, astfel încât $\frac{MB}{MA} = \frac{AB}{MB} = \varphi$.

$$\frac{AB}{MB} = \frac{MB}{MA} = \varphi \approx 1,618$$

A M B

Dacă $MA = a$ și $MB = b$, atunci $AB = a + b$, iar $\frac{MB}{MA} = \frac{AB}{MB}$ se scrie $\frac{b}{a} = \frac{a+b}{b}$ și se numește *proporția de aur*.

3. Șirul de numere naturale, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, … este numit *șirul lui Fibonacci*.
În acest șir, fiecare termen, începând cu al treilea, este suma ultimilor doi termeni anteriori: 2 = 1 + 1; 3 = 2 + 1; 5 = 3 + 2; 8 = 5 + 3 …
Numerele din șirul de mai sus au fost observate în natură și au fost folosite în activitatea oamenilor din timpuri străvechi.



Temă de portofoliu.
1. Prezentați rezultatele investigației tuturor colegilor de clasă.
2. Stabiliți conexiuni între rezultatele obținute de grupa din care faceți parte și cele ale colegilor din celelalte grupe și completați-vă portofoliul personal cu datele relevante.

Ştim să aplicăm, identificăm conexiuni

Probleme rezolvate

1. Se dizolvă sare în apă şi se obţine o soluţie cu concentraţia de 8%. Calculaţi cantitatea de sare dizolvată, pentru obţinerea a 500 g soluţie.

Rezolvare. Notăm m_s masa sării dizolvate şi m masa soluţiei. $c=\dfrac{m_s}{m}$, deci $\dfrac{8}{100}=\dfrac{m_s}{500}$, adică $m_s=\dfrac{8\cdot 500}{100}=40$ (g).

Răspuns: Se dizolvă 40 g de sare în 460 g de apă.

2. 400 g de aliaj aur-cupru are titlul 0,825. Determinaţi cantitatea de aur pe care trebuie să o adăugăm, pentru a obţine un aliaj cu titlul 0,875.

Rezolvare. Fie m_1 masa aurului folosit pentru primul aliaj. Atunci, $\dfrac{m_1}{400}=0,825$, de unde $m_1=400\cdot 0,825=330$ (g).

Noul aliaj se formează prin adăugarea unei cantităţi x grame de aur. Atunci, masa aurului din noul aliaj este $330+x$, iar masa aliajului este $400+x$. Cum titlul aliajului este 0,875, obţinem proporţia $\dfrac{330+x}{400+x}=\dfrac{875^{(125}}{1000}$, echivalentă cu $\dfrac{330+x}{400+x}=\dfrac{7}{8}$. Cu proporţii derivate, obţinem $\dfrac{330+x}{70}=\dfrac{7}{1}$.

Din proprietatea fundamentală a proporţiei, putem scrie $330+x=490$, deci $x=490-330=160$ (g).

Răspuns: Se adaugă 160 g aur.

3. Scara unei hărţi este 1: 400 000.
Calculaţi distanţa, pe teren, între două localităţi, ştiind că, pe hartă, aceasta este de 16 cm.

I. Evident distanţa în teren şi distanţa pe hartă sunt mărimi direct proporţionale.
Folosind regula de trei simplă, avem:
1 cm .... 400 000 cm
16 cm .... x cm
$x=16\cdot 400\,000=6\,400\,000$ (cm)

II. Folosind definiţia scării unei hărţi, scriem $\dfrac{1}{400\,000}=\dfrac{16}{x}$.
Termenul necunoscut al proporţiei este $x=16\cdot 400\,000=6\,400\,000$ (cm).

Răspuns: $d=6\,400\,000$ cm $=64$ km.

Observaţie. În multe situaţii practice, regula de trei simplă oferă mai multă siguranţă în raţionament.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Exprimaţi sub formă de raport procentual: $\dfrac{27}{100}$; $\dfrac{71}{100}$; $\dfrac{13}{50}$; $\dfrac{1}{20}$; $\dfrac{11}{10}$; 0,2; 1,75.
2. Scrieţi ca rapoarte, exprimate prin fracţii ordinare ireductibile: 50%, 80%, 17,5%, 120%.
3. Calculaţi:
   a) 20% din 225 lei;
   b) 35% din 440 litri;
   c) 12,5% din 500 kg.
4. Determinaţi numărul cu 25% mai mare decât 300.
5. Ioana a avut 300 de lei, din care a cheltuit 20%.
   a) Calculaţi suma de bani cheltuită de Ioana.
   b) Exprimaţi ca raport procentual suma care i-a rămas Ioanei.
6. După ce s-au vândut 40% din numărul biletelor pentru o reprezentaţie la teatru, au mai rămas 120 de bilete nevândute. Determinaţi numărul biletelor care au fost puse în vânzare pentru această reprezentaţie.
7. Calculaţi concentraţia soluţiei obţinute dacă:
   a) în 175 g de apă se dizolvă 25 g de sare;
   b) se dizolvă 20 g de sare în 140 g de apă.
8. Completaţi spaţiile libere pentru a obţine propoziţii adevărate.
   a) Prin dizolvarea a 45 g de zahăr în apă, s-au obţinut 450 g de soluţie. Concentraţia acestei soluţii este de ...%.
   b) În 450 g de apă se dizolvă 50 g de zahăr. Concentraţia soluţiei obţinute este ...%.

9. Completați spațiile libere astfel încât să obțineți propoziții adevărate.

a) Numărul 63 reprezintă ...% din 90.

b) Numărul 100 000 reprezintă ...% din 9 250 000.

c) Dacă 125% dintr-un număr este numărul 1800, atunci numărul inițial este ... .

d) 2500 kg fructe sunt distribuite la 3 cantine. O cantină primește 30% din cantitate, iar o altă cantină primește 24% din cantitatea rămasă. Cantitatea primită de a treia cantină este de ... kg de fructe.

10. Se topesc împreună 800 g de aliaj de argint și aluminiu cu titlul 0,35 și 200 g de argint pur.

a) Calculați titlul noului aliaj.

b) Calculați cantitatea de argint pur conținută de noul aliaj.

11. Calculați titlul unui aliaj de cupru și aur, știind că:

a) acesta conține 240 g de aur și 960 g de cupru.

b) acesta se formează, topind împreună 100 g aur și 300 g de cupru.

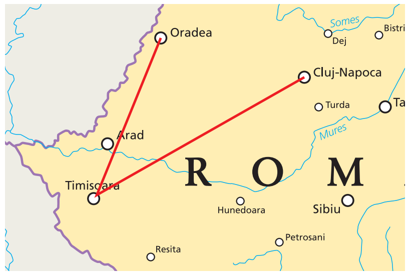
12. Determinați cantitatea de argint care se găsește în 1800 g de aliaj cu titlul 0,125.

13. Pe o hartă cu scara 1:1 000 000, distanța dintre două orașe este de 12 cm.

a) Calculați distanța, pe teren, dintre cele două orașe.

b) Determinați distanța pe hartă dintre aceleași orașe, dacă harta ar fi realizată la scara 1:1 500 000.

14. Ioana unește punctele corespunzătoare orașelor Timișoara și Oradea pe hartă, printr-un segment care are lungimea de 3 cm.



a) Știind că distanța dintre cele două orașe, în teren, este aproximativ 150 km, calculați raportul care exprimă scara hărții.

b) Determinați distanța în teren între Timișoara și Cluj-Napoca, știind că, pe aceeași hartă, orașele sunt unite printr-un segment de 4,5 cm.

c) Calculați, în două moduri, distanța dintre Oradea și Timișoara pe o hartă cu scara 1:5 000 000.

Minitest

1. Alegeți litera care indică varianta corectă de răspuns. Doar un răspuns este corect.

15 p **a)** 50% din 350 kg, reprezintă:

A. 125 kg; **B.** 225 kg; **C.** 175 kg; **D.** 225 kg.

15 p **b)** Ionel a cheltuit 35% din cei 400 lei pe care îi avea. Suma de bani rămasă este:

A. 260 lei; **B.** 140 lei; **C.** 160 lei; **D.** 240 lei;

15 p **c)** Dacă numărul 18 reprezintă 25% din numărul b, atunci numărul b este egal cu:

A. 36; **B.** 54; **C.** 63; **D.** 72.

15 p **d)** Calculând 27% din 45% din 24 000 se obține:

A. 2196; **B.** 2691; **C.** 2916; **D.** 2961

10 p **2.** Calculați titlul unui aliaj care conține 50 g de aur și 250 g de cupru.

20 p **3.** Calculați cantitatea de sare pe care trebuie să o adăugăm în 600 g de soluție care are concentrația 15%, pentru a crește concentrația la 25%.

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

2.2. Elemente de organizare a datelor

L1 Reprezentarea datelor prin grafice în contextul proporționalității. Reprezentarea datelor cu ajutorul unor softuri matematice

Ne amintim

Un studiu statistic se realizează în scopul cunoașterii, interpretării, evaluării și reglării unui fenomen.
Fenomenul la care se referă studiul se numește *caracteristică* sau *variabilă* și descrie un număr de *subiecți* (persoane, grupuri de persoane, anumite tipuri de obiecte), care formează *populația statistică*. Numărul total de subiecți se numește *efectivul total* al populației statistice.
Caracteristica (variabila) studiată se poate exprima prin *valori numerice* sau prin *însușiri*.
Numerele corespunzătoare respectiv însușirile pe care le poate avea *variabila* se numesc *valori* ale caracteristicii.

Rezolvăm și observăm

În următoarele două exemple, observați cu atenție cele trei moduri de prezentare a informațiilor și formulați câte un răspuns argumentat la următoarele întrebări.

1. Care dintre prezentări este mai intuitivă? (mai ușor de observat)

2. În care dintre prezentări alegem mai repede valoarea cu numărul cel mai mare de apariții? Dar pe cea cu numărul cel mai mic de apariții?

3. Pornind de la una dintre reprezentări, le putem reface pe celelalte două?

Exemplul 1. Referitor la culoarea ochilor elevilor clasei a VI-a A, avem următoarele informații:

a) Cei 24 de elevi din clasa a VI-a A au ochii:

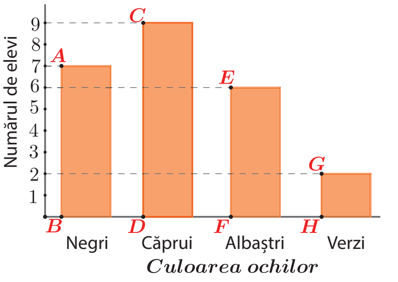
căprui, negri, caprui, albaștri, verzi, negri, căprui, negri, albaștri, albaștri, verzi, căprui, negri, negri, căprui, căprui, negri, albaștri, căprui, albaștri, negri, albaștri, căprui, căprui.

b) Culorile ochilor elevilor din clasa a VI-a A sunt:

Culoarea ochilor	*negri*	*căprui*	*albaștri*	*verzi*
Numărul de elevi	7	9	6	2

În toate variantele identificăm:
- variabila: *culoarea ochilor*;
- valorile variabilei: *negri*, *căprui*, *albaștri*, *verzi*;
- Populația statistică: elevii clasei a VI-a A;
- Efectivul populației statistice: 24.

c) Reprezentarea grafică.



Exemplul 2. Cu privire la rezultatele obținute de elevii clasei a VI-a B la testul de matematică, avem următoarele informații:

a) La testul de matematică, elevii clasei a VI-a B au obținut notele:

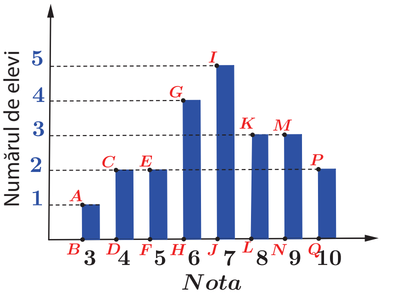
8, 9, 5, 3, 4, 7, 8, 7, 6, 6, 10, 5, 6, 7, 4, 9, 10, 9, 6, 7, 8, 7.

b) La testul de matematică, elevii clasei a VI-a B au obținut următoarele rezultate:

Nota la test	3	4	5	6	7	8	9	10
Numărul de elevi	1	2	2	4	5	3	3	2

În toate variantele identificăm:
Variabila: *nota la test;*
Valorile variabilei: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
Populația statistică: elevii clasei a VI-a B.
Efectivul populației statistice: 22.

c) Rezultatele obținute la test de elevii clasei a VI-a B



Rezolvare

1. În fiecare exemplu, este mai intuitivă reprezentarea vizuală, prin diagrame.

2. Putem alege repede valoarea cu numărul cel mai mare sau pe cea cu numărul cel mai mic de apariții din tabelul de date sau din reprezentarea prin diagrame. Dacă numărul valorilor ar fi mare, atunci ar fi avantajos să lucrăm cu diagrame.

3. Cele trei variante oferă aceleași informații, deci se pot reconstitui pe baza uneia dintre ele.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Rezultatul comparației între cele trei moduri de prezentare a acelorași informații justifică necesitatea *sortării*, a organizării datelor statistice în *tabele de date* și utilitatea reprezentării sub formă de *diagrame* sau *grafice*.

Definiție. *Numărul apariției* unei valori a variabilei în populația statistică se numește *frecvența* absolută a acestei valori.	*Exemple*: În exemplul 1, valoarea *căprui* are frecvența 9, valoarea *verzi* are frecvența 2. În exemplul 2, valoarea 7 are frecvența 5.

Tabelele de frecvență asociază fiecărei valori a variabilei, frecvența acesteia. Pe baza tabelelor de frecvențe se realizează diagrame cu bare (verticale sau orizontale), diagrame circulare, grafice și altele.

Lungimea barelor reprezentate și frecvența absolută a valorilor caracteristicii sunt mărimi direct proporționale, adică *mulțimea lungimimilor barelor* este în raport de proporționalitate directă cu *mulțimea frecvențelor absolute* corespunzătoare.

Astfel, în *exemplul* 2, cu notațiile de pe diagrame, au loc egalitățile $\frac{AB}{1}=\frac{CD}{2}=\frac{EF}{2}=\frac{GH}{4}=\frac{IJ}{5}=\frac{KL}{3}=\frac{MN}{3}=\frac{QP}{2}$, iar în *exemplul* 1, au loc egalitățile $\frac{AB}{7}=\frac{CD}{9}=\frac{EF}{6}=\frac{GH}{2}$.

Suntem acum în măsură să precizăm fără dubii că nota obținută de cei mai mulți elevi este nota corespunzătoare barei cu lungimea cea mai mare, adică nota 7, iar nota obținută de cei mai puțini elevi este cea corespunzătoare celei mai scurte bare, adică nota 3.

Observând reprezentarea prin diagrame de la exemplul 2, putem *estima*, intuitiv, media clasei la *aproximativ* 7. Aceasta este doar o estimare, iar rezultatul exact se obține calculând *media aritmetică* a tuturor notelor obținute.

Informațiile din tabelul de date „Nota la test" ne permit să calculăm *media* obținută de clasă la această evaluare, numită *media setului de date numerice*.

Pentru seria de date statistice „Nota la test", media setului de date este numărul

$$m_a=\frac{3+4+4+5+5+6+6+6+6+7+7+7+7+7+8+8+8+9+9+9+10+10}{22}=$$

$$=\frac{3+4\cdot2+5\cdot2+6\cdot4+7\cdot5+8\cdot3+9\cdot3+10\cdot2}{22}=6,8(63).$$

Cu *două zecimale exacte*, obținem $m_a=6,86$, care ne arată că estimarea a fost foarte bună.

Observație. Sunt și situații în care este dificil să facem estimări atât de apropiate de media obținută prin calcul.

Reținem!

Media unui *set de date numerice* este *media aritmetică* a tuturor *valorilor variabilei* acestuia.

Media se calculează, de regulă, cu *două zecimale exacte*.

Observație. Dacă variabila nu este numerică (valorile sale se exprimă prin însușiri), atunci *nu există media* setului de date corespunzător.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicație: La testul inițial, cei 24 de elevi ai clasei a VI-a au obținut notele: 4, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 10, 10.

a) Sortați și organizați datele de mai sus în *tabelul de frecvențe*.

b) Realizați diagrama prin bare orizontale (benzi).

Rezolvare.

a)

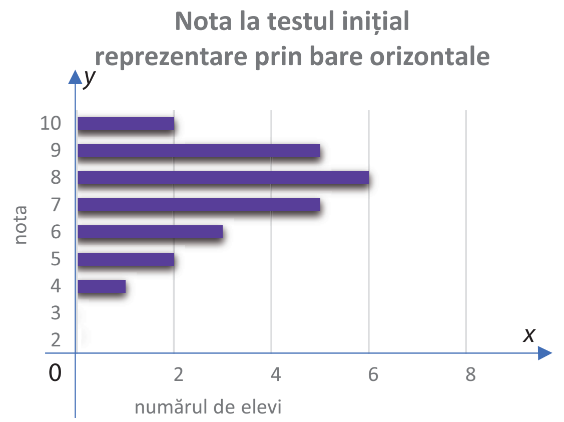
Nota	4	5	6	7	8	9	10
Frecvența/ numărul elevilor	1	2	3	5	6	5	2

b) Considerăm două semidrepte cu originea comună, una în poziție orizontală, notată *Ox* și una în poziție verticală, notată *Oy*.

Pe axa *Oy* trecem *valorile caracteristicii*, iar pe axa *Ox* scriem frecvențele corespunzătoare acestor valori.

Se reprezintă apoi *bare* orizontale, cu un capăt pe axa *Oy*, în punctele corespunzătoare *valorilor* variabilei și cu lungimea proporțională cu *frecvența* acestei valori.

Lungimea benzilor și frecvența absolută a valorilor caracteristicii sunt mărimi direct proporționale, adică *mulțimea lungimilor benzilor* este în raport de direct proporționalitate cu *mulțimea frecvențelor absolute* corespunzătoare.



În unele studii, frecvența absolută a valorilor nu oferă o imagine clară asupra fenomenului. Atunci, este avantajos să cunoaștem *ponderea unei valori* în raport cu *efectivul* total al populației studiate.

Raportul dintre *frecvența absolută* a unei valori *și efectivul populației* statistice se numește *frecvență relativă* a acestei valori.

Exemple:

În „Nota la testul inițial", valoarea 6 are frecvența relativă $\frac{3}{24}=\frac{1}{8}=0{,}125$,

iar valoarea 8 are frecvența relativă $\frac{6}{24}=\frac{1}{4}=0{,}25$.

Frecvența relativă este, de regulă, exprimată printr-un raport *procentual*, ceea ce permite realizarea de interpretări comparative ale comportamentului valorilor variabilei.

Exemplu. În aplicația de mai sus, nota 4 are frecvența 1, iar efectivul clasei este 24. Frecvența relativă a notei 4 este $\frac{1}{24}=4{,}1(6)\%$.

În mod analog, obținem frecvențele celorlalte note: 8,(3)%, 12,5%, 20,8(3)%, 25%, 8,(3)%,

Pentru reprezentarea prin diagrame, folosind rapoarte procentuale, se pot face aproximări ale fracțiilor zecimale la întregi, având grijă ca suma totală să fie o sută de procente, deci un întreg.

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Frecvența relativă exprimată prin raport procentual	4%	8%	13%	21%	25%	21%	8%

Diagrama circulară ne oferă posibilitatea de a interpreta procentual frecvențele valorilor.

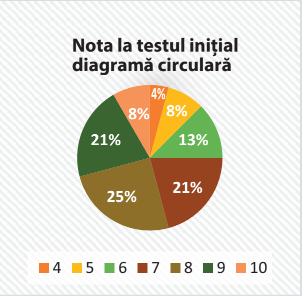
Diagrama circulară este un disc divizat în sectoare de cerc.

Măsurile arcelor de cerc corespunzătoare frecvențelor sunt *direct proporționale* cu *frecvențele* și se determină folosind *regula de trei simplă*.
Știm că măsura cercului este 360°, iar suma măsurilor arcelor corespunzătoare unghiurilor în jurul unui punct este egală cu măsura cercului. De exemplu: 6 elevi din cei 24 au obținut nota 8 la test.

Deci, 24 elevi .... 360°

6 elevi .... x°

Obținem $x = \dfrac{6 \cdot 360^\circ}{24} = 90^\circ$, care reprezintă 25% din 360°, la fel cum 6 elevi reprezintă 25% din 24 elevi.



Tehnica modernă oferă posibilitatea realizării diagramelor și a graficelor cu ajutorul unor softuri specializate. Consultați *manualul digital* pentru a învăța modul în care se realizează diagrame sau grafice, folosind Excel sau Microsoft Word.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. La un centru de învățare a limbilor străine s-au înscris 100 de tineri. Aceștia învață una din limbile: engleză, franceză, germană.
Copiați pe caiete și completați tabelul următor cu numărul fetelor și numărul băieților care studiază fiecare limbă străină.

	Engleză	Franceză	Germană	Total
Număr fete	32			53
Număr băieți			8	47
Total	64		17	100

2. În blocul 1, de pe strada Bunăvoinței, locuiesc 30 de familii. Fiecare familie are cel mult 4 copii, după cum rezultă din tabelul de date alăturat.

Nr copii	0	1	2	3	4
Nr familii	5	9	8	6	2

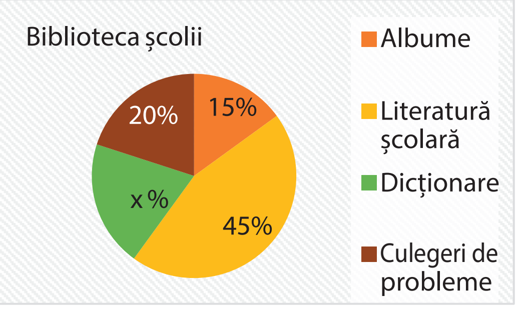
a) Identificați variabila setului de date și valorile acesteia.
b) Determinați numărul copiilor care locuiesc în acest bloc.
c) Identificați frecvența valorii 2 în setul de date (numărul de familii care au doi copii).
d) Precizați valoarea care are cea mai mare frecvență și valoarea care are cea mai mică frecvență.
e) Calculați câte familii au cel puțin 2 copii. Exprimați rezultatul printr-un raport procentual.
f) Calculați câte familii au cel mult un copil. Exprimați rezultatul printr-un raport procentual.

3. În fiecare an, echipa cu care participă România la Olimpiada Internațională de Matematică este formată din șase elevi, fiecare elev având posibilitatea să obțină, în funcție de punctaj, medalie de aur, medalie de argint sau medalie de bronz.
Potrivit site-ului oficial al IMO, în ultimii cinci ani, componenții lotului României au obținut medalii, după cum rezultă din tabelul de mai jos.
a) Determinați numerele x, y, z, pentru ca tabelul să fie complet.
b) Calculați numărul total de medalii de fiecare fel obținute de echipa României în ultimii cinci ani.
c) Exprimați în procente, pentru fiecare an, numărul medaliilor de aur, raportat la totalul de medalii obținute în acel an.
d) Aproximați procentele la întregi, apoi alcătuiți o diagramă circulară cu rezultatele obținute la subpunctul c), folosind un soft matematic.

Anul	aur	argint	bronz	total
2022	2	4	0	6
2021	0	x	2	5
2020	y	2	3	6
2019	1	2	3	6
2018	1	1	z	4

4. Diagrama următoare prezintă, în procente, componența bibliotecii unei școli.
Se știe că numărul culegerilor de probleme este 240.

a) Determinați procentul reprezentat de numărul de dicționare din bibliotecă.
b) Calculați numărul total al cărților din bibliotecă.
c) Folosind diagrama, calculați numărul cărților de fiecare fel, apoi completați tabelul următor.



Felul cărții	Culegeri de probleme	Literatură școlară	Albume	Dicționare
Nr. de cărți				

d) Folosind datele din tabel, alcătuiți o diagramă cu bare verticale folosind Excel sau Microsoft word.

Minitest

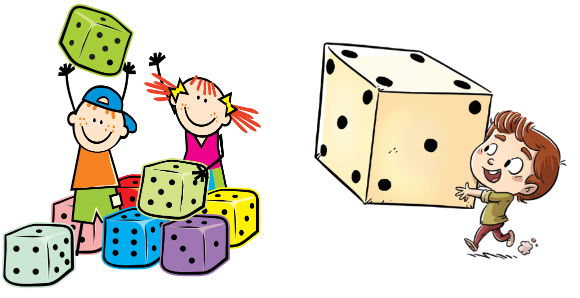
Pentru desemnarea liderului de grup pentru o acțiune de voluntariat, au votat toți membrii grupului și au candidat patru elevi: Matei a obținut 30% din voturi, Rareș a obținut 25% din voturi, Emil a obținut 20% din voturi, iar Claudiu a obținut restul, de 10 voturi. Va fi liderul grupului cel care obține mai multe voturi.

25 p **a)** Calculați procentul de voturi obținute de Claudiu, știind că nu au fost voturi anulate.
25 p **b)** Precizați, argumentat, cine va fi desemnat liderul grupului.
20 p **c)** Calculați numărul de voturi obținute de fiecare candidat.
20 p **d)** Realizați tabelul frecvențelor seriei statistice „liderul de grup", pe baza rezultatelor obținute la subpunctul b).

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

L2 Probabilități

Matei și Miruna au invitat mai mulți prieteni la ei. Își pregătesc jocurile pe care vor să le joace împreună.
Miruna: – Cine începe jocul?
Matei: – Cel care obține zarul cel mai mare.
Se apropie și fratele lor mai mic, Mihnea, strigând:
– Eu am zarul cel mai mare.
Miruna și *Matei*: – Ha, Ha! Ce drăguț!
Miruna: – Nu așa, trebuie să arunci zarul pe masă și să obții puncte mai multe decât ceilalți jucători.



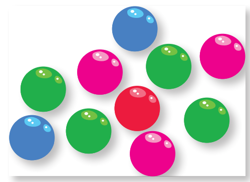
a) Decideți dacă regula conform căreia jocul este început de jucătorul care obține cel mai bun punctaj la aruncarea zarului este în avantajul vreunui jucător.
b) Descrieți o situație în care ați folosit o modalitate de a alege făcând apel la hazard (întâmplare). De exemplu: aruncarea monedei, alegerea, cu ochii închiși, a unei persoane sau a unui obiect, Ala-Bala-Portocala-…

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Considerăm următoarele situații practice:

1. Un zar cu fețele numerotate de la 1 la 6 se aruncă pe o suprafață orizontală. Aruncarea are ca rezultat apariția unei singure fețe în poziție orizontală, fiind vizibil numărul înscris pe această față.

2. Într-o urnă sunt 4 bile verzi, 3 bile roz, 2 bile albastre și 1 bilă roșie. Acestea diferă doar prin culoare. Extragerea unei bile, fără a o privi, conduce la obținerea unei bile care are una dintre cele 4 culori.



3. O monedă are două fețe diferite. Aruncarea monedei pe o suprafață orizontală are ca rezultat afișarea exact a uneia dintre cele două fețe.

Fiecare dintre situațiile descrise mai sus se poate repeta ori de câte ori dorim, în aceleași condiții.

Acestea se numesc *experimente aleatoare*.

Fiecare repetare a experimentului se numește *probă*.

În legătură cu un experiment se pot formula mai multe *evenimente*.

1. *Experiment*: Aruncarea zarului;

Evenimente: $\mathbf{A_1}$: Se obține fața 1; $\mathbf{A_2}$: Se obține fața 2;… $\mathbf{A_6}$: Se obține fața 6. $\mathbf{B_1}$: Se obține un număr par; $\mathbf{B_2}$: Se obține un număr impar. $\mathbf{B_3}$: Se obține un număr mai mic decât 7;

$\mathbf{B_4}$: Se obține numărul 7.

2. *Experiment*: Extragerea unei bile din urna cu 4 bile verzi, 3 bile roz, 2 bile albastre și 1 bilă roșie.

Evenimente: **A:** Se obține o bilă roșie; **B**: Se obține o bilă roz; **C:** Se obține o bilă verde sau roz; **D:** Se obține o bilă albastră.

În exemplele de mai sus, observăm că unele evenimente *se realizează întotdeauna* ($\mathbf{B_3}$), altele *nu se realizează niciodată* ($\mathbf{B_4}$), iar altele se *pot realiza sau nu* ($\mathbf{A_1}$, …, $\mathbf{B_2}$, **A**, **B**, **C**, **D**).

Un eveniment care se realizează la fiecare repetare a experimentului se numește *eveniment sigur*.	*Exemplu*: La aruncarea zarului se obține un număr natural cel puțin egal cu 1 și cel mult egal cu 6.
Un eveniment care nu se realizează niciodată se numește *eveniment imposibil*.	*Exemplu*: La aruncarea zarului se obține un număr natural multiplu al numărului 7.
Un eveniment care nu este nici sigur, nici imposibil, se numește *eveniment aleator*. Realizarea acestuia este supusă hazardului.	*Exemple*: 1. La aruncarea zarului se obține fața 4. 2. La aruncarea zarului se obține un număr impar.
S-a constatat că la un număr suficient de mare de probe, raportul între numărul de realizări ale unui eveniment și cel al numărului de probe este aproximativ egal cu raportul dintre numărul *cazurilor favorabile* și cel al *cazurilor posibile*.	*Exemplu:* La o *aruncare a zarului*, sunt *posibile* 6 situații: fața 1, fața 2, fața 3, fața 4, fața 5, fața 6. Acestea sunt *cazurile posibile* ale acestui experiment. Fețele 1, 3, 5 sunt *cazurile favorabile* evenimentului $\mathbf{B_2}$. Fața 6 este singurul *caz favorabil* pentru evenimentul $\mathbf{A_6}$.

Frecvența de realizare a unui eveniment este caracterizată de *raportul între numărul cazurilor favorabile evenimentului și numărul cazurilor posibile ale experimentului*. Acest raport se numește *probabilitatea* de realizare a evenimentului sau *probabilitatea evenimentului*.

Probabilitatea de realizare a evenimentului M, notată $P(M)$ este *raportul* dintre numărul n_f al *cazurilor favorabile* realizării evenimentului M și numărul n al *cazurilor posibile ale experimentului.*

$$P(M)=\frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}}$$

$$P(M)=\frac{n_f}{n}.$$

Exemplu. Într-o cutie sunt 10 bile albe și 5 bile negre. Se extrage o bilă. Considerăm evenimentele: **A**: Se extrage o bilă albă; **B**: Se extrage o bilă neagră; **C**: Se extrage o bilă albă sau neagră.
Numărul *cazurilor posibile* este numărul total al bilelor din cutie, deci 15.
Sunt 10 *cazuri* (bile) *favorabile* evenimentului A, 5 *cazuri favorabile* evenimentului B și 15 *cazuri favorabile* evenimentului C. Prin urmare,

$$P(A)=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}=0,(6),\ P(B)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}=0,(3),\ P(C)=\frac{15}{15}=1.$$

Se constată ușor că, în orice experiment, numărul cazurilor favorabile unui eveniment al experimentului este un număr natural cel mult egal cu numărul cazurilor posibile. $P(M)\geq 0$, $P(M)\leq 1$, oricare ar fi M eveniment.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Exemplul 1. Aruncarea monedei

Evenimentul	**A**: Apare *banul.*	**B**: Apare *stema.*	**C**: Apar și *banul* și *stema* în același timp.	**D**: Apare *banul* sau apare *stema.*
Nr. cazurilor favorabile	1	1	0	2
Probabilitatea	$\frac{1}{2}=0,5$	$\frac{1}{2}=0,5$	$\frac{0}{2}=0$	$\frac{2}{2}=1$

Exemplul 2. Extragerea unei bile dintr-o urnă cu 4 bile verzi, 3 bile roz, 2 bile albastre și 1 bilă roșie

Evenimentul	**A**: Extrage bilă verde.	**B**: Extrage bilă roz.	**C**: Extrage bilă albastră.	**D**: Extrage bilă roșie.	**E.** Extrage bilă albă.	**F.** Extrage bilă verde sau roșie.
Nr. cazurilor favorabile	4	3	2	1	0	$4+1+5$
Probabilitatea	$\frac{4}{10}=0,4$	$\frac{3}{10}=0,3$	$\frac{2}{10}=0,2$	$\frac{1}{10}=0,1$	$\frac{0}{10}=0$	$\frac{5}{10}=0,5$

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Completați spațiile libere astfel încât să obțineți propoziții adevărate.
   a) Probabilitatea ca la aruncarea unui zar să apară cifra 6 este … .
   b) Probabilitatea ca la aruncarea unui zar să apară o cifră mai mare decât 3 este … .
   c) Probabilitatea ca la aruncarea a două zaruri suma numerelor apărute să fie mai mare decât 9 este … .

2. Maria scrie pe tablă un număr natural nenul mai mic decât 30.
   a) Calculați probabilitatea ca numărul scris să fie divizibil cu 3.
   b) Calculați probabilitatea ca numărul scris să fie divizibil cu 5.

3. Dintr-o urnă în care se află 12 bile albe, 15 bile roșii și 18 bile negre se extrage o bilă. Calculați probabilitatea realizării următoarelor evenimente:
   a) bila extrasă este roșie;
   b) bila extrasă nu este neagră;
   c) bila extrasă este albă sau neagră.

4. O urnă conţine bile, numerotate cu 3, 6, 9, 12, …, 93. Calculați probabilitatea ca extrăgând o bilă la întâmplare, pe ea să fie scris un număr:
   a) mai mic decât 50;
   b) pătrat perfect;
   c) par;
   d) impar.

5. Pe cartonașe sunt scrise numerele 5^{10}, 8^5, 16^3, 64, 4^6, 15, 125. Calculați probabilitatea ca alegând un cartonaș la întâmplare pe acesta să fie scris un număr:

a) par;
b) impar;
c) pătrat perfect;
d) cub perfect.

6. Într-un coș sunt 10 mere, 15 pere și 3 portocale. Mama îi oferă lui Mihai un fruct din acest coș. Calculați probabilitatea ca:

a) fructul oferit să fie măr;
b) fructul oferit să fie pară;
c) fructul oferit să fie portocală.

EVALUARE SUMATIVĂ

I. *Alegeți varianta corectă de răspuns. Doar un răspuns este corect.*

5 p **1.** Raportul lungimilor 0,4 dm și 12 cm este:

A. $\frac{1}{8}$ **B.** $\frac{1}{3}$; **C.** $\frac{1}{2}$; **D.** $\frac{1}{4}$.

5 p **2.** Dacă $\frac{x}{y} = 5$ și $y = 2$, atunci x este egal cu:

A. 2,5; **B.** 7; **C.** 10; **D.** 3.

5 p **3.** Numărul x din proporția $\frac{7}{3} = \frac{x}{6}$ este:

A. 14; **B.** 12; **C.** 18; **D.** 21.

5 p **4.** Calculând 4% din 40 se obține:

A. 16; **B.** 8; **C.** 0,8; **D.** 1,6.

5 p **5.** Șase stilouri costă 162 lei. Numărul stilourilor de același fel care se pot cumpăra cu 54 lei este:

A. 1; **B.** 2; **C.** 3; **D.** 4.

5 p **6.** Distanța dintre două orașe este 650 km. Pe o hartă cu scara 1:2000000, distanța dintre orașe va fi:

A. 130 cm; **B.** 65 cm; **C.** 32,5 cm; **D.** 37,5 cm.

II. *Scrieți rezolvările complete.*

10 p **1. a)** Cantitatea de 240 kg făină este împărțită în părți direct proporționale cu numerele 5, 9, respectiv 10. Determinați cea mai mică dintre cantitățile obținute.

10 p **b)** Într-o urnă sunt bile numerotate de la 1 la 20. Calculați probabilitatea ca extrăgând o bilă, la întâmplare, pe aceasta să fie scris un număr divizor al lui 30.

2. Prețul inițial al unui obiect este 700 lei, iar după o scumpire, acesta costă 784 lei.

10 p **a)** Calculați cu cât la sută s-a majorat prețul produsului.

10 p **b)** Precizați dacă la o reducere a noului preț cu 12%, prețul obținut este mai mare sau mai mic decât prețul inițial.

3. Numerele a și b sunt invers proporționale cu $\frac{1}{2}$, respectiv $\frac{1}{4}$.

10 p **a)** Arătați că $b = 2 \cdot a$

10 p **b)** Știind că $n = a + 2 \cdot b$ și $m = 3 \cdot a + b$, calculați valoarea raportului $\frac{n}{n+m}$.

Notă: Timp de lucru 50 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

Competențe specifice: 1.3; 2.3; 3.3; 4.3; 5.3; 6.3

3. MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI

3.1. Mulțimea numerelor întregi. Reprezentare pe axa numerelor. Comparare și ordonare

L1 Mulțimea numerelor întregi. Reprezentarea numerelor întregi pe axa numerelor

Ne amintim

În multe situații concrete, pornind de la un reper, sensul de parcurgere a valorilor unor mărimi fizice nu este neapărat cel pozitiv, prin urmare, aceste valori nu pot fi exprimate prin numere naturale. S-a impus, astfel, apariția unor numere numite *numere negative*.

Comentariu interdisciplinar

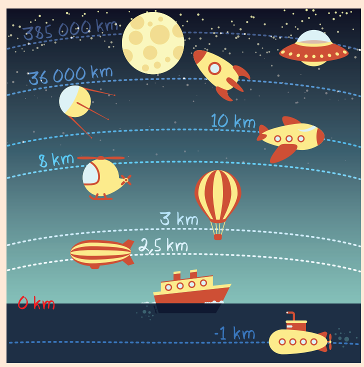
Temperatura este o mărime fizică care poate fi măsurată punând în corespondență câte o valoare numerică fiecărei stări de încălzire a corpurilor. Cunoașterea și reglarea temperaturii ambientale sau a temperaturii din anumite medii sunt foarte importante pentru confort sau pentru crearea unor condiții prielnice activității desfășurate.

Termometrul este un dispozitiv cu ajutorul căruia putem măsura temperatura aerului, temperatura apei, temperatura corpului, temperatura altor medii.
Unitatea de măsură pe care o folosim, de regulă, este *gradul Celsius* (°C).
Corpul termometrului poate folosi mercur, alcool, azot, hidrogen, toate acestea având proprietatea de a-și schimba volumul direct proporțional cu temperatura.

Valoarea 0 °C indică *punctul de îngheț* al apei, adică nivelul la care se află mercurul în momentul în care apa îngheață.
Valoarea 100 °C indică *punctul de fierbere* a apei, adică nivelul la care se află mercurul în momentul în care apa pură fierbe. Această valoare este întâlnită doar pe termometrele folosite în laboratoare speciale.
Când mercurul coboară sub nivelul 0, atunci termometrul indică *temperaturi negative*: –1, –2, –3, … (minus 1, minus 2, minus 3, …). Cu cât coboară mai mult, cu atât temperatura este mai mică.

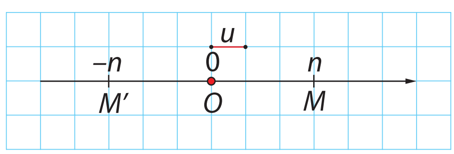
Știați că…?

Sateliții meteorologici și sateliții de comunicare sunt plasați pe orbite geostaționare, la o înălțime de aproximativ 36 000 km.
Există mini submarine pentru turism, care coboară până la –200 de metri, adică la o adâncime de 200 de metri.
Există viață în mări și oceane și la –2000 de metri, adică la 2000 de metri adâncime.
Altitudinea este înălțimea la care se află un punct de pe suprafața Pământului în raport cu un nivel de referință, de regulă, *nivelul mării*, corespunzător valorii 0.
Punctul situat pe teritoriul României la cea mai mare altitudine este vârful muntos Moldoveanu (2544 m).
Punctul situat pe suprafața Pământului la cea mai mică altitudine este în Oceanul Pacific, Groapa Marianelor (–11 022 m).



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Considerăm axa numerelor, cu originea $O(0)$ și cu unitatea de măsură u, pe care am stabilit sensul pozitiv, de la stânga la dreapta.



Fiecare număr natural nenul n se reprezintă pe axă prin punctul $M(n)$, situat la exact n unități de măsură de origine, în dreapta acesteia.
Numărul natural n se va nota $+n$ și se va numi *număr întreg pozitiv*.
Punctul M', simetricul punctului $M(n)$ față de O, este situat la exact n unități de măsură de origine, dar în stânga ei. Numărul corespunzător punctului M' se notează $-n$ și se numește *opusul numărului n*.
Numărul $-n$ este *număr întreg negativ*. Vom spune că M' are coordonata $-n$ și scriem $M'(-n)$.

În acest fel, mulțimea numerelor naturale nenule se identifică cu mulțimea numerelor întregi pozitive care se notează cu $\mathbb{Z}_+$, iar mulțimea formată cu opusele tuturor numerelor naturale nenule se numește *mulțimea numerelor întregi negative* și se notează cu $\mathbb{Z}_-$.

Prin urmare, $\mathbb{Z}_+ = \{+1, +2, +3, \ldots, +n, +(n+1), \ldots\} = \{1, 2, 3, \ldots, n, (n+1), \ldots\} = \mathbb{N}^*$.

$\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -(n+1), -n, \ldots, -3, -2, -1\}$.

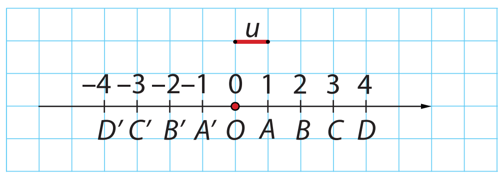
Mulțimea formată cu toate *numerele întregi pozitive*, toate *numerele întregi negative*, la care se adaugă *numărul* 0, se numește *mulțimea numerelor întregi* și se notează cu $\mathbb{Z}$.
Prin urmare, $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_+ \cup \mathbb{Z}_- \cup \{0\} = \{\ldots, -(n+1), -n, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n, (n+1), \ldots\}$

Observații. Numărul 0 nu este nici pozitiv nici negativ. Considerăm $+0 = -0 = 0$. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ și $\mathbb{N}^* = \mathbb{Z}_+$.

În practică, numerele pozitive se folosesc adesea fără semn, adică $+1$ se scrie 1, $+2$ se scrie 2 și așa mai departe. Când vorbim de un număr întreg a, acesta poate fi pozitiv și scriem $a > 0$, poate fi negativ și scriem $a < 0$, sau poate fi egal cu 0 și scriem $a = 0$.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Exemple.
În imaginea alăturată, pe axa numerelor, sunt reprezentate mai multe numere întregi.



Două puncte situate pe axă, simetric față de originea acesteia, au coordonatele *numere întregi opuse*.	Puncte simetrice față de origine: $A(1)$ și $A'(-1)$; $B(2)$ și $B'(-2)$; $C(3)$ și $C'(-3)$; $D(4)$ și $D'(-4)$.	Numere întregi opuse: 1 și −1; 2 și −2; 3 și −3; 4 și −4.
Dacă a este număr întreg nenul, numerele întregi a și $-a$ sunt opuse. Numărul a este opusul numărului $-a$, iar numărul $-a$ este opusul numărului a.	−1 este opusul lui 1 și 1 este opusul lui −1; −2 este opusul lui 2 și 2 este opusul lui −2; −3 este opusul lui 3 și 3 este opusul lui −3; −4 este opusul lui 4 și 4 este opusul lui −4.	

Observație. Opusul numărului întreg 0 este 0 însuși.
Opusul numărului întreg a se notează $-a$.
Dacă a este pozitiv, atunci $-a$ este negativ, iar dacă a este negativ, atunci $-a$ este număr pozitiv.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Completați în caseta liberă ***A***, dacă propoziția este adevărată și ***F***, dacă propoziția este falsă.

Propoziția	***A/F***	Propoziția	***A/F***
$-13 \in \mathbb{Z}$		$2{,}75 \in \mathbb{Z}$	
$7 \in \mathbb{Z}$		$\{-4; 0; 11\} \subset \mathbb{Z}$	
$-6 \notin \mathbb{N}$		$\{-3; 1; +3\} \subset \mathbb{N}$	
$-24 \in \mathbb{Z}_-$		$33 \notin \mathbb{Z}_+$	

2. Se consideră mulțimea

$$M = \left\{2; -4; \frac{3}{2}; 0; -25; +25; 6,(2); \frac{12}{4}\right\}.$$

a) Scrieți mulțimea formată cu numerele întregi negative ale mulțimii M.
b) Scrieți mulțimea formată cu numerele întregi pozitive ale mulțimii M.
c) Determinați mulțimea $M \cap \mathbb{Z}$.

3. Completați în casetele libere din tabelul următor numerele întregi corespunzătoare.

Numărul	5	–2		0	55			z	
Opusul numărului			7			–10	+17		a

4. **a)** Reprezentați pe axa numerelor: –3; 1; 0; 4; –5; 3.

b) Reprezentați pe axa numerelor, alegând o unitate de măsură convenabilă: –10; +20; 0; +30; –20; –50.

c) Reprezentați pe axa numerelor, alegând o unitate de măsură convenabilă: –100; –200; +200; 0; +300; –400.

5. Fie mulțimea $A = \left\{-1;\ 1\frac{2}{3};\ 0;\ +2;\ -3^2;\ 4,(7);\ \frac{39}{13}\right\}$.
Determinați mulțimile: $A \cap \mathbb{N}, A \cap \mathbb{Z}, A \cap \mathbb{Z}_-, A \setminus \mathbb{Z}$.

6. **a)** Precizați numărul punctelor situate pe axa numerelor, la distanța de 4 unități de măsură față de originea axei. Scrieți abscisele acestor puncte și reprezentați-le pe axa numerelor, folosind ca unitate de măsură centimetrul.

b) Fie n un număr natural. Precizați numărul punctelor situate pe axa numerelor, la distanța n unități de măsură față de originea axei. Scrieți coordonatele acestor puncte.

Minitest

1. Copiați pe caiete și completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:

10 p **a)** Opusul numărului –7 este … .

10 p **b)** Distanța de la originea axei numerelor la punctul de reprezentare a numărului -2^3 este … .

2.

40 p **a)** Reprezentați pe axa numerelor punctele A, B, C, D, O de coordonate: +3, –4, +2, –1, 0.

30 p **b)** Completați în caseta liberă litera ***A***, dacă propoziția este adevărată, și litera ***F***, dacă propoziția este falsă.

Propoziția	***A/F***
p_1: Punctul C este situat pe segmentul AD.	
p_2: Punctul B nu este situat pe semidreapta CO.	
p_3: Segmentele BD și AC nu au puncte comune.	

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

L2 Modulul unui număr întreg. Compararea și ordonarea numerelor întregi

Ne amintim

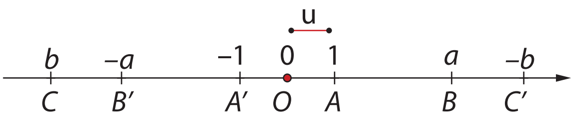
Pentru orice număr natural nenul n, există exact două puncte pe axa numerelor, situate la distanța n de origine (simetrice față de origine): punctul $A(-n)$ și punctul $B(n)$.
Orice număr întreg *pozitiv* a se reprezintă pe axa numerelor în dreapta originii și scriem $a > 0$.
Orice număr întreg *negativ* a se reprezintă pe axa numerelor în stânga originii și scriem $a < 0$.
Numărul întreg 0 se reprezintă pe axa numerelor în originea acesteia.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Modulul numărului întreg a sau *valoarea absolută* a acestuia este *distanța* de la originea axei numerelor la punctul de reprezentare a numărului a pe axă.

Modulul numărului întreg a se notează $|\,a\,|$.

Pe axa numerelor, reprezentăm punctele $O(0)$, $A(1)$, $A'(-1)$, $B(a)$, $B'(-a)$, cu a număr întreg pozitiv și $C(b)$, $C'(-b)$, cu b număr întreg negativ.



Atunci: $|\,0\,| = 0$ (distanța de la O la el însuși este 0).
Cum $OA' = OA = 1$, rezultă $|-1| = |\,1\,| = OA = 1$;
Cum $OB' = OB = a$, rezultă $|-a| = |\,a\,| = OB = a$;
Cum $OC = OC' = -b$, rezultă $|-b| = |\,b\,| = OC' = -b$.

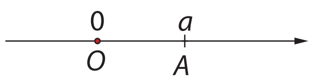
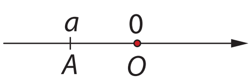
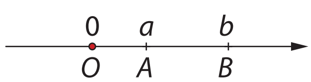
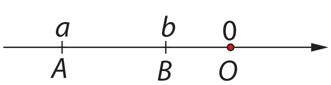
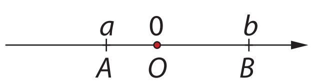
Observații.
1. Numerele întregi a și $-a$ au același modul pentru că sunt reprezentate pe axă la aceeași distanță de origine.
2. Orice distanță este exprimată printr-un număr pozitiv sau este 0, deci modulul oricărui număr întreg este un număr pozitiv sau este 0.

Concluzii. **1.** $|\,x\,| > 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}^*$ și $|\,x\,| = 0$, dacă și numai dacă $x = 0$.
2. $|\,x\,| = x$, dacă și numai dacă $x \geq 0$ și $|\,x\,| = -x$, dacă și numai dacă $x \leq 0$.
3. $|-x| = |\,x\,|$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$.

Pentru orice două numere întregi a și b, are loc una și numai una dintre relațiile: $a < b$, $a = b$, $a > b$.
A compara numerele întregi a și b înseamnă a stabili care dintre cele trei relații de mai sus are loc.

Dacă $a \in \mathbb{Z}$ și $b \in \mathbb{Z}$ și dacă reprezentarea pe axă a numărului a este punctul A, iar reprezentarea numărului b este punctul B, atunci: $a < b$ dacă și numai dacă punctul $A(a)$ este situat în stânga punctului $B(b)$.
$a = b$ dacă și numai dacă punctele $A(a)$ și $B(b)$ coincid.
$a > b$ dacă și numai dacă puntul $A(a)$ este situat în dreapta punctului $B(b)$.

Pentru a și b nenule cu $a < b$ sunt posibile situațiile:

Reprezentare pe axă	*Descriere*	*Concluzie*
	$O(0)$ este situat în stânga lui $A(a)$, deci 0 este mai mic decât a. Scriem $0 < a$ sau $a > 0$.	$a \in \mathbb{Z}_+ \Leftrightarrow a \in \mathbb{Z}$ și $a > 0$. $1; 2; 3; 10; 11 \in \mathbb{Z}_+$ $1 > 0; 2 > 0; 3 > 0; 10 > 0; 11 > 0$.
	$A(a)$ este situat în stânga lui $O(0)$, deci a este mai mic decât 0. Scriem $a < 0$ sau $0 > a$.	$a \in \mathbb{Z}_- \Leftrightarrow a \in \mathbb{Z}$ și $a < 0$. $-1; -2; -3; -10 \in \mathbb{Z}_-$ $-1 < 0; -2 < 0; -3 < 0; -10 < 0$.
	$a > 0, b > 0$. $OA < OB$, deci $|\,a\,| < |\,b\,|$. $A(a)$ este în stânga lui $B(b)$, deci $a < b$.	Dacă $a \in \mathbb{Z}_+$ și $b \in \mathbb{Z}_+$, atunci: $a < b$ dacă și numai dacă $|\,a\,| < |\,b\,|$. $30 \in \mathbb{Z}_+$ și $47 \in \mathbb{Z}_+$ $30 < 47$ și $|\,30\,| < |\,47\,|$.
	$a < 0, b < 0$. $OA > OB$, deci $|\,a\,| > |\,b\,|$. $A(a)$ este în stânga lui $B(b)$, deci $a < b$.	Dacă $a \in \mathbb{Z}_-$ și $b \in \mathbb{Z}_-$, atunci: $a < b$ dacă și numai dacă $|\,a\,| > |\,b\,|$. $-30 \in \mathbb{Z}_-$ și $-47 \in \mathbb{Z}_-$ $-47 < -30$ și $|-47| > |-30|$.
	$a < 0, b > 0$. $A(a)$ este în stânga lui $B(b)$, deci $a < b$.	Dacă $a \in \mathbb{Z}_-$ și $b \in \mathbb{Z}_+$, atunci $a < b$. Orice număr negativ este mai mic decât orice număr pozitiv. $-30 \in \mathbb{Z}_-$ și $47 \in \mathbb{Z}_+$ rezultă $-30 < 47$ $-47 \in \mathbb{Z}_-$ și $30 \in \mathbb{Z}_+$ rezultă $-47 < 30$.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Pentru compararea și pentru ordonarea numerelor întregi folosim frecvent una dintre relațiile „ $\leq$ ” sau „$\geq$”.
Pentru $a \in \mathbb{Z}$ și $b \in \mathbb{Z}$, $a \leq b$ dacă și numai dacă $a < b$ sau $a = b$.
Au loc proprietățile:

Proprietatea	$a \leq a$, oricare ar fi numărul întreg a.	Dacă $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ și dacă $a \leq b$ și $b \leq a$, atunci $a = b$.	Dacă $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ și dacă $a \leq b$ și $b \leq c$, atunci $a \leq c$.
Exemple	$0 \leq 0$; $-1 \leq -1$; $2 \leq 2$;…	$3 \leq x$ și $x \leq 3$, rezultă $x = 3$.	$-2 \leq 5$ și $5 \leq p$, $p \in \mathbb{Z}$, rezultă $-2 \leq p$.

Observație. Relațiile „<” și „>” sunt tranzitive: Dacă $a < b$ și $b < c$, atunci $a < c$;
Dacă $a > b$ și $b > c$, atunci $a > c$.
Relațiile $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ ne ajută să ordonăm crescător sau descrescător două sau mai multe numere întregi.

A *ordona crescător* două sau mai multe numere întregi înseamnă a stabili ordinea acestora altfel încât fiecare număr să fie mai mic sau egal cu cel de după el.	Ordinea crescătoare a numerelor întregi $-32, 0, 20, -21, 5$ este: $-32, -21, 0, 5, 20$ pentru că $-32 \leq -21 \leq 0 \leq 5 \leq 20$.
A *ordona descrescător* două sau mai multe numere întregi înseamnă a stabili ordinea acestora astfel încât fiecare număr să fie mai mare sau egal cu cel de după el.	Ordinea descrescătoare a numerelor întregi $-32, 0, 20, -21, 5$ este: $20, 5, 0, -21, -32$ pentru că $20 \geq 5 \geq 0 \geq -21 \geq -32$.

Reținem!

Orice număr întreg *pozitiv* este *mai mare* decât orice număr întreg negativ și decât 0.
Orice număr întreg *negativ* este *mai mic* decât orice număr întreg pozitiv și decât 0.
Dintre două numere întregi pozitive, este mai mare cel care are modulul mai mare.
Dintre două numere întregi negative, este mai mare cel care are modulul mai mic.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Copiați pe caiete și completați în casetele libere din tabelul următor numerele întregi corespunzătoare.

a	5	-2	8	0	55	-10
$\lvert a \rvert$						

2. Copiați pe caiete și completați în casetele libere din tabelul următor numerele întregi corespunzătoare.

$\lvert a \rvert$	5		2		8		0	55		10	
a											

3. Determinați numărul întreg k, în fiecare din situațiile:

a) $-k = -5$;
b) $-k = +19$;
c) $\lvert k \rvert = 10$ și $k \in \mathbb{Z}_-$;
d) $\lvert k \rvert = 77$ și $k \in \mathbb{Z}_+$;
e) $\lvert k \rvert = 0$;
f) $\lvert k - 2 \rvert = 0$.

4. Fie mulțimea $M = \{-7; 4; -2; 0; -4; 100; 2; -9\}$. Scrieți submulțimile A, B, C ale mulțimii M, știind că:

a) toate elementele mulțimii A au valoarea absolută cel mult egală cu 3;
b) $\lvert x \rvert = x$, oricare ar fi x element al mulțimii B;
c) $\lvert x \rvert = -x$, oricare ar fi x element al mulțimii C.

5. Scrieți pe caiet următoarele perechi și subliniați în fiecare pereche numărul mai mic:

a) -7 și 4;
b) -3, și -1;
c) 6 și -16;
d) 0 și -10.

6. Scrieți pe caiet următoarele perechi de numere și subliniați în fiecare pereche numărul mai mare:

a) -4 și -6;
b) 304 și -403;
c) -72 și 70;
d) -410 și 0.

7. Scrieți:

a) trei numere întregi mai mici decât -7;

b) patru numere întregi mai mari decât -2;

c) cinci numere întregi cuprinse între -14 și -4.

8. Completați spațiile libere cu numere întregi astfel încât să obțineți propoziții adevărate:

a) $-6 < \dots$; **e)** $\dots \le 0$;

b) $\dots > -1$; **f)** $-10 \ge \dots$;

c) $-10 \le \dots$; **g)** $-8 > \dots$;

d) $\dots \ge 3$; **h** $-40 < \dots$.

9. Completați spațiile libere cu unul dintre simbolurile <, =, >, pentru a obține propoziții adevărate:

a) $-3 \dots -9$; **e)** $7 \dots -7$;

b) $-23 \dots -17$; **f)** $109 \dots 111$;

c) $-8 \dots -2^3$; **g)** $0 \dots -2023$;

d) $-40 \dots 3$; **h)** Dacă $x \in \mathbb{Z}_-$, atunci $x \dots 2$.

10. Reprezentați pe axa numerelor:

a) patru numere întregi consecutive, cel mai mic fiind -10;

b) cinci numere întregi consecutive, cel mai mare fiind 1;

c) șase numere întregi consecutive, două dintre ele fiind pozitive.

11. Fie mulțimea
$A = \{-12; 6; -10; 0; -3; 11; -2; 33; -9; 3\}$.

a) Determinați valorile numărului x, știind că $x \in A$ și $x < -4$.

b) Determinați valorile numărului y, știind că $y \in A$ și $y > -1$.

c) Determinați valorile numărului z, știind că $z \in A$ și $-3 \le z \le 4$.

12. **a)** Ordonați crescător numerele: $-5; 7; -11; 0; -6; 11; -4; 13; -8; 1$.

b) Ordonați descrescător numerele: $4; -1; -21; 8; -7; |37|; -23; 103; -18; 2$.

13. Determinați perechile de numere întregi (x, y), știind că numerele -15; -13; x; -11; y; -7 sunt ordonate crescător.

14. În tabelul următor, sunt trecute temperaturile minime și maxime înregistrate într-o zi în câteva capitale europene.

Orașul	Temperatura minimă	Temperatura maximă
Atena	3 °C	10 °C
București	0 °C	8 °C
Copenhaga	−2 °C	5 °C
Helsinki	−7 °C	−1 °C
Londra	−3 °C	+1 °C
Madrid	4 °C	11 °C
Paris	1 °C	6 °C

Precizați orașele în care:

a) s-a înregistrat cea mai mare temperatură;

b) s-a înregistrat cea mai mică temperatură;

c) s-au înregistrat doar temperaturi negative;

d) s-au înregistrat doar temperaturi pozitive.

Minitest

1. Copiați pe caiete și completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:

10 p **a)** Dintre numerele -15 și 14, mai mare este numărul ….

10 p **b)** Dintre numerele 0 și -7, mai mare este numărul ....

15 p **c)** Ordinea crescătoare a numerelor $5, -9, 13, -10, -3, 0, -15$ este: ….

10 p **d)** Cel mai mic număr întreg x pentru care $|x| \le 3$ este ….

2. Determinați:

15 p **a)** numărul întreg a pentru care $|a| = 6$ și $a > 3$;

15 p **b)** numerele întregi b și c pentru care $|b| = 5$, $|c| = 4$ și $b < c$;

15 p **c)** cifra x pentru care $-\overline{2x7} < -\overline{27x}$.

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

3.2. Operații cu numere întregi

L1 Adunarea și scăderea numerelor întregi. Proprietăți

Pe baza adunării numerelor naturale și cu ajutorul reprezentării numerelor întregi pe axa numerelor, definim *adunarea numerelor întregi*.

Rezolvăm și observăm

***Problema* 1.** Radu și-a petrecut o parte din vacanță la munte, la bunicii lui. Este foarte frumos, în orice anotimp. Radu a urmărit temperatura înregistrată de termometru dimineața și seara și a notat câteva observații. Pe baza observațiilor lui Radu, scrise mai jos, calculați temperatura înregistrată în fiecare din serile de luni până vineri.

Observații privind evoluția temperaturii

1. Luni dimineața termometrul a indicat 3 °C. Luni seara era mai cald cu 2 °C.
2. Marți dimineața termometrul a indicat –3 °C. Marți seara era mai frig, termometrul arăta cu 2 °C mai puțin.
3. Miercuri dimineața termometrul a indicat –6 °C, dar până seara, temperatura a crescut cu 7 °C.
4. Joi dimineața termometrul a indicat 4 °C, dar până seara, temperatura a scăzut cu 4 °C.
5. Dacă la temperatura de miercuri seara adunăm –12 °C, obținem temperatura înregistrată vineri seara.

Rezolvare

1. Intuitiv, dacă la +3 °C adăugăm +2 °C obținem +5 °C. Scriem **+3 + (+2) = +5** sau 3 + 2 = 5.
2. Intuitiv, dacă la –3 °C se mai adaugă –2 °C, obținem –5 °C. Scriem **–3 + (–2) = –5**.
3. Intuitiv, dacă la –6 °C se mai adaugă +7 °C, obținem +1 °C. Scriem **–6 + (+7) = +1**.
4. Dacă temperatura a scăzut cu 4 °C, atunci devine 0 °C. Scriem **+4 + (–4) = 0** sau **+4 – (+4) = 0**.
5. Dacă la 1 °C adunăm –12 °C, obținem –11 °C. Scriem **+1 + (–12) = –11**.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Pentru orice două numere întregi a și b se definește numărul întreg unic, notat $a + b$, numit *suma* numerelor a și b.

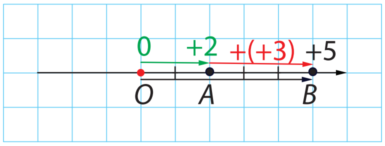
Operația prin care se asociază fiecărei perechi de numere a și b suma acestora se numește *operația de adunare*, iar numerele a și b se numesc *termenii* adunării.

Dacă $a \geq 0$ și $b \geq 0$, atunci $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ și aplicăm proprietățile pe care le cunoaștem din clasele anterioare.

Pentru a înțelege ușor tehnica prin care se efectuează operația de adunare a numerelor întregi, să ne imaginăm *o plimbare* pe axa numerelor în sens pozitiv atunci când adunăm un număr pozitiv și în sens negativ, atunci când adunăm un număr negativ.

1. Fiecare termen pozitiv al unei sume presupune deplasarea pe axa numerelor, spre dreapta (în sens pozitiv), cu atâtea unități de măsură câte indică modului numărului.

Pentru a calcula (+2) + (+3), pornim din originea axei și ne deplasăm spre dreapta, mai întâi 2 unități, apoi, din punctul în care am ajuns, parcurgem încă 3 unități spre dreapta; în total ne deplasăm 5 unități spre dreapta.



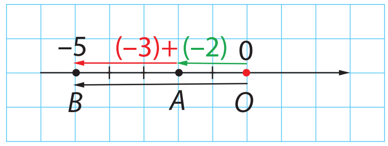
$+2 + (+3) = +5$;

$|+2| + |+3| = +2 + 3 = +5$

$\mathbf{+2 + (+3) = |+2| + |+3|}$

2. Fiecare termen negativ al unei sume presupune deplasarea pe axa numerelor, spre stânga (în sens negativ), cu atâtea unități de măsură câte indică modulul numărului.

Pentru a calcula (–2) + (–3), pornim din originea axei și ne deplasăm spre stânga, mai întâi 2 unități, apoi din punctul în care am ajuns, parcurgem încă 3 unități spre stânga; în total ne deplasăm 5 unități spre stânga.



$(-2) + (-3) = -5;$

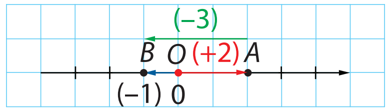
$|-2| + |-3| = 2 + 3 = 5$

$\mathbf{(-2) + (-3) = -(|-2| + |-3|)}$

3. Dacă suma conține și termeni pozitivi și termeni negativi, suma poate fi un număr pozitiv sau un număr negativ, în funcție de sensul în care ne deplasăm mai multe unități, adică în funcție de numărul care are modulul mai mare.

Pentru a calcula +2 + (–3), pornim din originea axei și ne deplasăm două unități spre dreapa, ajungem în punctul corespunzător numărului +2, iar din acest punct, ne deplasăm spre stânga 3 unități și ajungem în punctul corespunzător numărului întreg –1.

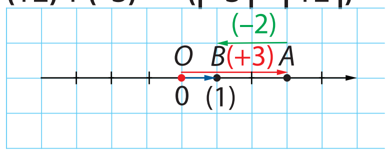
Semnul sumei este același cu semnul termenului care are modulul mai mare.



$(+2) + (-3) = -1; |-3| > |+2|$

$|-3| - |+2| = 3 - 2 = 1$

$\mathbf{(+2) + (-3) = -(|-3| - |+2|)}$

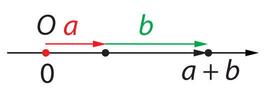
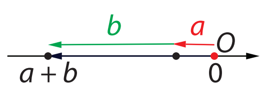
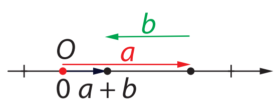
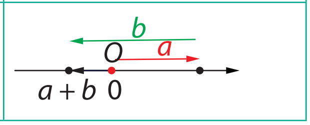


$(+3) + (-2) = +1; |+3| > |-2|$

$|+3| - |-2| = 3 - 2 = 1$

$\mathbf{(+3) + (-2) = |+3| - |-2|.}$

Sinteză

Caz	$a \geq 0$ și $b \geq 0$	$a \leq 0$ și $b \leq 0$	$a > 0$, $b < 0$ și $\lvert a \rvert > \lvert b \rvert$	$a > 0$ și $b < 0$ și $\lvert a \rvert < \lvert b \rvert$
Modul de calcul	$a + b \geq 0$ și $a + b = \lvert a \rvert + \lvert b \rvert$	$a + b \leq 0$ și $a + b = -(\lvert a \rvert + \lvert b \rvert)$	$a + b > 0$ și $a + b = \lvert a \rvert - \lvert b \rvert$	$a + b < 0$ și $a + b = -(\lvert b \rvert - \lvert a \rvert)$.
Interpretare geometrică				

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Operația de adunare a numerelor întregi păstrează *proprietățile adunării* numerelor naturale.

Adunarea este *asociativă*: $(a + b) + c = a + (b + c)$, oricare ar fi a, b, c numere întregi.	$[(+1) + (-2)] + (+3) = (-1) + (+3) = +2$; $(+1) + [(-2) + (+3)] = (+1) + (+1) = +2$, deci $(+1) + [(-2) + (+3)] = [(+1) + (-2)] + (+3)$.
Adunarea este *comutativă*: $a + b = b + a$, oricare ar fi a și b numere întregi.	$(-5) + (-1) = -6$ și $(-1) + (-5) = -6$, deci $(-5) + (-1) = (-1) + (-5)$.
Numărul 0 este *element neutru* pentru adunare, adică suma dintre 0 și un număr întreg oarecare este numărul însuși. $a + 0 = 0 + a = a$, oricare ar fi numărul întreg a.	$(+7) + 0 = 0 + (+7) = +7$. $(-9) + 0 = 0 + (-9) = -9$.
În plus, pentru orice număr întreg a, există numărul întreg $-a$ (opusul său) astfel încât $a + (-a) = (-a) + a = 0$.	$(+7) + (-7) = (-7) + (+7) = 0$.

Știm din clasele anterioare că dacă a și b sunt numere naturale, $a \geq b$, atunci diferența $a - b$ a acestora este un număr natural.

În mulțimea $\mathbb{Z}$, se definește diferența $a - b$ a oricăror două numere întregi și aceasta este un număr întreg.

Pentru oricare două numere întregi a și b, *diferența* $a - b$ este suma dintre numărul a și opusul numărului b.

În limbajul simbolisticii matematice: $a - b = a + (-b)$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{Z}$.

$+3 - (+7) = +3 + (-7) = -4$;
$-3 - (+7) = -3 + (-7) = -10$;
$+3 - (-7) = +3 + (+7) = +10$;
$-3 - (-7) = -3 + (+7) = +4$.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Copiați pe caiete tabelele și completați în casetele libere numerelor întregi corespunzătoare.

a)

x	+3	–4	–5	+12	–10	+27	–35
$x + (+5)$							

b)

y	–1	–12	+5	+9	– 10	+36	–41
$y + (-9)$							

2. Efectuați adunările:

a) $-2 + (-8)$;
b) $-16 + (-9)$;
c) $42 + (+18)$;
d) $(-1) + (-2) + (-3)$;
e) $-31 + (+13)$;
f) $26 + (-19)$;
g) $-100 + (+200)$;
h) $-50 + (+25) + (-45)$.

3. Alegeți varianta corectă de răspuns. Doar un răspuns este corect.

a) Rezultatul calculului $(-35) + (-65)$ este:
A. 100; **B.** –100; **C.** –30; **D.** 30.

b) Suma numerelor – 97 și 86 este egală cu:
A. 183; **B.** –183; **C.** 11; **D.** –11.

c) Suma dintre cel mai mic număr întreg format din două cifre și 100 este:
A. 1; **B.** –1; **C.** –109; **D.** –199.

d) Adunând toate numerele întregi care au valoarea absolută cel mult 3, se obține:
A. 6; **B.** 0; **C.** –6; **D.** –12.

4. Scrieți:

a) numărul –10 ca suma a două numere întregi negative;
b) numărul –20 ca suma a două numere întregi de semne diferite;
c) numărul 0 ca suma a două numere întregi.

5. Asociați fiecărei litere care indică o sumă scrisă în coloana A, cifra corespunzătoare răspunsului corect, scris în coloana B.

A	B
a. $-20 + (+74)$ **b.** $+39 + (-93)$ **c.** $-22 + (-33)$ **d.** $+19 + (+36)$ **e.** $-12 + (-34) + (+104)$	**1.** 58 **2.** –55 **3.** –54 **4.** 55 **5.** +54 **6.** –59 **7.** +59

6. Calculați numerele a, b și $a + b$, știind că
$a = -1 + (-11) + (-111)$ și
$b = -102 + (+203) + (-302) + (+201)$.

7. Calculați, folosind proprietățile adunării:

a) $-44 + (-38) + (38)$;
b) $(-3) + (-25) + (-17) + (-75)$;
c) $1 + (-2) + (+99) + (-88)$;
d) $(-103) + (+205) + (-2023) + (-205) + (+103)$;

8. Scrieți în ordine crescătoare numerele:
$n = |-35| + (-72) + |41 - 19|$,
$m = |-100 + (+67)| + (-68) + |1 + (-19)|$,
$p = (-5) + (-4) + (-3) + \ldots + (+2) + (+3)$.

9. Efectuați adunările și precizați dacă numărul $S = (-1) + (+2) + (-3) + (+4) + \ldots + (-19) + (+20) + (-21)$ este număr pozitiv, negativ sau nul.

10. Copiați pe caiete tabelele și completați în casetele libere numerele întregi corespunzătoare.

a)

x	+4	–3	–12	+20	–32	+41	–92
$x - (+8)$							

b)

y	–7	–4	+7	+19	–38	+46	–94
$y - (-6)$							

11. Efectuați scăderile:

a) $-7 - (-3)$;
b) $-14 - (-4)$;
c) $+32 - (+15)$;
d) $-71 - (-71)$;
e) $0 - (+13)$;
f) $0 - (-29)$;
g) $-300 - (+300)$;
h) $-25 - (+50) - (-75)$.

12. Alegeți varianta corectă de răspuns. Doar un răspuns este corect.

a) Calculând $(-15) - (-45)$ se obține:
A. 100; **B.** –100; **C.** –30; **D.** 30.

b) Diferența dintre numărul –79 și 44 este egală cu:
A. 123; **B.** –123; **C.** 35; **D.** –35.

c) Scăzând din cel mai mare număr întreg format din două cifre numărul 1000 se obține:
A. 901; **B.** –901; **C.** –1010; **D.** 1010.

13. Efectuați calculele:

a) $41-(-27)-(-18)$;
b) $-7-(-77)-(-777)$;
c) $+22-(35)-(-48)$;
d) $-10-(-20)-(-30)+(-40)$;
e) $1-(-102)-[-20+(+78)]$.
f) $-1-(-11)-(-111)$.

14. Completați spațiile libere cu numere întregi așa încât să obțineți egalități.

a) $-10-\ldots=-20$;
b) $+25-\ldots=-2$;
c) $\ldots-(-20)=-8$;
d) $-203-\ldots=-203$;

15. Știind că $|b-c|=404$, calculați $20^2-(b-c)$.

16. **a)** Dacă $x=-13-(-35)-(+57)-(-79)$ și $y=-24+(-46)-(-68)+(-80)$, calculați $x-y$.

b) Dacă $z=-11-(-33)-(+55)$ și $t=-77+(-999)$, calculați $-13579-z-t$.

17. Calculați:

a) $64+(-45)-(-27)$;
b) $-38-(+63)-(-100)$;
c) $-50-(+43)+(-72)$;
d) $52-[47-(-85)]$;
e) $-1-[-2-(-3)+(-4)]$;
f) $7-\{-8+[-9-(+10)]\}$.

Minitest

8×5 p **1.** Efectuați:

a) $(-33)+(+22)$;
b) $(+57)+(-100)+(+23)$;
c) $|-64|+|+46|+(-101)$;
d) $17+(-71)+(+39)$.
e) $(-5)-(-3)$;
f) $18-(-12)$;
g) $|-37|-|-29|-(+13)$;
h) $-17-(-27)-(+37)$.

2. Calculați:

15 p **a)** suma numerelor întregi care au valoarea absolută cel mult +2.

15 p **b)** suma dintre cel mai mare număr întreg negativ de două cifre distincte și opusul celui mai mic număr natural de trei cifre distincte.

20 p **3.** Numerele a și b sunt întregi cu $|a|=5$ și $|b|=8$. Determinați cea mai mică sumă $a+b$ posibilă și cea mai mică diferență $a-b$ posibilă.

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

L2 Înmulțirea numerelor întregi. Proprietăți

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Ne propunem să înțelegem operația de înmulțire a numerelor întregi. *Știm deja să înmulțim numere naturale, deci știm să înmulțim numere întregi nenegative*. Prin urmare, pentru numerele *întregi* nenegative, operația de înmulțire păstrează tehnica și proprietățile învățate la numere naturale.

Dicționar

Număr *nenegativ* = număr care nu este negativ; număr pozitiv sau nul; număr mai mare sau egal cu 0.

Dacă $a>0$ și $b>0$, atunci $a\cdot b>0$ și $a\cdot b=\underbrace{b+b+\ldots+b}_{\text{de } a \text{ ori } b}=\underbrace{a+a+\ldots+a}_{\text{de } b \text{ ori } a}=b\cdot a$.	$+2=2$; $+3=3$; $+6=6$; $+1=1$; $+7=7$; deci, $(+2)\cdot(+3)=2\cdot3=3+3=6$; $(+3)\cdot(+2)=3\cdot2=2+2+2=6$; $(+1)\cdot(+7)=1\cdot7=7\cdot1=7$.
$0\cdot a=a\cdot0=0$, oricare ar fi numărul nenegativ a.	$0\cdot(+3)=(+3)\cdot0=0$.

Analizăm separat produsul a două numere întregi în care *unul dintre numere este negativ* și produsul în care *ambele numere sunt negative*.

Rezolvăm și observăm

1. Privind înmulțirea ca pe o adunare repetată a unuia din factori, ca la înmulțirea numerelor naturale, pentru a calcula produsul $(+2) \cdot (-3)$, scriem $(+2) \cdot (-3) = (-3) + (-3) = -6$. Dar, -6 este opusul numărului 6, iar $6 = 2 \cdot 3$, adică $\mathbf{(+2) \cdot (-3) = -(2 \cdot 3) = -(|+2| \cdot |-3|)}$.
   În mod analog, $(+3) \cdot (-2) = (-2) + (-2) + (-2) = -6$ și $|(+3) \cdot (-2)| = +6$, deci $\mathbf{(+3) \cdot (-2) = -(|+3| \cdot |-2|)}$.
   Pentru produsul $(-3) \cdot (+2)$, păstrând comutativitatea înmulțirii, avem $(-3) \cdot (+2) = (+2) \cdot (-3) = -6$. În mod analog, $(-2) \cdot (+3) = (+3) \cdot (-2) = -6$.

Dacă unul din factori este negativ, iar celălalt este pozitiv, atunci *produsul este un număr negativ*.

2. Ne propunem să calculăm produsul a două numere negative, de exemplu $(-2) \cdot (-3)$.
   În contextul observațiilor de mai sus, *oricare ar fi numărul întreg a, opusul său $-a$* se poate scrie $-a = (-1) \cdot a$ sau $-a = a \cdot (-1)$.
   Obținem $(-2) \cdot (-3) = (-2) \cdot (+3) \cdot (-1) = ((-2) \cdot (+3)) \cdot (-1) = (-6) \cdot (-1) = +6$.
   Atunci, $(-2) \cdot (-3) = |-2| \cdot |-3| = +6$.

Dacă ambii factori sunt negativi, atunci *produsul este un număr pozitiv*.

Dacă $a > 0$ și $b < 0$, atunci $a \cdot b < 0$, $a \cdot b = \underbrace{b + b + ... + b}_{\text{de } a \text{ ori } b} = \underbrace{(-a) + (-a) + ... + (-a)}_{\text{de } -b \text{ ori } -a} = (-b) \cdot (-a)$ și $a \cdot b = -(\vert a\vert \cdot \vert b\vert)$.	$(-12) \cdot (+2) = -(\vert -12\vert \cdot \vert +2\vert) = -(12 \cdot 2) = -24$. $(+12) \cdot (-2) = -(\vert +12\vert \cdot \vert -2\vert) = -(12 \cdot 2) = -24$.
$0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$, oricare ar fi numărul întreg a.	$0 \cdot (+3) = 0$; $0 \cdot (-3) = 0$.
Dacă $a < 0$ și $b < 0$, atunci $a \cdot b > 0$, $a \cdot b = -[(-a) \cdot b] = -[a \cdot (-b)] = (-a) \cdot (-b)$ și $a \cdot b = \vert a\vert \cdot \vert b\vert$.	$(-4) \cdot (-7) = +(\vert -4\vert \cdot \vert -7\vert) = +(4 \cdot 7) = 28$. $(-11) \cdot (-2) = +(\vert -11\vert \cdot \vert -2\vert) = +(11 \cdot 2) = 22$.

Reținem!

Regula semnelor la înmulțire

1. Produsul a două numere pozitive este un număr pozitiv. Produsul a două numere negative este un număr pozitiv.

2. Produsul dintre un număr pozitiv și un număr negativ este un număr negativ.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Operația de înmulțire a numerelor întregi păstrează toate proprietățile înmulțirii numerelor naturale.

Proprietatea	*În limbajul simbolisticii matematice*	*Exemple*
Înmulțirea numerelor întregi este asociativă	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{Z}$.	$[(-2) \cdot (+7)] \cdot (-3) = (-14) \cdot (-3) = +(14 \cdot 3) = +42$. $(-2) \cdot [(+7) \cdot (-3)] = (-2) \cdot (-21) = +(2 \cdot 21) = +42$.
Înmulțirea numerelor întregi este comutativă	$a \cdot b = b \cdot a$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{Z}$.	$(-2) \cdot (+7) = -14$ și $(+7) \cdot (-2) = -14$.

Numărul 1 este element neutru pentru înmulțirea numerelor întregi	$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$.	$1 \cdot (+7) = (+7) \cdot 1 = +7$; $1 \cdot (-7) = (-7) \cdot 1 = -7$.
Înmulțirea numerelor întregi este distributivă față de adunare și scădere	Oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$; $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$.	$(-2) \cdot [(+7) + (-3)] = (-2) \cdot (+4) = -(2 \cdot 4) = -8$; $(-2) \cdot (+7) + (-2) \cdot (-3) = (-14) + (+6) = -8$. $(-2) \cdot [(+7) - (-3)] = (-2) \cdot (+10) = -(2 \cdot 10) = -20$; $(-2) \cdot (+7) - (-2) \cdot (-3) = (-14) - (+6) = -20$.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Scrieți pe caiete următoarele operații. Fără a efectua înmulțirile, subliniați *literele* care identifică înmulțirile cu rezultat număr întreg negativ. Verificați corectitudinea răspunsului efectuând calculele.

a) $-2 \cdot (-8)$; **e)** $-3 \cdot (+5)$;
b) $-6 \cdot (-9)$; **f)** $12 \cdot (-1)$;
c) $+4 \cdot (+7)$; **g)** $-100 \cdot (3)$;
d) $(+10) \cdot 5$; **h)** $+9 \cdot (-2)$.

2. Scrieți pe caiete următoarele operații. Fără a efectua înmulțirile, subliniați *literele* care identifică înmulțirile cu rezultat număr întreg pozitiv. Verificați corectitudinea răspunsului efectuând calculele.

a) $-3 \cdot (-7)$; **e)** $-4 \cdot (+9)$;
b) $-4 \cdot (-5)$; **f)** $12 \cdot (-1)$;
c) $6 \cdot (+8)$; **g)** $-100 \cdot (+2)$;
d) $(1) \cdot 5$; **h)** $9 \cdot (-3)$.

3. Efectuați înmulțirile:

a) $-4 \cdot (-8)$; **e)** $-6 \cdot (+11)$;
b) $-3 \cdot (-9)$; **f)** $4 \cdot (-12)$;
c) $+2 \cdot (+10)$; **g)** $-25 \cdot (+2)$;
d) $(-5) \cdot 7$; **h)** $-50 \cdot 0$.

4. Scrieți:

a) două numere întregi al căror produs este un număr întreg pozitiv;
b) două numere întregi al căror produs este un număr întreg negativ;
c) două numere întregi al căror produs este numărul 0;
d) trei numere întregi care au produsul -17.

5. Scrieți numărul -65 ca produsul a patru numere întregi diferite. Analizați toate cazurile posibile.

6. Asociaţi fiecărei litere care indică un produs scris în coloana A, cifra corespunzătoare răspunsului corect, scris în coloana B.

A	B
	1. $+65$
a. $-20 \cdot (+3)$	**2.** -63
b. $-13 \cdot (-5)$	**3.** -60
c. $7 \cdot (-9)$	**4.** 64
d. $\lvert -2 \rvert \cdot (-4) \cdot (-8)$	**5.** -63
	6. $+64$

7. Folosind asociativitatea și comutativitatea înmulțirii, efectuați:

a) $-7 \cdot (-5) \cdot (-2)$; **d)** $-8 \cdot (+9) \cdot (-5) \cdot (-1)$;
b) $-4 \cdot (+3) \cdot (-25)$; **e)** $-2 \cdot (+19) \cdot (-500)$;
c) $50 \cdot (-6) \cdot (-2)$; **f)** $4 \cdot (-3) \cdot (-25) \cdot 0$.

8. Folosind distributivitatea înmulțirii față de adunare și scădere, efectuați:

a) $-5 \cdot [(-10) + (-100)]$;
b) $+8 \cdot [(+6) - (-9)]$;
c) $-3 \cdot [+17 + (-12)]$;
d) $-9 \cdot [(-8) + (-7)]$.

9. Fie a și b două numere întregi.

a) Dacă $a \cdot b = -15$, calculați $-a \cdot b$.
b) Dacă $a \cdot b = -20$, calculați $a \cdot (-3) \cdot (-33) \cdot b$.
c) Dacă $a + b = -25$, calculați $(-4) \cdot a + (-4) \cdot b$.
d) Dacă $a - b = -30$, calculați $(-5) \cdot a - (-5) \cdot b$.

10. Fie mulțimea M formată cu toate numerele întregi x având proprietatea $-10 < x \leq 10$. Scrieți toate submulțimile mulțimii M, pentru care produsul elementelor este egal cu -10.

11. Calculați suma numerelor întregi $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{11}$, știind că produsul lor este -1 și că sunt cu trei mai multe numere negative decât numere pozitive.

Minitest

1. Efectuați înmulțirile:

10 p **a)** $-7 \cdot (-12)$;

10 p **b)** $13 \cdot (-9)$;

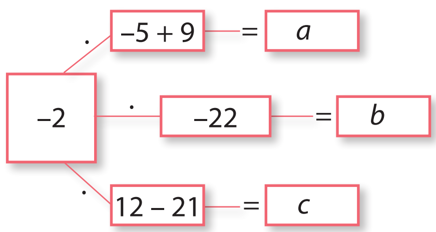
10 p **c)** $(-8 + 5) \cdot (-2 - 16)$.

2. Calculați:

15 p **a)** $x \cdot y + x \cdot z$, știind că $x = -12$ și $y + z = -3$.

15 p **b)** $x \cdot (y - z)$, știind că $x \cdot y = -25$ și $x \cdot z = -41$.

30 p 3. Determinați numerele a, b, c urmărind reprezentarea următoare și apoi efectuați produsul $a \cdot b \cdot c$.



Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

L3 Împărțirea numerelor întregi când deîmpărțitul este multiplu al împărțitorului

Ne amintim

Numărul natural b este divizor al numărului natural a dacă există un număr natural c astfel încât $a = b \cdot c$.

Dacă a, b, c sunt numere naturale nenule, atunci egalitățile $a = b \cdot c$, $b = a : c$ și $c = a : b$ au loc simultan, adică dacă are loc una dintre ele, atunci au loc și celelalte două. Vom spune că cele trei relații sunt echivalente și scriem: Dacă $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, atunci $a = b \cdot c \Leftrightarrow b = a : c \Leftrightarrow c = a : b$.

Dacă $b = a : c$ sau $c = a : b$, atunci b este câtul împărțirii numărului a la numărul nenul c, iar c este câtul împărțirii numărului a la numărul nenul b.

Rezolvăm și observăm

Determinați numerele întregi a și b pentru care $15 = (-3) \cdot a$, respectiv $-15 = b \cdot (-5)$.

Rezolvare. $15 = 3 \cdot 5 = (-3) \cdot (-5)$, deci $a = -5$. De asemenea, $-15 = 3 \cdot (-5)$, adică $b = 3$. Vom scrie $15 : (-3) = -5$; $-15 : (-5) = +3$.

Putem obține în mod similar: $15 : (-5) = -3$; $-15 : (-3) = +5$; $-15 : (+5) = -3$; $-15 : (+3) = -5$.
Observăm că dacă $|b|$ este divizor al numărului natural nenul $|a|$, atunci numărul întreg a se poate împărți la numărul întreg nenul b, iar câtul acestei împărțiri este numărul întreg c, pentru care $a = b \cdot c$.

Dacă a și b sunt ambele pozitive sau ambele negative, atunci $a : b$ este un număr pozitiv.
Dacă unul dintre numere este pozitiv și celălalt este negativ, atunci $a : b$ este un număr negativ.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Din exemplele de mai sus și din regula semnelor pentru înmulțirea numerelor întregi, deducem următoarele rezultate.

Dacă a, b, c sunt numere întregi nenule, iar $\lvert b \rvert$ și $\lvert c \rvert$ sunt divizori ai lui $\lvert a \rvert$, atunci au loc simultan relațiile: $a = b \cdot c \Leftrightarrow b = a : c \Leftrightarrow c = a : b$.	
$0 : a = 0$; $a : 1 = a$; $a : (-1) = -a$; $a : a = 1$; $a : (-a) = -1$, oricare ar fi numărul întreg nenul a.	
Împărțirea la 0 nu are sens!	
Dacă $a > 0$, $b > 0$ și $b \mid a$, atunci $a : b \in \mathbb{Z}_+$ și $a : b = \lvert a \rvert : \lvert b \rvert$.	$(+24) : (+3) = 24 : 3 = 8$
Dacă $a < 0$, $b < 0$ și $\lvert b \rvert$ divide $\lvert a \rvert$, atunci $a : b \in \mathbb{Z}_+$ și $a : b = \lvert a \rvert : \lvert b \rvert$.	$(-9) : (-3) = \lvert -9 \rvert : \lvert -3 \rvert = 9 : 3 = 3$
Dacă $a > 0$, $b < 0$ și $\lvert b \rvert$ divide $\lvert a \rvert$, atunci $a : b \in \mathbb{Z}_-$ și $a : b = -(\lvert a \rvert : \lvert b \rvert)$.	$(+21) : (-7) = -(\lvert +21 \rvert : \lvert -3 \rvert) =$ $= -(21 : 3) = -7$
Dacă $a < 0$, $b > 0$ și $\lvert b \rvert$ divide $\lvert a \rvert$, atunci $a : b \in \mathbb{Z}_-$ și $a : b = -(\lvert a \rvert : \lvert b \rvert)$.	$(-42) : (+2) = -(\lvert -42 \rvert : \lvert +2 \rvert) =$ $= -(42 : 2) = -21$.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

a) Pentru numerele întregi nenule $a = 9$ și $b = -21$, determinați numărul întreg c cu proprietatea că $\lvert c \rvert$ este divizor comun al numerelor că $\lvert a \rvert$ și $\lvert b \rvert$.

b) Pentru fiecare număr întreg c, identificat la subpunctul a), calculați $a : c$; $b : c$; $a : b + a : c$; $a + b$; $(a + b) : c$.

c) Pentru valorile lui c, identificate la subpunctul a), probați egalitatea $(a + b) : c = a : c + b : c$, pe care o cunoaștem de la împărțirea numerelor naturale.

Rezolvare. **a)** $\lvert a \rvert = 9$ și $D_9 = \{1, 3, 9\}$; $\lvert b \rvert = 21$ și $D_{21} = \{1, 3, 7, 21\}$. Divizorii comuni ai numerelor 9 și 21 sunt 1 și 3, deci $\lvert c \rvert \in \{1, 3\}$, adică $c \in \{-3, -1, 1, 3\}$.

b)

c	$9 : c$	$-21 : c$	$9 : c + (-21 : c)$	$9 + (-21)$	$[9 + (-21)] : c$
-3	-3	$+7$	$(-3) + (7) = \mathbf{+4}$	-12	$(-12) : (-3) = \mathbf{+4}$
-1	-9	$+21$	$(-9) + (21) = \mathbf{+12}$	-12	$(-12) : (-1) = \mathbf{+12}$
$+1$	$+9$	-21	$(+9) + (-21) = \mathbf{-12}$	-12	$(-12) : (+1) = \mathbf{-12}$
$+3$	$+3$	-7	$(+3) + (-7) = \mathbf{-4}$	-12	$(-12) : (+3) = \mathbf{-4}$

c) Din tabel, rezultă că pentru toate numerele întregi c pentru care $a : c$ și $b : c$ sunt numere întregi, are loc egalitatea $(a + b) : c = a : c + b : c$.

Reținem!

Dacă a, b, c, $c \neq 0$ sunt numere întregi astfel încât $a : c$ și $b : c$ sunt numere întregi și $a = b$, atunci $a : c = b : c$.
Dacă a, b, c, $c \neq 0$ sunt numere întregi astfel încât $a : c$ și $b : c$ sunt numere întregi, atunci $(a + b) : c = a : c + b : c$ și $(a - b) : c = a : c - b : c$.
Dacă a, b, c, d, $c \neq 0$ și $d \neq 0$ sunt numere întregi astfel încât $a : c$ și $b : d$ sunt numere întregi, atunci $(a \cdot b) : (c \cdot d) = (a : c) \cdot (b : d)$.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Scrieți pe caiete *literele* care identifică împărțiri cu rezultat un număr întreg negativ, apoi efectuați împărțirile.

a) –32 : (–8);
b) –27 : (9);
c) 24 : (–3);
d) (44) : 4;
e) –30 : (5);
f) 12 : (–1);
g) –18 : (–6);
h) 72 : (–12).

2. Scrieți pe caiete următoarele operații. Subliniați *literele* care identifică împărțiri cu rezultat un număr întreg pozitiv, apoi efectuați împărțirile.

a) –49 : (7);
b) –42 : (–6);
c) 18 : 9;
d) 200 : (–4);
e) 0 : (–10);
f) –56 : (–8);
g) 88 : (–11);
h) –25 : (–1) : (–5).

3. Efectuați calculele:

a) –48 : (–8);
b) –63 : (+9);
c) 144 : (–12);
d) (200) : (–25);
e) –120 : (+5);
f) 156 : (–13);
g) –108 : (–9) : (–2);
h) 400 : | –4 | : (–2).

4. Calculați câtul împărțirii dintre:

a) numărul –1000 și opusul celui mai mare divizor al numărului 25;
b) opusul numărului (–33 + 99) și numărul (–11 – 22);
c) numărul întreg nenul *n* și opusul lui.

5. Asociați fiecărei litere corespunzătoare calculului din prima coloană, numărul care reprezintă rezultatul corect, aflat în coloana a doua:

a. –512 : 8 **b.** 240 : (–4) **c.** –900 : 15 : (–1) **d.** –189 : (–1 – 2)	**1.** 63 **2.** 60 **3.** –60 **4.** –64 **5.** –63 **6.** +64

6. Determinați:

a) numărul întreg *m*, știind că $12 \cdot m = -84$;
b) numărul întreg *n*, știind că $-5 \cdot (n + 17) = +85$;
c) numărul întreg *p*, știind că $(p - 9) \cdot (-3 + 5) = -86$.

7. Calculați:

a) $-500 : (-19 + 3^2)$;
b) $108 : [-6 - (-29) - 5]$;
c) $[+47 + (-175)] : (-3 \cdot 4 - 4 \cdot 5)$.

8. Determinați:

a) numărul întreg *a*, știind că $a \cdot b + a \cdot c = -225$ și $b + c = -15$;
b) numărul întreg *b*, știind că $a \cdot b - b \cdot c = -342$ și $a - c = -19$;
c) numărul întreg *c*, știind că $a \cdot c + b \cdot c + c = -441$ și $|a + b| = 8$.

Minitest

1. Efectuați împărțirile:

5 p **a)** –60 : (–5);
5 p **b)** 100 : (–4);
5 p **c)** (–432) : (–6) : (–9);
5 p **d)** (–23 + 58):(–2 – 5).

30 p **2.** Alegeți perechile de numere, elemente ale mulțimii {9; –1; +1; 7; –72; 96; 8; –56}, al căror cât este –8.

3.

20 p **a)** Dacă $a \cdot x + a \cdot y = -108$ și $a = -18$, calculați $x + y$.
20 p **b)** Dacă $b \cdot x - b \cdot y = -11$ și $x - y = -1$, calculați *b*.

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

L4 Puterea cu exponent număr natural a unui număr întreg nenul. Reguli de calcul cu puteri

Ne amintim

Pentru numerele naturale oarecare a și n cu $n \geq 2$, produsul $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{de } n \text{ ori } a}$ se notează a^n și se numește *puterea* a n-a a numărului natural a.

Exemple. Puterea a doua a numărului 2 este $2^2 = 2 \cdot 2$. Puterea a treia a numărului 2 este $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$. Puterea a n-a a numărului 1 este $1^n = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{\text{de } n \text{ ori } 1}$.

$a^1 = a$, oricare ar fi numărul natural a; $a^0 = 1$, oricare ar fi numărul natural *nenul* a.

Atenție! 0^0 nu are sens!

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Fie $a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
Produsul $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{de } n \text{ ori } a}$ se notează a^n și se numește *puterea* a n-a a numărului întreg a.

În descrierea de mai sus, numărul a se numește *baza* puterii, iar numărul n se numește *exponentul* puterii. Detaliem informațiile de mai sus în tabelul următor.

produsul	$(-2) \cdot (-2)$	$(-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$	$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{de } n \text{ ori } a}$
notația	$(-2)^2$	$(-1)^3$	a^n
citire	-2 la puterea a doua	-1 la puterea a treia	a la puterea n
interpretare	puterea a doua a numărului -2.	puterea a treia a numărului -1.	puterea a n-a a numărului a.
baza	-2	-1	a
exponentul	2	3	n

Rămân valabile convențiile de la numere naturale:

$a^1 = a$, oricare ar fi numărul a. $a^0 = 1$, oricare ar fi numărul întreg *nenul* a.
$0^n = 0$, oricare ar fi numărul natural *nenul* n.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Am identificat reguli cu ajutorul cărora putem efectua anumite calcule cu puteri. Toate acestea se păstrează și pentru numerele întregi.

Denumirea regulii	Regula și condițiile de aplicare
produsul a două puteri care au aceeași bază	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}^*$ și $m, n \in \mathbb{N}$.
câtul a două puteri care au aceeași bază	$a^m : a^n = a^{m-n}$, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}^*$ și $m, n \in \mathbb{N}$, cu $m \geq n$.
puterea unei puteri	$(a^m)^n = a^{mn}$, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}^*$ și $m, n \in \mathbb{N}$.
puterea unui produs	$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{Z}^*$ și $m \in \mathbb{N}$.
puterea unui cât	$(a : b)^m = a^m : b^m$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{Z}^*$ și $m \in \mathbb{N}$.

Ne reamintim că 0^0 nu are sens.

Problemă rezolvată 1

a) Scrieți numărul $(-3)^{10} : [(-3)^2 \cdot (-3)^2]^2$ ca o singură putere cu baza -3.

b) Efectuați calculele $[(-2)^{12} \cdot 5^{10}] : [(-2)^9 \cdot 5^7]$ și scrieți rezultatul ca putere cu exponentul mai mare ca 1.

c) Considerăm numerele $x = (-2)^{11} \cdot 8^{10}$ și $y = 3^{41} : (-3)^{27}$.

Determinați numerele naturale a și b, știind că $(x \cdot y) : (2^a \cdot 3^b) = 2^5 \cdot 3^3$.

Soluție.

a) $(-3)^{10} : [(-3)^2 \cdot (-3)^2]^2 = (-3)^{10} : [(-3)^{2+2}]^2 =$
$= (-3)^{10} : [(-3)^4]^2 = (-3)^{10} : (-3)^{4 \cdot 2} = (-3)^{10} : (-3)^8 = (-3)^2$.

b) $[(-2)^{12} \cdot 5^{10}] : [(-2)^9 \cdot 5^7] = [(-2)^{12} : (-2)^9] \cdot (5^{10} : 5^7) =$
$= (-2)^{12-9} \cdot 5^{10-7} = (-2)^3 \cdot 5^3 = [(-2) \cdot 5]^3 = (-10)^3$.

c) $x = (-2)^{11} \cdot 8^{10} = (-2)^{11} \cdot (2^3)^{10} = -2^{11} \cdot 2^{3 \cdot 10} =$
$= -(2^{11} \cdot 2^{30}) = -2^{11+30} = -2^{41}$;
$y = 3^{41} : (-3)^{27} = 3^{41} : (-3^{27}) = -3^{41-27} = -3^{14}$.

Atunci, $(x \cdot y) : (2^a \cdot 3^b) = ((-2^{41}) \cdot (-3^{14})) : (2^a \cdot 3^b) =$
$= (2^{41} \cdot 3^{14}) : (2^a \cdot 3^b)$. Pentru $a \leq 41$ și $b \leq 14$, egalitatea din enunț devine: $2^{41-a} \cdot 3^{14-b} = 2^5 \cdot 3^3$.

Deducem $41 - a = 5$ și $14 - b = 3$, adică $a = 36$ și $b = 11$.

A compara două numere întregi x și y înseamnă a stabili care dintre relațiile $x < y$, $x = y$, $x > y$ are loc.
Ne propunem să comparăm două numere întregi scrise sub formă de puteri.
Deducem ușor că două puteri care au *aceeași bază și același exponent* reprezintă două *numere egale*.
Pentru a compara puterile a două numere întregi este recomandat să stabilim semnul fiecărei puteri. Dacă cele două puteri au același semn, atunci se compară mai întâi modulele lor.
Dacă numerele se pot scrie ca două puteri cu același exponent, sau ca două puteri cu aceeași bază, aplicând tehnicile de comparare a puterilor numerelor naturale și folosind corect semnele numerelor întregi comparate, obținem următoarele rezultate:

Dacă $a \in \mathbb{Z}$, $a \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$ și $n \in \mathbb{N}$, atunci $a^n < a^m \Leftrightarrow n < m$.	$2^3 < 2^5$; $7^{100} < 7^{101}$
Dacă $a \in \mathbb{Z}_+$, $b \in \mathbb{Z}_+$ și $n \in \mathbb{N}$, atunci $a^n < b^n \Leftrightarrow a < b$.	$2^3 < 3^3$; $7^{100} < 8^{100}$
Dacă $a \in \mathbb{Z}_-$, $b \in \mathbb{Z}_-$ și $n \in \mathbb{N}$, număr par, atunci $a^n < b^n \Leftrightarrow a > b$.	$(-2)^4 < (-3)^4$ și $-2 > -3$
Dacă $a \in \mathbb{Z}_-$, $b \in \mathbb{Z}_-$ și $n \in \mathbb{N}$, număr impar, atunci $a^n < b^n \Leftrightarrow a < b$.	$(-7)^5 < (-3)^5$ și $-7 < -3$
Dacă $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ și n este impar, atunci $a^n < b^n \Leftrightarrow a < b$.	$(-2)^3 < 3^3$ și $-2 < 3$

Problemă rezolvată 2

a) Completați puteri ale numerelor -1, 1, -2, 2 în tabelul alăturat.

b) Pentru a negativ, stabiliți semnul puterilor cu exponent impar.

c) Intuiți relația între $(-a)^n$ și $-a^n$, $a \in \mathbb{Z}^*$.

a	a^0	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6
-1	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$
$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$
-2	$+1$	-2	$+4$	-8	$+16$	-32	$+64$
$+2$	$+1$	$+2$	$+4$	$+8$	$+16$	$+32$	$+64$

Rezolvare. **b)** Se observă din tabel că toate puterile cu exponent impar ale numerelor negative sunt, de asemenea, numere negative. Mai mult, observăm că

$(-1)^1 = (-1)^3 = (-1)^5 = -1 < 0$; $(-1)^0 = (-1)^2 = (-1)^4 = (-1)^6 = +1 > 0$;

c) $(-a)^n = [(-1) \cdot a]^n = (-1)^n \cdot a^n$. Dacă n este număr par, atunci $(-a)^n = (+1) \cdot a^n = a^n$, iar dacă n este impar, atunci $(-a)^n = (-1) \cdot a^n = -a^n$.

Reținem!

$1^n = 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$; $(-1)^n = 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, n par; $(-1)^n = -1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, n impar.
Dacă n este număr natural par, $n \neq 0$, atunci $(-a)^n = a^n$, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$.
Dacă n este număr natural impar, atunci $(-a)^n = -a^n$, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Scrieți ca putere cu exponent număr natural:
a) $-3 \cdot (-3)$; **d)** $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$;
b) $5 \cdot 5 \cdot 5$; **e)** $(-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6)$;
c) -10; **f)** $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$.

2. Calculați puterile:
a) $(-2)^3$; **c)** $(-1)^7$; **e)** $(10)^2$;
b) $(-5)^4$; **d)** $(-8)^1$; **f)** $(-3)^5$.

3. Copiați pe caiete, efectuați calculele necesare și completați tabelul următor:

$(-7)^2 = \ldots$	$(-5)^3 = \ldots$	$(-3)^4 = \ldots$
$(+7)^2 = \ldots$	$(+5)^3 = \ldots$	$(+3)^4 = \ldots$
$(-1)^5 = \ldots$	$(-10)^6 = \ldots$	$(-2)^7 = \ldots$
$(+1)^5 = \ldots$	$10^6 = \ldots$	$(+2)^7 = \ldots$

4. Se consideră următorul șir de puteri: $(-1)^3$, 1^7, $(-2)^4$, 0^9, $(-3)^5$, 2^3, $(-5)^1$, $(-4)^0$, $(-6)^2$, $(-7)^3$, -8^2.
a) Scrieți mulțimea formată din termenii pozitivi ai șirului.
b) Scrieți mulțimea formată din termenii negativi ai șirului.
c) Precizați, argumentat, dacă propoziția „Șirul dat conține numere întregi care nu sunt nici negative nici pozitive” este adevărată.

5. Calculați: $(-15)^1$, $(-3)^3$, -2^4, $(-13)^2$, -1^7, $(-4)^0$, 2023^1.

6. **a)** Scrieți ca putere cu baza -2, numerele: $-2, 4, -8, 16, -128$;
b) Scrieți ca putere cu baza -10, numerele $1, -10, +100, -1000, -10\,000\,000$;
c) Scrieți ca putere cu exponentul 3, numerele $1, -1, -27, -125, 1000$.

7. Copiați pe caiete tabelul și completați în spațiile libere câte o putere astfel încât să obțineți egalități:

$2^3 \cdot 2^4 = \ldots$	$(-3)^2 \cdot (-3)^4 = \ldots$
$4^5 : 4^2 = \ldots$	$(-2)^8 : (-2)^3 = \ldots$
$[(-2)^2]^3 = \ldots$	$[(-1)^4]^5 = \ldots$
$(-10)^3 : (-10) = \ldots$	$(-7)^9 : (-7)^3 : (-7)^2 = \ldots$
$[(-9)^6]^0 = \ldots$	$[(-2)^2 \cdot 2^3]^4 = \ldots$

8. Efectuați, folosind regulile de calcul cu puteri:
a) $(2 \cdot 3^2)^3$; **c)** $[(-4)^2 \cdot 5^3]^5$;
b) $[2^3 \cdot (-3)^2]^4$; **d)** $[(-6)^4 \cdot (-7)^2]^6$.

9. Efectuați calculele:
a) $(-2)^6 \cdot 2^4$; **d)** $[(-3)^3]^4 : (-3)^9$;
b) $81 \cdot (-3)^7 : (-3)^{10}$; **e)** $(-4)^{14} : (-4)^{12} \cdot (-4)$;
c) $5 \cdot (-5^2) : (-125)$; **f)** $(-2)^2 \cdot (-2)^6 : (-2)^7$.

10. Demonstrați egalitățile:
a) $6^6 = 2^6 \cdot 3^6$;
b) $(-30)^5 = (-2)^5 \cdot (-3)^5 \cdot (-5)^5$;
c) $(-10)^{11} = (-2)^{11} \cdot 5^{11} = 2^{11} \cdot (-5)^{11}$.

Minitest

1. Calculați:
4×5 p **a)** $2^3 - (-3)^2$; **b)** $(-1)^{21} - (-1)^{12}$; **c)** $(-2)^2 \cdot (-2)^3$; **d)** $(-5)^7 : (-5)^5$.
30 p **2.** Determinați numărul n, știind că are loc egalitatea: $[(-7)^2]^4 : (-7)^n = (-7)^3$.
40 p **3.** Comparați numerele $a = (-8 + 1)^7 : (-6 - 1)^4$ și $b = (-2)^9$.

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

L5 Efectuarea calculelor în care intervin adunări și scăderi, folosind proprietățile operațiilor în $\mathbb{Z}$

Rezolvăm și observăm

Considerăm numerele întregi a și b și ne propunem să intuim opusul sumei acestora.

În acest scop, completăm și observăm tabelul alăturat.

În toate cele patru cazuri, opusul sumei numerelor a și b este egal cu suma opuselor acestor numere.

a	b	$a + b$	$-a$	$-b$	$-(a + b)$	$-a + (-b)$
+2	+1	+3	−2	−1	−3	−3
−2	+1	−1	+2	−1	+1	+1
+2	−1	+1	−2	+1	−1	−1
−2	−1	−3	+2	+1	+3	+3

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Corectitudinea rezultatului oricărui calcul cu numere întregi depinde de respectarea cu strictețe a proprietăților operațiilor pe care urmează a le efectua.
Folosind definiția diferenței, proprietățile adunării și distributivitatea înmulțirii față de adunare, *justificăm concluzia intuită* mai sus și deducem noi proprietăți utile în efectuarea calculelor.

Proprietatea	*Justificare*	*Proprietățile folosite*
1. $-(a+b) = (-a) + (-b) = -a - b$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{Z}$.	$-(a+b) = (-1) \cdot (a+b) =$ $= (-1) \cdot a + (-1) \cdot b =$ $= (-a) + (-b) = -a - b$.	Opusul unui număr este produsul între –1 și acest număr. Înmulțirea este distributivă față de adunare.
Opusul unei sume este egal cu suma opușilor termenilor.		
Proprietatea	*Justificare*	*Proprietățile folosite*
2. $a - (b+c) = a - b - c$, oricare ar fi a, b, c numere întregi.	$a - (b+c) = a + [-(b+c)] =$ $= a + (-b-c) = a + [(-b) + (-c)] =$ $= a + (-b) + (-c) = a - b - c$.	Opusul unei sume este egal cu suma opușilor termenilor. Asociativitatea adunării numerelor întregi.
Semnul „–" în fața parantezei, care conține o sumă, schimbă semnele tuturor termenilor din paranteză.		

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Calculați, eliminând parantezele:
a) $35 + (-37) - (+28)$;
b) $-27 - (+52) - (-68) - (+44)$;
c) $-17 - (-71) + (-62)$;
d) $307 - (+82) - (-134) - (+89)$.

2. Fie numerele
$a = -10 + 20 - (-30 + 40 - 50) + (-60)$ și
$b = -78 + 90 + (-55 - 77 + 121)$.
Copiați tabelul pe caiete apoi stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor.

Propoziția	*A/F*
Numărul a este număr întreg negativ.	
Numărul b este număr întreg pozitiv.	
Numărul $-a - (-b)$ este număr natural.	
$a - (-102) > b - (-201)$	

3. Efectuați calculele:
a) $-53 + 42 - 67 + 81$;
b) $123 - 87 + 59 - 72 - 23$;
c) $-7 - (-51 + 46 - 32) - (-48 + 27)$;
d) $-321 - [-93 + (-136 + 204) - (-64)]$.

4. Calculați sumele
a) $1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + 89 - 90$;
b) $(2 + 4 + 6 + \ldots + 100) + (-1 - 3 - 5 - \ldots - 99)$.

5. Calculați și ordonați crescător numerele:
$a = 100 + [-105 + (-35 + 79 - 4) - (-35) + 127]$,
$b = [-39 + (-23 + 9 + 20) - (-31 + 16 - 87) + 32] - (-71 - 2)$,
$c = [(-17 + 29) + (-14 + 32 - 18)] - (-104 + 120)$.

6. Aflați numărul $-x + (-y) - (-z) - 2024$, știind că:
$|x + (-23)| = 0$, $|32 - y| = 23 - x$ și $z - 3^3 = -(-207)$.

Minitest

1. Alegeți varianta corectă de răspuns. Doar un răspuns este corect.
20 p **a)** Eliminând parantezele în calculul x – (y + z), obținem:
A. $x - y - z$; **B.** $x - y + z$; **C.** $x + y + z$; **D.** $x + y - z$.
20 p **b)** Eliminând parantezele în calculul x + (– y + z) obținem:
A. $x + y - z$; **B.** $x - y + z$; **C.** $x + y + z$; **D.** $x - y - z$.
20 p **c)** Numărul 4 – (17 – 25) este egal cu:
A. 8; **B.** –8; **C.** –12; **D.** 12.
15 p **2.** Calculați $a = 25 - [-13 + (-5 + 11 - 17) + (-15)]$ și precizați dacă este pozitiv, negativ sau nul.
15 p **3.** Calculați $-(-b + c)$, știind că $b = -[-(-5)]$ și $c = -\{+[-(+7)]\}$.

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

L6 Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor

Ne amintim

1. Dacă exercițiul conține *doar operații de același ordin*, acestea se efectuează în ordinea în care sunt scrise, de la stânga la dreapta.

2. Dacă exercițiul are operații de *ordine diferite,* dar *nu conține paranteze*, atunci se efectuează operațiile de ordin trei, apoi de ordin doi și la final, operațiile de ordinul întâi, respectând ordinea de la **1**, adică:

Pasul 1. Se efectuează operațiile cu puteri și ridicările la putere.

Pasul 2. Se efectuează înmulțirile și împărțirile, folosind rezultatele de la etapa anterioară și respectând ordinea de la **1**.

Pasul 3. Se efectuează adunările și scăderile, folosind rezultatele de la etapa anterioară și respectând ordinea de la **1**.

Observație: Operațiile cu puteri se pot efectua în etapa pregătitoare sau *pe parcursul rezolvării*, atunci când dorim să scriem unele numere într-o formă care să simplifice calculele.

3. Dacă exercițiul conține și paranteze, atunci:

Pasul 1. Se efectuează calculele din parantezele rotunde, respectând ordinea descrisă la **2**.

Pasul 2. Se transformă parantezele pătrate în paranteze rotunde, acoladele se transformă în paranteze pătrate.

Pasul 3. Se efectuează calculele din noile paranteze rotunde, respectând ordinea descrisă la **2**.

Pasul 4. Se continuă, în acest mod, până când se elimină toate parantezele, apoi se efectuează calculele fără paranteze.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Ordinea efectuării operațiilor cu numere întregi este aceeași ca la operații cu numere naturale. Particularitățile constau în efectuarea operațiilor cu numere negative.

Exercițiul **1.** Efectuați calculele: $3 \cdot [5 - 6 \cdot (4 - 68 : 4 + 17)]$.

Soluție	*Etapă*	*Calcul*	*Redactare*
	Pasul 1. Efectuăm înmulțirile și împărțirile din paranteza rotundă	$4 - 68 : 4 + 17 = 4 - 17 + 17$ $3 \cdot [5 - 6 \cdot (4 - 17 + 17)]$	Rezolvarea exercițiului se scrie/ se redactează astfel: $3 \cdot [5 - 6 \cdot (4 - 68 : 4 + 17)] =$ $= 3 \cdot [5 - 6 \cdot (4 - 17 + 17)] =$ $= 3 \cdot (5 - 6 \cdot 4) =$ $= 3 \cdot (5 - 24) =$ $= 3 \cdot (-19) =$ $= -57.$
	Pasul 2. Efectuăm adunările și scăderile din paranteza rotundă	$4 - 17 + 17 = 4$ $3 \cdot [5 - 6 \cdot (+4)]$	
	Pasul 2'. Transformăm paranteza dreaptă în paranteză rotundă […] → (…)	$3 \cdot (5 - 6 \cdot 4)$	
	Pasul 3. Efectuăm calculele din noua paranteză rotundă	$5 - 6 \cdot 4 = 5 - 24 = -19$ $3 \cdot (-19)$	
	Pasul 4. Efectuăm calculele	$3 \cdot (-19) = -57.$	

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Exercițiul **2.** Efectuați calculul: $3 \cdot 5^3 - 4^2 - 51^1 \cdot 20$.

Soluție	*Etapă*	*Calcul*	*Redactare*
	Pasul 1. Efectuăm operațiile cu puteri	$5^3 = 125$; $4^2 = 16$; $51^1 = 51$.	$3 \cdot 5^3 - 4^2 - 51^1 \cdot 20 =$ $= 3 \cdot 125 - 16 - 51 \cdot 20 =$ $= 375 - 16 - 1020 =$ $= 359 - 1020 =$ $= -661.$
	Pasul 2. Efectuăm înmulțirile și împărțirile, apoi adunările și scăderile, folosind rezultatele obținute.	$3 \cdot 125 - 16 - 51 \cdot 20 =$ $= 375 - 16 - 1020 =$ $= 359 - 1020 = -661.$	

Operațiile cu puteri se pot efectua în etapa pregătitoare sau *pe parcursul rezolvării*, atunci când dorim să scriem unele numere într-o formă care să simplifice calculele.	*Exemplu.* $[(-4)^6 : 2^{11} - 2]^8 - 37^2 + 31 \cdot 37 = (2^{12} : 2^{11} - 2)^8 - 37^2 + 31 \cdot 37 =$ $= (2-2)^8 - 37^2 + 31 \cdot 37 = 37 \cdot (-37 + 31) = 37 \cdot (-6) = -222.$

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Alegeți varianta corectă de răspuns. Doar un răspuns este corect.

a) Suma dintre -100 și produsul numerelor -3 și -33 este:

A. 1; **B.** -1; **C.** -3; **D.** 3.

b) Diferența dintre câtul împărțirii $196 : (-7)$ și -30 este:

A. 3; **B.** -3; **C.** 2; **D.** -2.

c) Suma dintre cel mai mic număr întreg de forma $-\overline{ab}$ și cubul numărului 5 este:

A. 26; **B.** -27; **C.** 27; **D.** -26.

2. Calculați:

a) $-29 + (15 - 36 + 79) - 144$;

b) $-32 - [-60 + (-35 + 77) - 83]$;

c) $45 - |-7 + 5| + |-16 + 33 - 25|$.

3. Efectuați calculele:

a) $1 + 2 \cdot (-3)$;

b) $-4 - 5 \cdot (-6)$;

c) $7 + 8 \cdot (-9) + (-10)^2$;

d) $-350 : (-14) + 5 \cdot (-3)$;

e) $-4 \cdot [-10 + (-3)^2] - (-23 + 2^5)$;

f) $512 : (-4)^3 - (-7^1 - 1^7) \cdot (-1)^6$.

4. Formulați câte un exercițiu de calcul al cărui rezultat să fie -10 și care să conțină:

a) o adunare;

b) o adunare și o scădere;

c) o adunare, o scădere, o înmulțire și o împărțire.

5. Fie $a = 2 \cdot \{-1 + [(-2)^3 - (-2)^3 : (-2)^2] : (-3) \cdot (-1)\} + 3$.

a) Calculați numărul a.

b) Determinați numerele întregi b pentru care $b^3 < a < b$.

6. Pentru $a = -4$ și $b = |-2|$, calculați $A = (-a)^3 + b^2 - a^2 \cdot (-b)^3$.

7. Se consideră numerele:

$m = |-888 : (-4) - 84| : (-23)$,

$n = -14 + 3 \cdot [-2 \cdot (19 - 23) - 10]$,

$p = 17 - (-4) \cdot (-6) - (-3)^3$.

Copiați pe caiete, efectuați calculele, apoi completați în caseta liberă litera ***A***, dacă propoziția este adevărată și litera ***F***, dacă propoziția este falsă.

Propoziția	*A/F*
Numărul m este un număr întreg negativ.	
Numărul n este un număr întreg nenegativ.	
Numărul p este opusul numărului n.	
Rezultatul calculului $m \cdot (n + p + 1)$ este 6.	

8. Efectuați calculele:

a) $(-11) \cdot [(-3)^3 + (-2)^4 + (-4032) : (-84)]$;

b) $(-2)^{73} : (-2)^{69} - 3 \cdot \{-2 - 2 \cdot [(-3)^7 : (-3)^5 - 14)]\}$;

c) $[(-7)^7]^2 : [(-7)^7 \cdot (-7)^4] + (2^7 \cdot 7^2) : (-2^6 \cdot 7)$;

d) $-4 - 4 \cdot [(-3)^5 : 81 - 2] + (-8)^1 : (-8)^0$;

e) $(-1)^4 \cdot (-5)^2 \cdot (-2)^3 - (-3)^5 \cdot (2)^5 : (-6)^3$.

9. Demonstrați că numărul $x = (-3)^2 \cdot 9^3 : (-3)^7 - (-5) \cdot (-5)^4 : (-125) + 1$ este cubul unui număr întreg.

10. Fie numerele $a = -1 + (-1)^2 + (-1)^3 + 4 \cdot (-1)^5$, $b = -2^2 + (-2)^9 : 64 - (-5)^0$ și $c = [(-2)^3 \cdot (-3)^4] : [(-2)^2 \cdot (-3)^3] + (-7)^4 : (-49)$.

a) Scrieți cele trei numere în ordine crescătoare.

b) Precizați dacă propoziția p: „$a^3 + b^2 + c < 0$” este adevărată sau este falsă.

Minitest

Alegeți litera care indică varianta corectă de răspuns; doar un răspuns este corect.

20 p **1.** Rezultatul calculului $5 \cdot (-2) + 4 : (-1) + 3$ este:

A. 11; **B.** -11; **C.** 18; **D.** -18.

30 p **2.** Numărul cu 14 mai mare decât $(-132) : [2^3 + (-7) \cdot 4 - (3 - 11)]$ este egal cu:

A. 19; **B.** 20; **C.** 100; **D.** 25.

40 p **3.** După efectuarea calculelor $(-18 + 21)^3 \cdot [-63 : (-9) - (-2)^4]^2 : (-243)$, rezultatul este:

A. 8; **B.** -8; **C.** -9; **D.** 12.

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

3.3. Ecuații, inecuații, probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor/inecuațiilor în $\mathbb{Z}$

L1 Ecuații în mulțimea numerelor întregi

Ne amintim

Două numere întregi x și y sunt egale dacă și numai dacă sunt reprezentate pe axa numerelor în puncte identice. Vom scrie $x = y$.

Relația de egalitate, pe mulțimea numerelor întregi, are proprietățile:

a) este *reflexivă*: Orice număr întreg este egal cu el însuși, adică $x = x$, oricare ar fi x, număr întreg.

b) este *simetrică*: Dacă $x = y$, atunci $y = x$.

c) este *tranzitivă*: Dacă $x = y$ și $y = z$, atunci $x = z$.

În *algebră*, se folosește *relația de egalitate* și pentru formularea unor enunțuri cu una sau mai multe *variabile* sau pentru scrierea unor ecuații.

Într-o egalitate, expresia scrisă în partea stângă a semnului „=" se numește *membrul stâng* al egalității, iar expresia scrisă în partea dreaptă a semnului „=" se numește membrul drept al egalității.

Rezolvăm și observăm

Unele probleme din viața cotidiană se încadrează perfect în modele matematice generale.

Enunț	*Interpretare*
***Problema* 1.** Felix este cu doi ani mai mic decât sora sa și cu 5 ani mai mare decât fratele său. Împreună, cei trei frați au 21 de ani. Determinați vârsta lui Felix.	Datele problemei pot fi interpretate astfel: Notăm cu x vârsta lui Felix. Atunci, sora sa are $x + 2$ ani, iar fratele său are $x - 5$ ani. Împreună, au $x + (x + 2) + (x - 5)$ ani.

Din perspectiva interpretării de mai sus, avem de rezolvat *problema determinării numerelor* întregi x pentru care $x + (x + 2) + (x - 5) = 21$.

Această problemă se poate reformula astfel:

Rezolvați *ecuația* $x + (x + 2) + (x - 5) = 21$, în mulțimea numerelor naturale.

Rezolvarea ecuației și interpretarea soluției

Folosind proprietățile adunării, prin *metoda mersului invers*, ecuația devine:

$$x + x + 2 + x - 5 = 21 \Leftrightarrow 3x - 3 = 21 \;\big|\; +3$$
$$3x = 24 \;\big|\; :3$$
$$x = 8.$$

Revenind la problema inițială, deducem că Felix are 8 ani.

Într-adevăr, dacă Felix are 8 ani, atunci sora lui are $8 + 2 = 10$ (ani), fratele lui are $8 - 5 = 3$ (ani), iar împreună au $8 + 10 + 3 = 21$ (ani).

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Problema determinării numerelor $x \in D$, care verifică o *egalitate dată* se numește *ecuație* cu necunoscuta x, din mulțimea D.
Mulțimea D se mai numește și *domeniu* al ecuației.

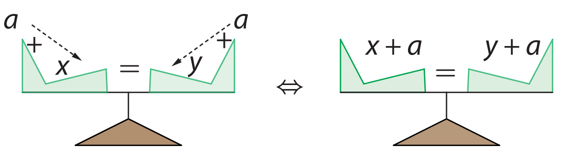
Problemă. Determinați numerele întregi din mulțimea $D = \{-5, 0, 2, 5\}$, cu proprietatea $x^3 = 25 \cdot x$.

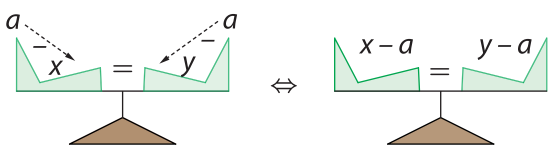
Reformulare.
Rezolvați în mulțimea $D = \{-5, 0, 2, 5\}$, ecuația $x^3 = 25 \cdot x$ sau
Rezolvați ecuația $x^3 = 25 \cdot x$, $x \in \{-5, 0, 2, 5\}$.

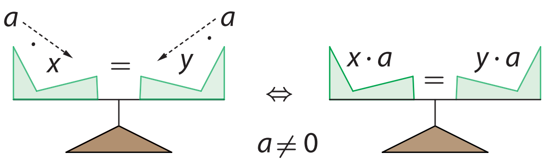
Fiecare număr $x \in D$ care verifică ecuația (egalitatea dată) este o *soluție* a ecuației. *A rezolva ecuația* înseamnă a determina mulțimea tuturor soluțiilor acesteia, notată, de regulă, cu *S*.	Pentru fiecare element din *D*, verificăm dacă este soluție a ecuației. Înlocuind în ecuație $x = -5$, obținem $-125 = -125$, afirmație *adevărată*. Înlocuind în ecuație $x = 0$, obținem $0 = 0$, afirmație *adevărată*. Înlocuind în ecuație $x = 2$, obținem $8 = 50$, afirmație falsă. Înlocuind în ecuație $x = 5$, obținem $125 = 125$, afirmație *adevărată*. În concluzie, numerele -5, 0, $+5$ sunt soluțiile ecuației și scriem $S = \{-5, 0, +5\}$
Două ecuații sunt *echivalente* dacă au același *domeniu* și *aceleași soluții*.	Ecuațiile $2 \cdot x = -4$, $x \in \mathbb{Z}$ și $-4 \cdot x - 8 = 0$, $x \in \mathbb{Z}$ sunt echivalente deoarece ambele au necunoscuta din mulțimea $\mathbb{Z}$ și au aceeași mulțime de soluții: $S = \{-2\}$. $\begin{array}{rl} 2 \cdot x = -4 & \vert : 2, \\ x = -4 : 2 & \\ x = -2. & \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{rl} -4 \cdot x - 8 = 0 & \vert +8 \\ -4 \cdot x = 8 & \vert : (-4) \\ x = -2. & \end{array}$ În $\mathbb{Z}$, ambele ecuații au soluția $x = -2$.

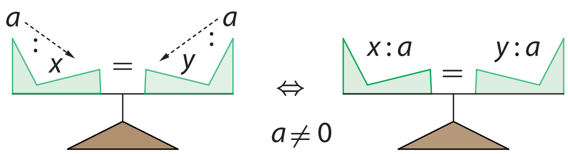
Observație: Mulțimea soluțiilor unei ecuații este o *submulțime* a domeniului acesteia.

Pornind de la o egalitate, se pot obține *egalități echivalente* prin următoarele transformări:

<table>
<tr><th>Transformarea</th><th>În limbajul simbolisticii matematice</th></tr>
<tr><td>Se adună sau se scade, din ambii membri ai egalității același număr întreg.</td><td>$x = y \Leftrightarrow x + a = y + a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$;
$x = y \Leftrightarrow x - a = y - a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$.</td></tr>
<tr><td>

Dacă $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$, atunci $x = y \Leftrightarrow x + 7 = y + 7$.</td><td>

Dacă $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$, atunci $x = y \Leftrightarrow x - 7 = y - 7$.</td></tr>
<tr><td>Se înmulțesc sau se împart ambii membri ai egalității cu același număr întreg nenul.</td><td>$x = y \Leftrightarrow x \cdot a = y \cdot a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}^*$;
$x = y \Leftrightarrow x : a = y : a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}^*$.</td></tr>
<tr><td>

Dacă $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$, atunci $x = y \Leftrightarrow x \cdot 2 = y \cdot 2$.</td><td>

Dacă $\vert x \vert \vdots 2$ și $\vert y \vert \vdots 2$, atunci $x = y \Leftrightarrow x : 2 = y : 2$.</td></tr>
<tr><td>Dacă cei doi membri ai egalității sunt numere nenegative, atunci se pot obține egalități echivalente și dacă se ridică la puterea n, număr natural nenul, ambii membri ai egalității.</td><td>Dacă $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$, $x \geq 0$ și $y \geq 0$, atunci
$x = y \Leftrightarrow x^n = y^n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.</td></tr>
</table>

Exemple de redactare a transformărilor echivalente ale unei egalități.

a) $\begin{array}{rl} x = y & \vert \cdot 3 \\ 3x = 3y & \vert -1 \\ 3x - 1 = 3y - 1 & \end{array}$

b) $\begin{array}{rl} x = y & \vert \cdot (-2) \\ -2x = -2y & \vert +7 \\ 7 - 2x = 7 - 2y & \end{array}$

c) Pentru $x \geq 0$, $y \geq 0$

$\begin{array}{rl} x = y & \vert (\ )^2 \\ x^2 = y^2 & \vert \cdot 5 \\ 5x^2 = 5y^2 & \vert \end{array}$

d) $\begin{array}{rl} -3x - 4 = 3y - 4 & \vert +4 \\ -3x = 3y & \vert : (-3) \\ x = -y & \end{array}$

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

1. Rezolvați ecuația $(x-1)(2x-3)(2x+8)=0$ în mulțimile $\mathbb{N}$ și $\mathbb{Z}$.

Rezolvare. În rezolvarea ecuației, vom folosi următorul rezultat matematic:

Dacă produsul a două sau mai multe numere întregi este egal cu 0, atunci cel puțin unul din factori este 0.	Dacă a și b sunt numere întregi și $a \cdot b = 0$, atunci $a = 0$ sau $b = 0$.

Atunci, $(x-1)(2x-3)(x+4)=0 \Leftrightarrow x-1=0$ sau $2x-3=0$ sau $2x+8=0$.

$x-1=0 \ |+1$
$x=1$
$1 \in \mathbb{N}$ și $1 \in \mathbb{Z}$
$x=1$ este soluție și în $\mathbb{N}$ și în $\mathbb{Z}$.

$2x-3=0 \ |+3$
$2x=3$ și $3 \not\vdots 2$
Ecuația nu are soluții nici în $\mathbb{N}$ nici în $\mathbb{Z}$.

$2x+8=0 \ |-8$
$2x=-8 \ |:2$
$x=-4$
$-4 \notin \mathbb{N}$, dar $-4 \in \mathbb{Z}$
$x=-4$ este soluție doar în $\mathbb{Z}$.

Concluzie. În $\mathbb{N}$, mulțimea soluțiilor este $S=\{1\}$, iar în $\mathbb{Z}$, mulțimea soluțiilor este $S=\{1, -4\}$.

Deducem că dacă *domeniul* unei ecuații se schimbă, este posibil să se schimbe și *mulțimea soluțiilor*.

Ecuațiile care se rezolvă cel mai ușor sunt cele de forma $ax=b$ sau reductibile la ecuații de această formă (prin ecuații echivalente), unde a este un număr întreg nenul, iar b este număr întreg.

Evident, ecuația are soluție în $\mathbb{Z}$ doar dacă $|b| \vdots |a|$, iar mulțimea soluțiilor, în acest caz, este $S=\{b:a\}$.

2. Rezolvați ecuația $|3x|=12$, $x \in \mathbb{Z}$.

Rezolvare. Din definiția modulului știm că există două numere întregi care au modulul 12, cele care se reprezintă pe axa numerelor la distanța 12 de origine. Atunci, $3x=12$ sau $3x=-12$. Cum $12 \vdots 3$, obținem soluțiile $x_1=12:3=4$ și $x_2=(-12):3=-4$, iar mulțimea soluțiilor este $S=\{-4, +4\}$.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Copiați pe caiete și completați în spațiile libere numere întregi astfel încât să obțineți egalități.

a) $-8+\ldots=-3$; **d)** $48:\ldots=-12$;
b) $-10-\ldots=-4$; **e)** $\ldots:9=-108$;
c) $-4\cdot\ldots=56$; **f)** $(\ldots)^3=-27$.

2. Alegeți litera care identifică răspunsul corect. Doar un răspuns este corect.

a) Numărul -4 este soluție a ecuației:
A. $x+1=5$; **C.** $3-x=7$;
B. $x+1=-5$; **D.** $3+x=-7$.

b) Numărul 3 este soluția comună a ecuațiilor:
A. $x+3=0$ și $x-6=-2$;
B. $x-3=0$ și $5-x=2$;
C. $3-x=0$ și $x+8=12$;
D. $-3+x=-6$ și $-30:x=-10$.

c) Ecuația care are soluții în mulțimea numerelor întregi, este:
A. $2\cdot x+1=22$; **C.** $13-2\cdot x=4$;
B. $3\cdot x-4=16$; **D.** $4\cdot x-1=-5$.

3. Rezolvați, în mulțimea numerelor întregi, ecuațiile:
a) $-6+x=-2$; **d)** $-124:x=-31$;
b) $x-5=-8$; **e)** $x:(1-9)=-72$;
c) $-12\cdot x=156$; **f)** $x^2=100$.

4. Rezolvați, în mulțimea numerelor întregi, ecuațiile:
a) $3\cdot x-6=3$; **d)** $-11\cdot x+22=-33$;
b) $2\cdot x+24=0$; **e)** $x+(-2)^3=-13$;
c) $50-2\cdot x=10$; **f)** $100:(-5)+4\cdot x=12$.

5. Rezolvați, în mulțimea numerelor întregi, ecuațiile:
a) $9\cdot(x-7)=-63$;
b) $(x+4):(-2)^2=-207:23$;
c) $3\cdot x+11=x-4$;
d) $-4\cdot x+6=x+1$;
e) $-52-7\cdot x=4$;
f) $10-(8-x)=13$;
g) $-(-6-x)+5=(-2)^3$;
h) $1-2\cdot[-3-(4-x)]=5$.

6. Determinați numerele întregi x pentru care:
a) $|x|=5$; **d)** $|2-x|=1$;
b) $|-x|=7$; **e)** $6+|x-4|=2$;
c) $|x-3|=0$; **f)** $|-4\cdot x|+1=9$.

Minitest

1. Completați spațiile libere astfel încât să obțineți propoziții adevărate.
10 p a) Soluția ecuației $3 \cdot x + 4 = 43$ este numărul … .
15 p b) Mulțimea soluțiilor ecuației $|1 - 2 \cdot x| = 7$ este {…}.
2. Rezolvați în numere întregi ecuațiile:
15 p a) $2 \cdot x + 7 = 28 - x$;
15 p b) $5 \cdot (x + 4) = 2 \cdot (x + 1) - 11$;
15 p c) $(4 \cdot x - 6) : (-2) + 9 = -8 \cdot x$;
20 p d) $[-24 + 24 : (-8) + 25] \cdot (-10)^2 - 3 \cdot x = -101$.

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

L2 Inecuații în mulțimea numerelor întregi

Ne amintim

Pentru a *compara* două numere întregi *a* și *b*, folosim reprezentarea lor pe axa numerelor și proprietățile relației de egalitate și ale relațiilor de inegalitate ≤, ≥, <, >.

Pe mulțimea numerelor întregi, relația ≤ are proprietățile:

$a \leq a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$	Dacă $a \leq b$ și $b \leq a$, atunci $a = b$.	Dacă $a \leq b$ și $b \leq c$, atunci $a \leq c$.

Proprietățile relației „ ≤ ” rămân valabile și pentru relația „ ≥ ”.

Pe mulțimea numerelor întregi, relațiile < și > sunt tranzitive.	Dacă $a < b$ și $b < c$, atunci $a < c$.	Dacă $a > b$ și $b > c$, atunci $a > c$.

Pentru orice două numere întregi *a* și *b*, are loc una și numai una dintre relațiile: $a < b$, $a = b$, $a > b$.

Orice număr întreg pozitiv este mai mare decât orice număr întreg negativ și decât 0.	Dacă $a \in \mathbb{Z}_+$ și $b \in \mathbb{Z}_-$, atunci $a > b$ și $a > 0$.
Orice număr întreg negativ este mai mic decât orice număr întreg pozitiv și decât 0.	Dacă $a \in \mathbb{Z}_-$ și $b \in \mathbb{Z}_+$, atunci $a < b$ și $a < 0$.
Dintre două numere întregi pozitive, este mai mic cel care are modulul mai mic.	Pentru $a \in \mathbb{Z}_+$ și $b \in \mathbb{Z}_+$: Dacă $a < b$, atunci $\lvert a \rvert < \lvert b \rvert$. Dacă $\lvert a \rvert < \lvert b \rvert$, atunci $a < b$.
Numerele întregi pozitive sunt reprezentate, de la originea axei spre dreapta, în ordine crescătoare.	$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < \ldots$
Dintre două numere întregi negative, este mai mic cel care are modulul mai mare.	Pentru $a \in \mathbb{Z}_-$ și $b \in \mathbb{Z}_-$: Dacă $a < b$, atunci $\lvert a \rvert > \lvert b \rvert$. Dacă $\lvert a \rvert > \lvert b \rvert$, atunci $a < b$.
Numerele întregi negative sunt reprezentate, de la originea axei spre stânga, în ordine descrescătoare.	$0 > -1 > -2 > -3 > -4 > -5 > -6 > \ldots$
Produsul a două numere întregi de semne contrare (unul pozitiv și celălalt negativ) este un număr întreg negativ.	Dacă $a > 0$ și $b < 0$ sau $a < 0$ și $b > 0$, atunci $a \cdot b < 0$ și $a \cdot b = -(\lvert a \rvert \cdot \lvert b \rvert)$.
Produsul a două numere întregi de același semn (ambele pozitive sau ambele negative) este un număr întreg pozitiv.	Dacă $a < 0$ și $b < 0$ sau $a > 0$ și $b > 0$, atunci $a \cdot b > 0$ și $a \cdot b = \lvert a \rvert \cdot \lvert b \rvert$.

Rezolvăm și observăm

Problema 1	*Interpretare*
Determinați numerele întregi x cu proprietatea că, dacă la dublul numărului x adunăm numărul -12, obținem un număr întreg negativ.	Determinați numărul întreg x pentru care $2 \cdot x + (-12) < 0$.
Problema determinării numerelor întregi x pentru care $2 \cdot x + (-12) < 0$ se reformulează astfel: „Rezolvați în $\mathbb{Z}$ *inecuația* $2 \cdot x + (-12) < 0$." sau „Rezolvați *inecuația* $2 \cdot x + (-12) < 0$, $x \in \mathbb{Z}$."	
Rezolvăm *inecuația*: $2 \cdot x + (-12) < 0 \Leftrightarrow 2 \cdot x - 12 < 0 \mid +12$ $2 \cdot x < +12 \quad \mid : 2$ și $2 > 0$ $x < 6$.	**1.** Adunăm 12 la ambii membri. **2.** Împărțim ambii membri la $2 > 0$. **3.** Aflăm soluțiile inecuației.
Sunt soluții ale inecuației toate numerele întregi mai mici decât 6, deci $S = \{\ \ldots, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.	

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Problema determinării numerelor $x \in D$, care verifică o *inegalitate dată* se numește *inecuație* cu necunoscuta x, din mulțimea D. Mulțimea D se mai numește și *domeniu* al inecuației.	*Problemă*. Determinați numerele întregi din mulțimea $D = \{-5, 0, 2, 5\}$, cu proprietatea $x^2 \geq 20$. *Reformulare*. „Rezolvați în mulțimea $D = \{-5, 0, 2, 6\}$, inecuația $x^2 \geq 20$" sau „Rezolvați inecuația $x^2 \geq 25$, $x \in \{-5, 0, 2, 6\}$".
Fiecare număr $x \in D$ care verifică inecuația (inegalitatea dată) este o *soluție* a inecuației. *A rezolva inecuația* înseamnă a determina mulțimea tuturor soluțiilor acesteia, notată, de regulă, cu S.	Pentru fiecare element din D, verificăm dacă este soluție a inecuației. Înlocuind în ecuație $x = -5$, obținem $25 \geq 20$, afirmație *adevărată*. Înlocuind în ecuație $x = 0$, obținem $0 \geq 20$, afirmație *falsă*. Înlocuind în ecuație $x = 2$, obținem $4 \geq 20$, afirmație *falsă*. Înlocuind în ecuație $x = 6$, obținem $36 \geq 20$, afirmație *adevărată*. În concluzie, numerele -5, și $+6$ sunt soluțiile inecuației și scriem $S = \{-5, 6\}$.
Două inecuații sunt *echivalente* dacă au același *domeniu* și *aceleași soluții*.	Inecuațiile $2 \cdot x \geq -4$, $x \in \mathbb{Z}$ și $-4 \cdot x - 8 \leq 0$, $x \in \mathbb{Z}$ sunt echivalente deoarece ambele au necunoscuta din mulțimea $\mathbb{Z}$ și au aceeași mulțime de soluții: *mulțimea tuturor numerelor întregi mai mari sau egale cu* -2. $2 \cdot x \geq -4 \mid : 2$ și $2 > 0$ $-4 \cdot x - 8 \leq 0 \mid +8$ $x \geq -4 : 2$ $-4 \cdot x \leq 8 \mid : (-4), -4 < 0$ $x \geq -2$. $x \geq -2$. Sunt soluții ale inecuației toate numerele întregi mai mari sau egale cu -2.

Pentru rezolvarea inecuațiilor sunt foarte utile transformările pe care le putem face așa încât să obținem alte inecuații, mai ușor de rezolvat, cu ajutorul cărora să găsim soluțiile inecuației inițiale .

Se adună sau se scade, din ambii membri ai inegalității, același număr întreg.	Dacă a și b sunt numere întregi cu $a \leq b$, atunci $a + c \leq b + c$ și $a - c \leq b - c$, oricare ar fi $c \in \mathbb{Z}$.
Se adună membru cu membru două inegalități de același fel.	Dacă a, b, c și d sunt numere întregi cu $a \leq b$ și $c \leq d$, atunci $a + c \leq b + d$.
Se înmulțesc sau se împart ambii membri ai inegalității, cu același număr întreg pozitiv.	Dacă a și b sunt numere întregi cu $a < b$ și $c \in \mathbb{Z}_+$, atunci $a \cdot c < b \cdot c$, iar dacă $c \mid a$ și $c \mid b$, atunci $a : c < b : c$.
Se înmulțesc sau se împart ambii membri ai inegalității, cu același număr întreg negativ și se inversează relația de inegalitate.	Dacă a și b sunt numere întregi cu $a < b$, și $c \in \mathbb{Z}_-$, atunci $a \cdot c > b \cdot c$, iar dacă $c \mid a$ și $c \mid b$, atunci $a : c > b : c$.

Observație Proprietăți similare celor de mai sus au loc și pentru relațiile $>, \leq, \geq$.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Problema **1.** Produsul dintre numărul întreg negativ x și numărul -5 este cel mult egal cu 20. Determinați valorile numărului x.

Rezolvare.

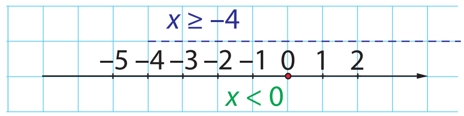
Problema revine la a rezolva inecuația $-5 \cdot x \leq 20$, în mulțimea $\mathbb{Z}_-$.

Sunt soluții ale inecuației numerele întregi care se reprezintă pe axă în stânga originii, până la -4, inclusiv.

În $\mathbb{Z}_-$, mulțimea soluțiilor este $S = \{-4, -3, -2, -1\}$.

$-5 \cdot x \leq 20 \mid :(-5)$ și $-5 < 0$

$x \geq -4$.



Observație. Dacă s-ar fi cerut rezolvarea în $\mathbb{Z}$, atunci ar fi fost soluții ale inecuației și toate numerele întregi nenegative.

Problema **2.**

Determinați numerele întregi cu proprietatea $6 \cdot x - 14 > 4 \cdot x - 18$ și care au modulul mai mic decât 4.

Rezolvare.

$6 \cdot x - 14 > 4 \cdot x - 18 \mid +14$

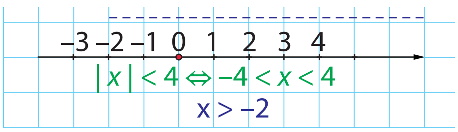
$6 \cdot x > 4 \cdot x - 4 \mid -(4 \cdot x)$

$2 \cdot x > -4 \mid :2$

$x > -2$

1. Am adunat 14 la ambii membri ai inecuației.
2. Am scăzut $4 \cdot x$ din ambii membri ai inecuației.
3. Am împărțit la numărul pozitiv 2 ambii membri.
Știm că soluțiile sunt numere întregi, mai mari decât -2.

Dar, sunt soluții ale problemei doar acele numere mai mari decât -2, care au modulul mai mic decât 4.



Numerele întregi situate între -4 și 4, care sunt mai mari decât -2, sunt -1, 0, 1, 2 și 3, deci:

$S = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Scrieți:
a) toate numerele întregi negative mai mari decât -5;
b) numerele întregi nenegative cel mult egale cu 4;
c) numerele întregi care au valoarea absolută mai mică decât 3.

2. Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.
a) Un număr întreg negativ care verifică inecuația $x + 3 < -2$ este:
A. -4; **B.** -6; **C.** -2; **D.** -5.
b) Un număr întreg pozitiv care verifică inecuația $4 - x > 1$ este:
A. 5; **B.** 4; **C.** 2; **D.** 3.
c) Cel mai mare număr întreg x pentru care $3 \cdot x + 2 \leq 17$ este:
A. -5; **B.** 5; **C.** 4; **D.** 18.
d) Cel mai mic număr întreg y pentru care $2 \cdot y \geq -30$ este:
A. -28; **B.** -15; **C.** -32; **D.** -16.

3. Determinați toate numerele întregi x, pentru care:
a) $x \geq -12$ și $x < -8$; **c)** $x \geq -1$ și $x < 1$;
b) $x > -2$ și $x \leq 1$; **d)** $x > -6$ și $x \in \mathbb{Z}_-$.

4. Rezolvați inecuațiile:
a) $x - 7 < -4$ și $x \in \mathbb{N}$;
b) $x + 5 > 13$ și $x \in \mathbb{Z}$;
c) $4 \cdot x \geq -12$ și $x \in \mathbb{Z}_-$;
d) $3 \cdot x + 8 \leq -x - 4$ și $x \in \mathbb{Z}$;
e) $|x| - 6 < -2$ și $x \in \mathbb{Z}$;
f) $19 - 2 \cdot x + 8 > 3 \cdot x + 2$ și $x \in \mathbb{Z}$.

5. **a)** Despre numerele întregi a și b se știe că $a + b < 0$, $a \cdot b > 0$ și $|a| < |b|$. Scrieți numerele a, b și 0 în ordine crescătoare.
b) Despre numerele întregi c și d se știe că $c + d > 0$, $c^2 \cdot d < 0$. Scrieți numerele c, d și 0 în ordine descrescătoare.

Minitest

1. Completați spațiile libere astfel încât să obțineți propoziții adevărate.

10 p a) Numerele întregi mai mari decât -3 și cel mult egale cu 2 formează mulțimea $\{\ldots\}$.

15 p b) Mulțimea soluțiilor inecuației $x^2 \leq 0$ este ….

15 p c) Cel mai mic număr întreg x pentru care $x - 7 \leq 2 \cdot x + 3$ este … .

2. Rezolvați inecuațiile:

2 × 15 p a) $2 \cdot x - 3 < 7, x \in \mathbb{N}$; b) $3 \cdot x - 7 < 2 \cdot x - 5, x \in \mathbb{Z}$

3. Suma a trei numere întregi consecutive este cuprinsă între -71 și -67.

10 p a) Notați cu x pe cel mai mic dintre cele trei numere și scrieți inecuațiile corespunzătoare condițiilor din enunț.

10 p b) Determinați numărul întreg x care este soluție comună a inecuațiilor de la subpunctul a).

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

L3 Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor/inecuațiilor în contextul numerelor întregi

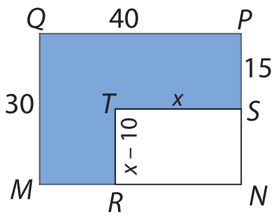
Rezolvăm și observăm

Problema **1.** Dimensiunile dreptunghiurilor *MNPQ și RNST* sunt exprimate în aceeași unitate de măsură (u.m.).

a) Formulați o ecuație cu necunoscuta x, reductibilă la o ecuație de forma $a \cdot x + b = 0$, cu $a, b \in \mathbb{Z}$, folosind datele din figura alăturată.

b) Rezolvați ecuația obținută la subpunctul a).

c) Determinați lungimile segmentelor *TS, TR* și *MR*.



Rezolvare. **a)** Din *RNST* dreptunghi, rezultă $SN = RT = x - 10$. Din *MNPQ* dreptunghi, rezultă $NP = MQ = 30$. Dar, $SN + SP = NP$, adică $(x - 10) + 15 = 30$.

b) Folosind asociativitatea adunării, ecuația devine $x - 10 + 15 = 30$, apoi $x + 5 = 30 \Leftrightarrow x = 25$.

c) $TS = x = 25$ (u.m.); $TR = x - 10 = 25 - 10 = 15$ (u.m.); $MR = MN - x = PQ - x = 40 - 25 = 15$ (u.m.)

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Multe dintre problemele întâlnite în practică pot fi rezolvate matematic.
Modelul matematic asociat problemei poate conduce la noțiuni și metode algebrice de rezolvare.
Atunci când problema poate fi reformulată printr-o *ecuație* sau printr-o *inecuație* cu soluții *numere întregi*, rezolvarea problemei presupune respectarea algoritmului alăturat.

Pasul 1. *Stabilirea* necunoscutei, realizarea notației, scrierea în limbaj matematic a relațiilor între mărimile care apar.
Pasul 2. *Scrierea* ecuației sau a inecuației
Pasul 3. *Rezolvarea* ecuației sau a inecuației
Pasul 4. *Interpretarea* soluțiilor ecuației sau a inecuației ținând cont de *domeniul* în care căutăm soluțiile problemei.
Pasul 5. Formularea concluziei.

Observație. Este util să verificăm soluția sau soluțiile obținute, pentru a corecta eventualele greșeli.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Problema 1. Marius și Mihai au împreună 200 lei. Dacă Marius împrumută de la Mihai 14 lei, Mihai va avea de trei ori mai puțini bani decât Marius. Determinați suma pe care a avut-o fiecare la început.

Rezolvare

Pasul 1. Stabilim necunoscuta.	Notăm cu a suma de bani pe care a avut-o Mihai la început.
Scriem în limbaj matematic relații între mărimile care apar în problemă.	Marius a avut la început $200 - a$ (lei). După ce Marius împrumută de la Mihai 14 lei, Marius va avea $(200 - a) + 14$ (lei), iar lui Mihai îi rămân $a - 14$ (lei).
Pasul 2. Scriem ecuația.	Deoarece suma lui Mihai este de trei ori mai mică decât cea a lui Marius, atunci $a - 14 = [(200 - a) + 14] : 3$.
Pasul 3. Rezolvăm ecuația.	$a - 14 = [(200 - a) + 14] : 3 \mid \cdot 3$ Înmulțim cu 3 ambii membri ai ecuației. $3a - 42 = 214 - a \mid + (a + 42)$ Adunăm $a + 42$ în ambii membri. $4a = 256 \mid : 4$ Împărțim la 4 ambii membri ai ecuației. $a = 64$
Pasul 4. Interpretăm soluția și formulăm rezultatul.	Deducem că Mihai a avut la început 64 de lei, iar Marius a avut $200 - 64 = 136$ (lei). Pentru siguranță, verificăm rezultatul. Într-adevăr, dacă Marius împrumută de la Mihai 14 lei, atunci Mihai va avea doar 50 de lei, care este o treime din suma de 150 de lei a lui Marius.

	Mihai	**Marius**
I	a	$200 - a$
II	$a - 14$	$214 - a$

Răspuns: Mihai a avut 64 de lei, iar Marius a avut 136 de lei.

Problema 2.
Ioana a economisit 50 de lei, dar are o datorie de 250 de lei. Ea își propune să returneze această sumă, folosind cei 50 de lei și economisind în trei luni sume egale de bani.
Determinați cea mai mică sumă, număr întreg, pe care trebuie să o economisească Ioana în fiecare dintre cele trei luni.

Rezolvare. Notăm cu x suma de bani pe care o economisește Ioana într-o lună. Atunci, în cele trei luni, va economisi $3x$ lei. Cum Ioana returnează datoria, economisind această sumă și folosind cei 50 de lei, înseamnă că $3x + 50 \geq 250$, adică $3x \geq 200$. Cum x este număr întreg, rezultă că $3x$ este un multiplu al lui 3, mai mare sau egal cu 200.
Atunci, $3x \in \{201, 204, 207, \ldots\}$. Cea mai mică sumă x este realizată pentru $3x = 201$, adică $x = 201 : 3$, deci $x = 67$.

Răspuns: Ioana trebuie să economisească lunar cel puțin 67 de lei.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Determinați un număr întreg, știind că dacă îl înmulțim cu -3, obținem același rezultat ca atunci când îl adunăm cu 20.

2. Determinați un număr întreg, știind că dacă îl împărțim la 4, obținem un număr cu 155 mai mic decât opusul său.

3. Diferența dintre un număr întreg și produsul opusului său cu 5 este -96.
Determinați numărul.

4. Suma a cinci numere întregi consecutive este -45. Determinați cel mai mic și cel mai mare dintre numere.

5. Pe o foaie de hârtie sunt scrise trei numere întregi negative, diferite. Dacă scădem 13 din fiecare număr și adunăm rezultatele, se obține -45. Determinați cele trei numere.

6. Suma a zece numere întregi consecutive este -25. Calculați produsul acestor numere.

7. Determinați numerele întregi negative care adunate cu -5 dau ca rezultat cel puțin $(-2)^3$.

8. Determinați o valoare a numărului întreg x, știind că, dacă îl micșorăm cu 10, obținem un număr întreg pozitiv, mai mic decât 3 .

9. Dan are cu 60 de lei mai puțin decât Lucia. Dacă ar primi 45 de lei de la aceasta, atunci el ar avea cu 7 lei mai mult decât dublul sumei care i-a rămas Luciei. Calculați sumele de bani pe care le are fiecare dintre ei.

10. Determinați toate numerele naturale pe care, dacă le înmulțim cu 2 și adunăm la rezultat -24, obținem un număr întreg negativ.

11. Produsul numerelor întregi $2 \cdot x - 1$, $3 \cdot x + 2$, $4 \cdot x - 3$, $5 \cdot x + 5$ este 0.

a) Determinați cele patru numere.

b) Calculați suma numerelor găsite.

12. Un pătrat are lungimile laturilor exprimate, în centimetri, prin numere naturale și aria cel mult 10 cm^2.
Calculați lungimea laturii pătratului și perimetrul acestuia, știind că este cel mai mare posibil.

EVALUARE SUMATIVĂ

I. *Alegeți varianta corectă de răspuns. Doar un răspuns este corect.*

5 p **1.** Dacă $A=\left\{-2;0;\frac{5}{2};\frac{5}{2};-5\right\}$, atunci mulțimea $A \cap \mathbb{Z}_-$ este:

A. $\{-2, 0, -5\}$ **B.** $\left\{\frac{5}{2};\frac{5}{1}\right\}$; **C.** $\left\{-2;0;\frac{5}{1};-5\right\}$; **D.** $\{-2, -5\}$.

5 p **2.** Numărul $|\,7+1\,|+|\,-8\,|$ este egal cu:

A. 0; **B.** 16; **C.** -16; **D.** 1.

5 p **3.** Dacă $|x| = 4$ și $x < 0$, atunci $x + 44$ este egal cu:

A. 48; **B.** -48; **C.** -40; **D.** 40.

5 p **4.** Dintre numerele $a = -32 + 23$, $b = -7 - (+8)$, $c = -3 \cdot (+4)$, $d = 56 : (-4)$, mai mic este:

A. a; **B.** b; **C.** c; **D.** d.

5 p **5.** Dacă $(-3)^n = -27$, atunci numărul $(-2)^n$ este egal cu:

A. -2; **B.** -4; **C.** -8; **D.** -16.

5 p **6.** Rezultatul calculului $(-2)^1 \cdot (-1) + (-2)^2 \cdot (-2) + (-2)^3 \cdot (-3)$ este:

A. 18; **B.** 16; **C.** -18; **D.** -8.

II. *Scrieți rezolvările complete.*

1. Fie numerele $a = -2 - (-4) + 6$, $b = |\,28 - 32\,| - |+42\,|$, $c = [(-2)^3 \cdot (-2)^4] : [(-2)^7 : (-2)^2]$.

10 p **a)** Calculați a, b, c.

10 p **b)** Precizați dacă numărul $9 \cdot (a - c) + b$ este pozitiv, negativ sau nul.

10 p **2.** **a)** Dacă $x \cdot y + x \cdot z = -5$, calculați $2 \cdot x \cdot (y + z)$.

10 p **b)** Dacă $x \cdot (y + z) = 63$ și $x = -7$, calculați $y + z$.

3. Pe o foaie de hârtie sunt scrise trei numere întregi negative, diferite. Dacă scădem 17 din fiecare număr și adunăm rezultatele, se obține -57.

10 p **a)** Calculați suma celor trei numere.

10 p **b)** Determinați cele trei numere.

Notă: Timp de lucru 50 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

4. MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE

Competențe specifice: 1.4; 2.4; 3.4; 4.4; 5.4; 6.4

4.1. Număr rațional. Mulțimea numerelor raționale

L1 Număr rațional

Ne amintim

Toate fracțiile ordinare echivalente cu $\frac{a}{b}$, unde $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$ și $b \neq 0$ formează *numărul rațional pozitiv* $\frac{a}{b}$.

Un *număr rațional poate fi scris sau numit* prin oricare dintre *reprezentanții* săi.

Fracțiile următoare sunt *reprezentanți* ai aceluiași număr *rațional pozitiv* $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \frac{5}{15}, \ldots, \frac{100}{300}, \ldots$

Orice număr *rațional pozitiv* poate fi scris în mod *unic* sub forma unei fracții ordinare *ireductibile* $\frac{a}{b}$, cu a și b numere naturale, $a \neq 0$ și $b \neq 0$.

Numărul rațional pozitiv de mai sus se scrie în *mod unic* în *forma sa ireductibilă* $\frac{1}{3}$.

Observații. **1.** Numerele *naturale nenule* sunt numere *raționale pozitive*.

2. Fracțiile $\frac{0}{b}$, $b \neq 0$ formează *numărul rațional* 0.

Orice număr rațional pozitiv se poate scrie în *mod unic* sub formă de *fracție zecimală*.

Pentru a transforma o fracție *zecimală cu număr finit de zecimale* în fracție ordinară, scriem la *numărător* numărul natural obținut eliminând virgula, apoi scriem la *numitor* 10^k, unte k este numărul zecimalelor.

$\overline{a_1 \ldots a_n, b_1 \ldots b_k} = \dfrac{\overline{a_1 \ldots a_n b_1 \ldots b_k}}{10^k}$	$0{,}2 = \dfrac{2}{10}$; $0{,}625 = \dfrac{625}{10^3}$.

Pentru a transforma o fracție *periodică simplă* în fracție ordinară, scriem la *numărător* diferența dintre numărul natural obținut eliminând virgula și numărul natural care reprezintă partea din stânga virgulei, apoi scriem la *numitor* numărul format cu k cifre egale cu 9, unde k este numărul zecimalelor aflate în perioadă.

$\overline{a_1 \ldots a_n, (p_1 \ldots p_k)} = \dfrac{\overline{a_1 \ldots a_n p_1 \ldots p_k} - \overline{a_1 \ldots a_n}}{\underbrace{99 \ldots 9}_{k \text{ cifre}}}$	$1,(31) = \dfrac{131-1}{99} = \dfrac{130}{99}$; $0,(932) = \dfrac{931-0}{999} = \dfrac{931}{999}$.

Pentru a transforma o fracție *periodică mixtă* în fracție ordinară, scriem la *numărător* diferența dintre numărul natural obținut eliminând virgula și numărul natural format cu toate cifrele care nu se află în perioadă, apoi scriem la *numitor* numărul format cu k cifre egale cu 9, urmate de m cifre egale cu 0, unde k este numărul zecimalelor din perioadă, iar m este numărul zecimalelor care nu sunt în perioadă.

$\overline{a_1 \ldots a_n, b_1 \ldots b_m (p_1 \ldots p_k)} = \dfrac{\overline{a_1 \ldots a_n b_1 \ldots b_m p_1 \ldots p_k} - \overline{a_1 \ldots a_n b_1 \ldots b_m}}{\underbrace{99 \ldots 9}_{k \text{ cifre}}\underbrace{00 \ldots 0}_{m \text{ cifre}}}$	$3{,}10(7) = \dfrac{3107-310}{900} = \dfrac{2797}{900}$; $0{,}328(32) = \dfrac{32832-328}{99000} = \dfrac{32504}{99000}$.

Rezolvăm și observăm

În grădina bunicilor, în timpul verii, ne bucurăm adesea de umbra nucului plantat cu mulți ani în urmă. E un copac maiestuos. Îl întreb pe bunicul la ce adâncime ajung rădăcinile în sol ca să poată susține o coroană atât de mare. Bunicul îmi răspunde: Să vedem ce știm despre nuc.

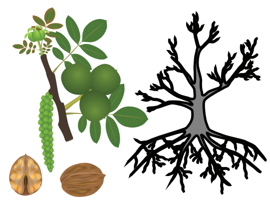
Știați că ...?

Nucul, un pom fructifer foarte valoros atât pentru semințele sale cât și pentru lemnul său, este unul dintre cei mai vechi pomi fructiferi cunoscuți și cultivați de om (există descoperiri fosile care atestă existența unor specii de nuc în urmă cu 9000 de ani).

Înălțimea nucului poate ajunge la 20-25 de metri, iar diametrul coroanei poate ajunge la 10 m.

Rădăcinile ajung, de regulă, la o adâncime de 0,2-0,8 m. Doar în soluri foarte nisipoase ajung la 1,4 m.

În plan orizontal, rădăcina unui nuc matur depășește raza coroanei de 4-7 ori. Totuși, densitatea maximă a rădăcinilor active este la 3-4 m de trunchiul nucului.



Nucul este *solitar*, imaginea de mai sus nu-l reprezintă.

Informați-vă și justificați această afirmație.

Acum, să rezolvăm o problemă. Ne imaginăm *axa* verticală pe care se dezvoltă copacul, cu *sensul pozitiv* în sus. Considerăm că tulpina intră în pământ printr-un punct O, *originea* acestei axe.

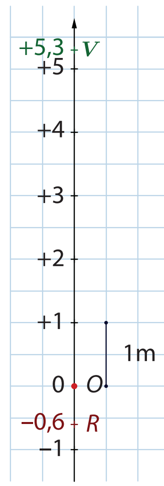
Știind că acest nuc are *înălțimea* de aproximativ 5,3 m și că rădăcinile *coboară* până la aproximativ 0,6 m, reprezintă pe axă punctul corespunzător vârfului (*celui mai înalt* punct al coroanei), respectiv punctul corespunzător *celui mai adânc* punct al rădăcinii, folosind unitatea de măsură 1 m.

Stabilește care punct corespunde unui *număr pozitiv* și care corespunde unui *număr negativ*.

Rezolvare.

Vârful V este orientat în sensul pozitiv al axei, deci corespunde numărului rațional pozitiv +5,3.

Extremitatea rădăcinii R este orientată în sens contrar, deci corespunde numărului negativ situat la 0,6 unități de origine. Notăm acest număr –0,6.



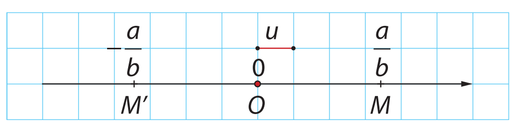
Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Fiecare pereche de numere naturale *nenule* (a, b) determină numărul *rațional pozitiv* $\frac{a}{b}$. Notăm mulțimea numerelor raționale pozitive cu $\mathbb{Q}_+$.

$\frac{7}{3}; \frac{2}{5}; \frac{1}{33}; \frac{9}{3}; \frac{7}{1}; \frac{4}{4}$ sunt numere raționale pozitive.

Considerăm axa numerelor, cu originea $O(0)$ și cu unitatea de măsură u, pe care am stabilit sensul pozitiv, de la stânga la dreapta.

Fiecare număr *rațional pozitiv* $\frac{a}{b}$ se reprezintă pe axă în punctul unic $M\left(\frac{a}{b}\right)$, situat în dreapta originii la distanța $\frac{a}{b}$.



Simetricul M', al punctului $M\left(\frac{a}{b}\right)$ față de O, este situat la aceeași distanță de origine, dar în stânga acesteia.

Numărul corespunzător punctului M' se notează $-\frac{a}{b}$ și se numește *opusul numărului* $\frac{a}{b}$.

Numărul $-\frac{a}{b}$ este *număr rațional negativ*.

Exemple: $-\frac{1}{2}$ și $\frac{1}{2}$ sunt numere raționale *opuse.*

Cum $\frac{1}{2} = 0{,}5$, deducem $-\frac{1}{2} = -0{,}5$.

Am exprimat sub formă de fracție zecimală numerele *raționale opuse* $\frac{1}{2}$ și $-\frac{1}{2}$.

Dacă a este număr întreg negativ, iar b este număr natural nenul, atunci perechea (a, b) determină numărul *rațional negativ* $\frac{a}{b}$.
Notăm mulțimea numerelor raționale negative cu $\mathbb{Q}_-$.

Numere raționale negative:
$-\frac{7}{3}; -\frac{2}{5}; -\frac{1}{33}; -\frac{9}{3}; -\frac{7}{1}; -\frac{4}{4}$.

Folosind regula semnelor la împărțirea numerelor întregi, deducem că:

Orice pereche de numere întregi, ambele pozitive sau ambele negative, determină un număr *rațional pozitiv*.	$\frac{1}{3} = \frac{-1}{-3}$; $\frac{2}{5} = \frac{-2}{-5}$; $\frac{7}{1} = \frac{-7}{-1}$
Orice pereche de numere întregi dintre care unul este pozitiv și celălalt este negativ determină un număr *rațional negativ*.	$-\frac{1}{3} = \frac{-1}{3} = \frac{1}{-3}$; $-\frac{2}{5} = \frac{-2}{5} = \frac{2}{-5}$

Fiecare pereche de numere întregi (a, b) cu $b \neq 0$ determină numărul *rațional* $\frac{a}{b}$.

Observație. Perechile $(0, b)$ cu $b \in \mathbb{Z}^*$, determină numărul rațional $\frac{0}{b} = 0$. $\frac{0}{3}; \frac{0}{-3}; \frac{0}{13}; \frac{0}{1}$

Mulțimea formată cu toate numerele raționale pozitive, cu toate numerele raționale negative, la care adăugăm și numărul rațional 0 se numește *mulțimea numerelor raționale* și se notează cu $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- \cup \{0\}.$$

Observații. **1.** Numărul 0 nu este nici pozitiv nici negativ.
2. Mulțimea numerelor *raționale nenule* se notează $\mathbb{Q}^*$, deci $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_-$ sau $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Problema 1.

Scrieți câte un exemplu pentru fiecare dintre cazurile următoare:	*Rezolvare*
1. Număr întreg care este număr natural.	**1.** $7 \in \mathbb{Z}$ și $7 \in \mathbb{N}$.
1′. Număr întreg care nu este număr natural.	**1′.** $-3 \in \mathbb{Z}$ și $-3 \notin \mathbb{N}$.
2. Număr rațional care este număr întreg.	**2.** $-7 \in \mathbb{Q}$ și $-7 \in \mathbb{Z}$.
2′. Număr rațional care nu este număr întreg.	**2′.** $\frac{7}{2} \in \mathbb{Q}$ și $\frac{7}{2} \notin \mathbb{Z}$.
3. Număr rațional care este număr natural.	**3.** $2 \in \mathbb{Q}$ și $2 \in \mathbb{N}$.
3′. Număr rațional care nu este număr natural.	**3′.** $0{,}5 \in \mathbb{Q}$ și $0{,}5 \notin \mathbb{N}$.

Reținem!

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, adică:

1. Orice număr natural este întreg: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.	**1'.** Există numere întregi care nu sunt naturale: $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$.
2. Orice număr întreg este număr rațional: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.	**2'.** Există numere raționale care nu sunt întregi: $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$.
3. Orice număr natural este număr rațional: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$.	**3'.** Există numere raționale care nu sunt naturale: $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{N}$.

În practică, numerele raționale se exprimă, în funcție de context, sub formă de fracții ordinare ireductibile, sub formă de fracții ordinare reductibile, sau sub formă de fracții zecimale. Tehnicile de transformare dintr-o formă în alta sunt similare celor pentru numere raționale pozitive, amintite mai sus.

Problema 2.

a) Exprimați sub formă de fracții zecimale numerele raționale:
$\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{7}{3}; -\frac{7}{3}; \frac{9}{22}; -\frac{9}{22}$

b) Exprimați sub formă de fracții ordinare ireductibile numerele raționale:
0,2; –0,2; 2,(2); –2,(2); 0,1(5); –0,1(5).

Rezolvare

a) Efectuând împărțirile, obținem:

$\frac{1}{2} = 0,5; -\frac{1}{2} = -0,5; \frac{7}{3} = 2,(3); -\frac{7}{3} = -2,(3);$

$\frac{9}{22} = 0,4(09); -\frac{9}{22} = -0,4(09).$

b) $0,2 = {}^{(2}\frac{2}{10} = \frac{1}{5}; -0,2 = -\frac{1}{5};\ 2,(2) = \frac{22-2}{9} = \frac{20}{9};$

$-2,(2) = -\frac{20}{9}; 0,1(5) = \frac{15-1}{90} = {}^{(2}\frac{14}{90} = \frac{7}{45}; -0,1(5) = -\frac{7}{45}.$

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Completați în casetele libere litera ***A***, dacă afirmația este adevărată și litera ***F***, dacă afirmația este falsă, urmând modelul.

propoziția \ a	2	–3	$\frac{5}{2}$	$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{+15}{+3}$	$\frac{-12}{6}$
$a \in \mathbb{N}$	***A***						
$a \in \mathbb{Z}$	***A***						
$a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$	***F***						
$a \in \mathbb{Q}$	***A***						
$a \in \mathbb{Q}_-$	***F***						
$a \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$	***F***						

2. Scrieți câte cinci elemente ale mulțimilor:
a) $\mathbb{Q}$; **c)** $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$; **e)** $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$;
b) $\mathbb{Q}_+$; **d)** $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$; **f)** $\mathbb{Q}_-$.

3. Fie mulțimile $A = \{-3, -2, 0, 2, 6\}$ și $B = \{-2, -1, 1, 3\}$.
a) Scrieți mulțimea C a numerelor raționale $\frac{a}{b}$, unde $a \in A$ și $b \in B$.
b) Calculați mulțimile $C \cap \mathbb{Q}_-$ și $C \cap \mathbb{Q}^*$.

4. Scrieți câte trei reprezentanți (fracții ordinare), pentru fiecare dintre numerele raționale:
a) $-\frac{5}{3}$; **b)** $\frac{1}{2}$; **c)** -1; **d)** 2,3.

5. Fie numărul $r = \frac{-10}{n}$, $n \in \mathbb{Z}^*$.
Determinați n, pentru fiecare din cazurile:
a) $r \in \mathbb{N}$; **b)** $r \in \mathbb{Z}$.

6. Completați în casetele libere litera ***A***, dacă afirmația este adevărată și litera ***F***, dacă afirmația este falsă.

Propoziția	***A/F***
a) $\frac{3}{5} = \frac{-3}{-5}$;	
b) $\frac{-7}{-4} = \frac{7}{4}$;	
c) $\frac{-8}{3} = -\frac{8}{3}$;	

Propoziția	***A/F***
d) $\frac{0}{-2} = \frac{0}{2}$;	
e) $\frac{-5}{9} = \frac{10}{-16}$;	
f) $\frac{-6}{2} = 3$.	

7. Scrieți următoarele numere raționale sub formă de fracții zecimale:

a) $\frac{5}{2}$; **d)** $\frac{-3}{-5}$; **g)** $-\frac{43}{100}$;

b) $-\frac{9}{4}$; **e)** $\frac{2}{3}$; **h)** $\frac{-333}{-10^3}$;

c) $\frac{7}{8}$; **f)** $-\frac{17}{6}$; **i)** $\frac{-33}{10}$.

8. Scrieți următoarele numere raționale sub formă de fracții ordinare ireductibile:

a) 0,3; **d)** –3,625; **g)** –3,1(2);

b) –2,5; **e)** 0,(6); **h)** 4,(009);

c) 1,25; **f)** –1,(12); **i)** –2,(1).

9. Demonstrați că $\frac{n^2-n}{2}$ și $\frac{2\cdot n^2+6\cdot n}{4}$ sunt numere naturale, oricare ar fi numărul natural *n*.

Minitest

1. Copiați pe caiete și completați în casetele libere litera ***A***, dacă propoziția este adevărată și litera ***F***, dacă propoziția este falsă.

8 × 5 p

Propoziția	***A/F***
a) $\frac{3}{5} \in \mathbb{Q}$;	
b) $-4 \notin \mathbb{Q}$;	
c) $-\frac{9}{4} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$;	
d) $0,(6) \in \mathbb{Q}_-$;	

Propoziția	***A/F***
e) $-4,2 \notin \mathbb{Q}$;	
f) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$;	
g) $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{Q}$	
h) Mulțimea $\mathbb{Q}$ este infinită.	

2. Determinați valorile numărului *n* pentru:

25 p **a)** $n \in \mathbb{N}$ și $\frac{-7}{n} \in \mathbb{Z}$;

25 p **b)** $n \in \mathbb{Z}$, $-5 < n < 0$ și $\frac{8}{n-1} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

L2 Reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor. Modulul unui număr rațional

Ne amintim

Mulțimea $\mathbb{Q}$, a *numerelor raționale*, conține toate numerele raționale pozitive, care formează mulțimea $\mathbb{Q}_+$, toate numerele raționale negative, care formează mulțimea $\mathbb{Q}_-$ și numărul 0.

Mulțimile $\mathbb{Q}_-$ și $\mathbb{Q}_+$ sunt disjuncte (nu au niciun element comun).

$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_+$.

$\mathbb{Q}_- \cap \mathbb{Q}_+ = \varnothing$.

$0 \in \mathbb{Q}$, dar $0 \notin \mathbb{Q}_-$ și $0 \notin \mathbb{Q}_+$.

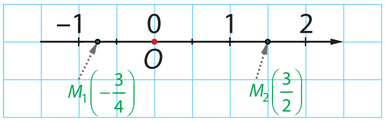
Orice număr rațional *pozitiv x* se reprezintă pe axa numerelor în dreapta originii, la distanța *x* de aceasta, și scriem $x > 0$.

Numărul rațional 0 se reprezintă pe axa numerelor în originea acesteia.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Din modul în care am definit numerele raționale negative, rezultă că orice număr *rațional negativ* x se reprezintă pe axa numerelor în stânga originii, la aceeași distanță de origine ca și opusul său. Scriem $x < 0$.

Oricărui număr rațional x îi corespunde pe axa numerelor un punct unic M, numit *reprezentarea* numărului x pe axa numerelor.



Dacă M este reprezentarea numărului x pe axa numerelor, atunci x se numește *abscisa* sau *coordonata* punctului M pe axa numerelor.
Scriem $M(x)$ și citim: „M de x" sau „M de coordonată x" sau „M de abscisă x".

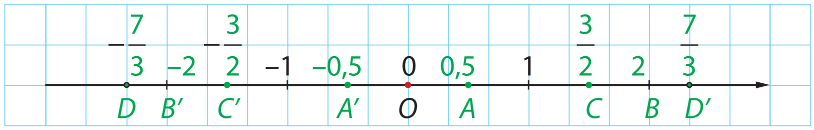
M_1 este *reprezentarea* pe axă a numărului rațional $-\frac{3}{4}$;

M_2 este *reprezentarea* pe axă a numărului rațional $\frac{3}{2}$.

$-\frac{3}{4}$ este *coordonata* sau *abscisa* punctului M_1;

$\frac{3}{2}$ este *coordonata* sau *abscisa* punctului M_2.

În imaginea alăturată, pe axa numerelor, sunt reprezentate mai multe *numere raționale*.



Punctele reprezentate sunt două câte două situate pe axă, simetric față de originea acesteia, deci au coordonatele *numere raționale opuse*.

Puncte simetrice față de origine:

$A(0,5)$ și $A'(-0,5)$; $B(2)$ și $B'(-2)$; $C\left(\frac{3}{2}\right)$, $C'\left(-\frac{3}{2}\right)$; $D\left(-\frac{7}{3}\right)$ și $D'\left(\frac{7}{3}\right)$

Numere raționale opuse:

0,5 și –0,5; 2 și –2; $\frac{3}{2}$ și $-\frac{3}{2}$; $-\frac{7}{3}$ și $\frac{7}{3}$.

Dacă x este număr rațional nenul, numerele raționale x și $-x$ sunt opuse.

Numărul x este opusul numărului $-x$, iar numărul $-x$ este opusul numărului x.

–0,5 este opusul lui 0,5 și 0,5 este opusul lui –0,5;

–2 este opusul lui 2 și 2 este opusul lui –2;

$-\frac{3}{2}$ este opusul lui $\frac{3}{2}$ și $\frac{3}{2}$ este opusul lui $-\frac{3}{2}$;

Observații. **1.** Opusul numărului întreg 0 este 0 însuși.
2. Dintre oricare două numere raționale nenule opuse, unul este pozitiv și celălalt este negativ.

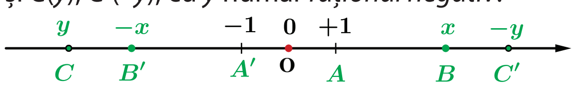
Ca și la numere întregi, oricare ar fi numărul rațional x, opusul său, numărul rațional $-x$, este situat pe axa numerelor la aceeași distanță de origine ca și numărul rațional x.

Modulul numărului rațional x sau *valoarea absolută* a acestuia este *distanța* de la punctul de reprezentare a numărului x pe axa numerelor la originea axei.

Modulul numărului rațional x se notează $|x|$.

Observație. Numerele raționale x și $-x$ au *același modul* pentru că sunt reprezentate pe axă la aceeași distanță de origine.

Pe axa numerelor, reprezentăm punctele:
$O(0)$, $A(1)$, $A'(-1)$, $B(x)$, $B'(-x)$, cu x număr *rațional pozitiv* și $C(y)$, $C'(-y)$, cu y număr *rațional negativ*.



Din $OA' = OA = 1$, rezultă $|-1| = |+1| = OA = 1$.
Din $OB' = OB = x$, rezultă $|-x| = |+x| = OB = x$.
Din $OC = OC' = -y$, rezultă $|-y| = |+y| = OC' = -y$.
$|0| = 0$ (distanța de la O la el însuși este 0).

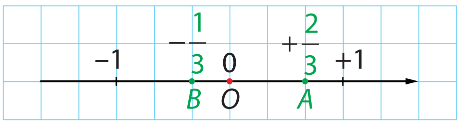
Reținem!

1. $|x| > 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Q}^*$ și $|x| = 0$, dacă și numai dacă $x = 0$.
2. $|x| = x$, dacă și numai dacă $x \geq 0$ și $|x| = -x$, dacă și numai dacă $x \leq 0$.
3. $|-x| = |x|$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Q}$.

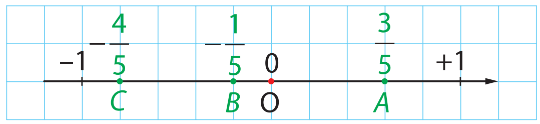
Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Sunt situații în care este foarte dificilă sau chiar imposibilă identificarea pe axa numerelor a punctului corespunzător unui număr rațional. Atunci, folosim tehnici avantajoase de *estimare a poziției punctului* căutat.

1. Dacă e posibil și contextul problemei permite, alegem avantajos unitatea de măsură, numărul fiind scris sub formă de fracție ordinară ireductibilă.



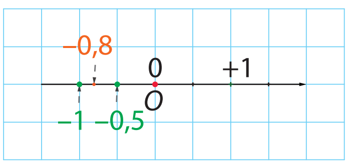
Exemplul 1: Am ales ca unitate de măsură segmentul cu lungimea de trei ori mai mare decât latura pătrățelului.



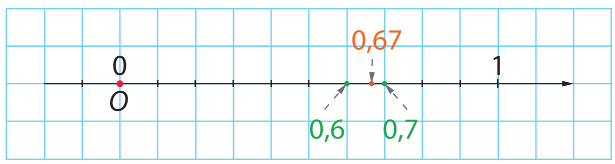
Exemplul 2: Am ales ca unitate de măsură segmentul cu lungimea de cinci ori mai mare decât latura pătrățelului.

2. Scriem numărul rațional sub formă de fracție zecimală, aproximăm numărul rațional la întregi sau zecimi și *estimăm poziția* punctului pe axă, folosind *aproximările*.

Exemplul 1. Pentru a reprezenta fracția zecimală $-0{,}8$ pe axă, știm că se află între -1 și 0, mai aproape de -1 decât de 0, adică între -1 și $-0{,}5$.



Exemplul 2. Pentru a reprezenta fracția zecimală $0{,}67$ pe axă, știm că se află între $0{,}6$ și $0{,}7$, mai aproape de $0{,}7$. Alegem o unitate de măsură suficient de mare, divizăm unitatea în zecimi, apoi facem reprezentarea.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

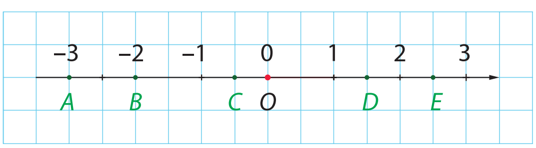
1. Reprezentați pe axa numerelor punctele care au coordonatele:

a) $-4{,}2; -3; 0{,}6; 5;$

b) $1{,}5;\ -1; -2{,}5; 1{,}7; -2;$

c) $-\frac{1}{2}; 1; -2{,}4; -5; 3{,}5; \frac{7}{10}; -\frac{20}{5}$.

2. Identificați în imaginea alăturată coordonatele punctelor reprezentate pe axă.



3. Reprezentați pe axa numerelor, cu originea punctul O, cu unitatea de măsură 1 cm, punctele $A(1{,}6)$, $B(4{,}4)$, $C(-3{,}2)$, M mijlocul segmentului OA și N mijlocul segmentului AB. Precizați coordonatele punctelor M și N.

4. Scrieți opusele numerelor raționale: $\frac{3}{4}; -\frac{3}{2}; 1{,}3; -2{,}4; -7; +4{,}5; -5\frac{1}{3}$.

5. Scrieți valorile absolute ale numerelor raționale: $-\frac{3}{4}; +\frac{9}{5}; -1{,}25; \frac{-2}{7}; -4; -3^2; -2{,}(5)$.

6. Copiați pe caiete tabelul și scrieți în casetele libere numerele raționale corespunzătoare:

a	$-0,4$	$2,1$				
$-a$			$\frac{1}{3}$	$-3,2$		
$\lvert a \rvert$					$\lvert a \rvert = 5$ și $a \in \mathbb{Q}_-$	0

7. Copiați pe caiete și completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate.

a) Opusul numărului 0,123 este ….

b) Opusul numărului … este –4,5.

c) Valoarea absolută a numărului $\frac{-5}{6}$ este ….

d) Numerele raționale … și ... au modulul 7.

e) Dacă $a \in \mathbb{Z}^*$ și $\left| \frac{-8}{a} \right|$ este număr natural, atunci $a \in \{\dots\}$.

Minitest

30 p **1.** Reprezentați pe axa numerelor: -4; $\frac{9}{2}$; 0; $-1,5$; $-\frac{35}{7}$; $3,5$; $-\frac{25}{10}$.

2. Copiați pe caiete și completați în casetele libere litera ***A***, dacă propoziția este adevărată și litera ***F***, dacă propoziția este falsă.

	Propoziția	***A/F***
10 p	**a)** Opusul numărului $-\frac{3}{5}$ este $\frac{3}{5}$.	
10 p	**b)** Modulul numărului –4,2 este 2,4.	
10 p	**c)** Singurul număr rațional care este egal cu opusul lui este numărul 0.	
10 p	**d)** Valoarea absolută a numărului rațional *r* este numărul rațional $-r$.	
10 p	**e)** $\lvert -6,3 \rvert = 6,3$.	
10 p	**f)** $-\left| -\frac{12}{5} \right| = -\left(-\frac{12}{5} \right)$.	

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

L3 Compararea și ordonarea numerelor raționale

Ne amintim

Orice număr rațional este sau pozitiv, sau negativ, sau nul.

Oricare ar fi $r \in \mathbb{Q}$, are loc exact una dintre relațiile $r > 0$, $r < 0$, $r = 0$.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor, compararea numerelor raționale și ordonarea numerelor raționale sunt în strânsă interdependență. Reprezentarea pe axă este de multe ori utilă pentru a *compara fracțiile* și pentru a stabili *ordinea crescătoare sau descrescătoare* a acestora. Pe de altă parte, două sau mai multe numere raționale se reprezintă pe axa numerelor, în ordine crescătoare, de la stânga spre dreapta. Astfel, poziția punctelor și ordinea lor pe axă ne oferă indicii despre numerele reprezentate și despre relațiile dintre ele.

Pentru orice două numere raționale x și y, are loc una și numai una dintre relațiile: $x < y$, $x = y$, $x > y$.
A compara numerele raționale x și y înseamnă a stabili care dintre cele trei relații de mai sus este adevărată.

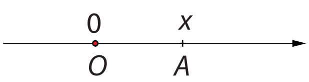
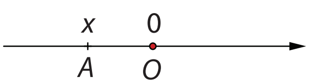
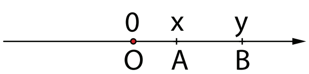
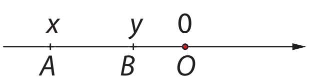
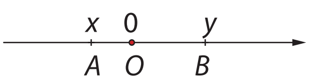
Dacă $x \in \mathbb{Q}$ și $y \in \mathbb{Q}$, și dacă reprezentarea pe axă a numărului x este punctul $A(x)$, iar reprezentarea pe axă a numărului y este punctul $B(y)$, atunci:

$x < y$ dacă și numai dacă punctul $A(x)$ este situat în stânga punctului $B(y)$;

$x > y$ dacă și numai dacă punctul $A(x)$ este situat în dreapta punctului $B(y)$;

$x = y$ dacă și numai dacă punctele $A(x)$ și $B(y)$ coincid.

Pentru numerele raționale nenule x și y, cu $x < y$, sunt posibile situațiile:

Reprezentare pe axă	*Descriere*	*Concluzie*
	$O(0)$ este situat în stânga lui $A(x)$, deci 0 este mai mic decât x. Scriem $0 < x$ sau $x > 0$.	$x \in \mathbb{Q}_+ \Leftrightarrow x \in \mathbb{Q}$ și $x > 0$. 1; 2,3; 3,(1); 11,25 $\in \mathbb{Q}_+$ $1 > 0$; $2,3 > 0$; $3,(1) > 0$; $11,25 > 0$.
	$A(x)$ este situat în stânga lui $O(0)$, deci x este mai mic decât 0. Scriem $x < 0$ sau $0 > x$.	$x \in \mathbb{Q}_- \Leftrightarrow x \in \mathbb{Q}$ și $x < 0$. –1; –2,3; –3,(1); –11,25 $\in \mathbb{Q}_-$ $-1 < 0$; $-2,3 < 0$; $-3,(1) < 0$; $-11,25 < 0$.
	$x > 0$, $y > 0$. $OA < OB$, deci $\lvert x \rvert < \lvert y \rvert$. $A(x)$ este în stânga lui $B(y)$, deci $x < y$.	Dacă $x \in \mathbb{Q}_+$ și $y \in \mathbb{Q}_+$, atunci: $x < y$ dacă și numai dacă $\lvert x \rvert < \lvert y \rvert$. $3,75 \in \mathbb{Q}_+$ și $4,95 \in \mathbb{Q}_+$ $\lvert 3,75 \rvert < \lvert 4,95 \rvert$ rezultă $3,75 < 4,95$.
	$x < 0$, $y < 0$. $OA > OB$, deci $\lvert x \rvert > \lvert y \rvert$. $A(x)$ este în stânga lui $B(y)$, deci $x < y$.	Dacă $x \in \mathbb{Q}_-$ și $y \in \mathbb{Q}_-$, atunci: $x < y$ dacă și numai dacă $\lvert x \rvert > \lvert y \rvert$. $-3,75 \in \mathbb{Q}_-$ și $-4,95 \in \mathbb{Q}_-$ $\lvert -4,95 \rvert > \lvert -3,75 \rvert$ rezultă $-4,95 < -3,75$.
	$x < 0$, $y > 0$. $A(x)$ este în stânga lui $B(y)$, deci $x < y$.	Dacă $x \in \mathbb{Q}_-$ și $y \in \mathbb{Q}_+$, atunci $x < y$. Orice număr negativ este mai mic decât orice număr pozitiv. $-3,72 \in \mathbb{Q}_-$, $4,83 \in \mathbb{Q}_+$, rezultă $-3,72 < 4,83$; $-4,83 \in \mathbb{Q}_-$, $3,72 \in \mathbb{Q}_+$, rezultă $-4,83 < 3,73$.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Pentru compararea și pentru ordonarea numerelor raționale folosim frecvent una dintre relațiile „ ≤ ” sau „≥”, precum și relațiile „<” și „>”, care *păstrează proprietățile de la numere întregi*.

A *ordona crescător* două sau mai multe numere raționale înseamnă a stabili ordinea acestora astfel încât fiecare să fie mai mic sau egal cu cel de după el.	Ordinea crescătoare a numerelor raționale –32,5; 0; 20,3; –21,5 este: –32,5; –21, 5; 0; 20,3 pentru că $-32,5 \leq -21,5 \leq 0 \leq 20,3$.
A *ordona descrescător* două sau mai multe numere raționale înseamnă a stabili ordinea acestora astfel încât fiecare să fie mai mare sau egal cu cel de după el.	Ordinea descrescătoare a numerelor raționale –32, 5; 0; 20,3; –21, 5 este: 20,3; 0; –21, 5; –32,5 pentru că $20,3 \geq 0 \geq -21,5 \geq -32,5$.

Reținem!

Orice număr rațional *pozitiv* este *mai mare* decât orice număr rațional negativ și decât 0.

Orice număr rațional *negativ* este *mai mic* decât orice număr rațional pozitiv și decât 0.

Dintre două numere raționale pozitive, este mai mare cel care are modulul mai mare.

Dintre două numere raționale negative, este mai mare cel care are modulul mai mic.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Scrieți:

a) trei numere raționale, mai mici decât -2;

b) trei numere raționale, mai mari decât 3,5;

c) trei numere raționale, cuprinse între -2 și 3,5.

2. Copiați pe caiete și completați spațiile punctate cu unul dintre simbolurile $<$, $>$, $=$, astfel încât să obțineți afirmații adevărate.

a) $\frac{1}{4} \ldots \frac{1}{3}$;   **c)** $2{,}4 \ldots -\frac{8}{3}$;

b) $-\frac{1}{5} \ldots \frac{1}{6}$;   **d)** $-\frac{1}{3} \ldots -\frac{1}{2}$.

3. Scrieți în ordine crescătoare numerele:

$-2{,}3;\ 0{,}9;\ -2\frac{3}{8};\ -2;\ 0;\ -3.$

4. Scrieți în ordine descrescătoare numerele:

$-3{,}2;\ 3{,}1;\ -3\frac{3}{10};\ 3;\ 0;\ -3{,}(4).$

5. Determinați toate numerele întregi cuprinse între $-2{,}34$ și $\frac{10}{3}$.

6. Determinați:

a) cel mai mare număr întreg, mai mic decât -77;

b) cel mai mic număr întreg, mai mare decât $-4{,}56$.

7. Determinați numărul întreg n, dacă există, pentru fiecare dintre cazurile:

a) $n < \frac{7}{2} < n+1$;

b) $n < -\frac{13}{5} < n+1$;

c) $n-2 < (-2)^{22} : 2^{21} < n$.

8. Scrieți:

a) mulțimea numerelor întregi care au valoarea absolută mai mică decât 3;

b) trei numere raționale care au valoarea absolută cuprinsă între 1,5 și 4.

Minitest

30 p **1.** Fie numărul $x = -\dfrac{2^0+2^1+2^2+2^3}{2^2}$. Demonstrați că $-4 < x < -3$.

2. Se consideră numerele întregi b și c cu proprietățile $|b| \leq 2$ și $|c| = 3$.

20 p **a)** Determinați numerele b și c care verifică inegalitățile din enunț.

20 p **b)** Scrieți toate numerele raționale de forma $\frac{b}{c}$, folosind valorile determinate la subpunctul a).

20 p **c)** Ordonați crescător numerele raționale scrise la subpunctul b).

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

4.2. Operații cu numere raționale

L1 Adunarea numerelor raționale. Scăderea numerelor raționale

Operațiile cu numere raționale se efectuează fie folosind scrierea numerelor sub formă de *fracții ordinare,* fie scriindu-le sub formă de *fracții zecimale* cu număr finit de zecimale.
Nu se efectuează calcule cu *fracții zecimale periodice*. Acestea se vor exprima sub formă de fracții ordinare.

Ne amintim

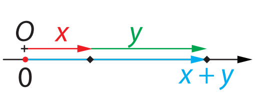
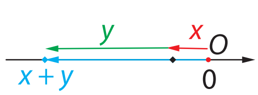
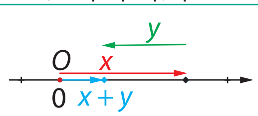
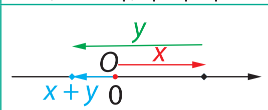
Pentru a efectua adunarea sau scăderea a două numere raționale pozitive, exprimate prin fracții ordinare, este necesar ca acestea să aibă același numitor.	*Exemple* **1.** $\frac{3}{5}+\frac{7}{5}=\frac{3+7}{5}$; **2.** $\frac{3}{5}-\frac{2}{5}=\frac{3-2}{5}$.
Dacă fracțiile nu au același numitor, atunci se determină *cel mai mic multiplu comun* al numitorilor și se amplifică fracțiile corespunzător, pentru a le aduce la același numitor.	*Exemple* **1.** ${}^{3)}\frac{3}{5}+{}^{5)}\frac{7}{3}=\frac{9}{15}+\frac{35}{15}=\frac{44}{15}$. **2.** ${}^{3)}\frac{9}{4}-{}^{2)}\frac{5}{6}=\frac{27}{12}-\frac{10}{12}=\frac{17}{12}$.

Pentru a efectua adunarea sau scăderea a două numere raționale pozitive, exprimate prin fracții zecimale finite, așezăm fracțiile una sub alta, *virgulă sub virgulă*.

Cifrele de același ordin vor fi *una sub alta*. Dacă într-o fracție nu este scrisă cifra de un anumit ordin, această cifră este 0. Efectuăm adunarea sau scăderea ca la numere naturale. Scriem *virgula* la rezultat *sub virgulele* celor două fracții.	*Exemplul* **1.** 123,75 + 99,1 = 222,85; 123,75 + 99,10 222,85	*Exemplul* **2.** 123,75 – 99,1 = 24,65. 123,75 – 99,10 24,65

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Adunarea numerelor raționale se definește pe baza adunării numerelor *raționale pozitive* și a adunării numerelor *întregi*.
Pentru orice două numere raționale x și y se definește numărul rațional unic, notat $x+y$, numit suma numerelor x și y. Operația prin care se asociază fiecărei perechi de numere x și y suma acestora se numește *operația de adunare*, iar numerele x și y se numesc *termenii* adunării.
Pentru a calcula suma a două numere raționale, procedăm similar modului de calcul de la numere întregi, cu respectarea tehnicilor de la operații cu fracții.

Caz	$x\geq 0$ și $y\geq 0$	$x\leq 0$ și $y\leq 0$	$x>0, y<0$ și $\lvert x\rvert>\lvert y\rvert$	$x>0$ și $y<0$ și $\lvert x\rvert<\lvert y\rvert$
Mod de calcul	$x+y\geq 0$ și $x+y=\lvert x\rvert+\lvert y\rvert$	$x+y\leq 0$ și $x+y=-(\lvert x\rvert+\lvert y\rvert)$	$x+y>0$ și $x+y=\lvert x\rvert-\lvert y\rvert$	$x+y<0$ și $x+y=-(\lvert y\rvert-\lvert x\rvert)$.
Interpretare geometrică				

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Operația de adunare a numerelor raționale păstrează *proprietățile adunării* numerelor întregi.

Adunarea este *asociativă*: $(x + y) + z = x + (y + z)$, oricare ar fi x, y, z numere raționale.
Adunarea este *comutativă*: $x + y = y + x$, oricare ar fi x și y numere raționale.
Numărul 0 este *element neutru* pentru adunare: $x + 0 = 0 + x = x$, oricare ar fi numărul rațional x.
Pentru orice număr rațional x, există opusul său, numărul rațional $-x$ astfel încât $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

În mulțimea $\mathbb{Q}$, pentru oricare două numere raționale se definește numărul rațional $x - y = x + (-y)$, care se numește *diferența* numerelor x și y.

Pentru oricare două numere raționale x și y, *diferența* $x - y$ este suma dintre numărul x și opusul numărului y.	*În limbajul simbolisticii matematice* $x - y = x + (-y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{Q}$.	$+3{,}7 - (+7{,}3) = +3{,}7 + (-7{,}3) = -(7{,}3 - 3{,}7) = -3{,}6$; $-3{,}7 - (+7{,}3) = -3{,}7 + (-7{,}3) = -(3{,}7 + 7{,}3) = -11$.

Exerciții rezolvate

1. Fără a efectua calculele, estimați ordinul de mărime al rezultatelor și stabiliți dacă afirmațiile pot fi adevărate.

a) $13{,}9 + 48{,}5 = 76{,}4$;
b) $900 - 596{,}9 = 294{,}1$.

Rezolvare

a) $13{,}9 < 20$ și $48{,}5 < 50 \Rightarrow 13{,}9 + 48{,}5 < 70$, nu are loc egalitate.
b) $596{,}9 < 600 \Rightarrow 900 - 596{,}9 > 300$, nu are loc egalitate.

2. Efectuați calculele, folosind, eventual, proprietățile adunării:

a) $1,(2) - \frac{2}{9}$;

b) $\frac{1}{3} + \frac{29}{13} - \frac{4}{3} - \frac{16}{13}$.

a) $1,(2) - \frac{2}{9} = \frac{12-1}{9} - \frac{2}{9} = \frac{9}{9} = 1$; **b)** $\frac{1}{3} + \frac{29}{13} - \frac{4}{3} - \frac{16}{13} = \frac{1}{3} + \frac{29}{13} + \left(-\frac{4}{3}\right) + \left(-\frac{16}{13}\right) =$

$= \frac{1}{3} + \left(-\frac{4}{3}\right) + \frac{29}{13} + \left(-\frac{16}{13}\right) = \left[\frac{1}{3} + \left(-\frac{4}{3}\right)\right] + \left[\frac{29}{13} + \left(-\frac{16}{13}\right)\right] = \frac{1-4}{3} + \frac{29-16}{13} = -1 + 1 = 0.$

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Efectuați adunările:

a) $-\frac{4}{9} + \left(-\frac{7}{9}\right)$;
b) $-\frac{7}{10} + \left(-\frac{1}{10}\right)$;
c) $-\frac{4}{5} + \left(-\frac{11}{10}\right)$;
d) $-\frac{3}{10} + (-1{,}2)$;
e) $0{,}25 + \left(-\frac{1}{8}\right)$;
f) $-2 + \left(-\frac{5}{3}\right) + [-1,(2)]$.

2. Efectuați scăderile:

a) $\frac{5}{6} - \left(-\frac{1}{6}\right)$;
b) $-\frac{1}{4} - \left(-\frac{3}{4}\right)$;
c) $-\frac{1}{3} - \left(+\frac{5}{6}\right)$;
d) $-1{,}7 - \left(-\frac{3}{5}\right)$;
e) $0{,}75 - \left(-1\frac{1}{8}\right)$;
f) $-3 - [-0,(3)]$.

3. Calculați, folosind comutativitatea și asociativitatea adunării numerelor raționale:

a) $\frac{4}{3} - 3 + \frac{5}{3}$;
b) $-\frac{7}{5} - \frac{1}{15} - \frac{4}{5}$;
c) $-4 + \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{3}{2}\right) + (-3)$;
d) $2{,}15 - 1,(6) + (-2{,}65)$.

4. Calculați suma dintre numărul a și opusul numărului b:

a) $a = -2\frac{3}{5}$ și $b = +2{,}2$;

b) $a = -\frac{1}{7} - \frac{22}{77} - \frac{333}{777}$ și $b = -\frac{5}{7} + \frac{3}{14} - \frac{1}{21}$.

5. Calculați diferența dintre numărul c și opusul numărului d:

a) $c = -3\frac{2}{5}$ și $d = -3{,}3$;

b) $c = -\frac{1}{25} - \frac{2}{75}$ și $d = -\frac{2}{25} - \frac{1}{75}$.

6. Se consideră numerele:

$x = -1{,}5 - \left|-\frac{3}{4}\right| + |-1| - \left(-\frac{5}{8}\right)$;

$y = \left|-\frac{5}{4}\right| + \left|-1-\frac{5}{8}\right|$ și $z = \frac{8}{9} + \left(-\frac{11}{18}\right) + \left(-\frac{17}{36}\right)$.

Calculați numerele

a) x, y și z; **b)** $x - y$ și $x + z$.

7. Efectuați calculele:

a) $-\frac{6}{7} + \left(\frac{7}{6} - \frac{67}{42}\right)$; **c)** $-1\frac{2}{9} - \left(2\frac{1}{6} + \frac{7}{3}\right) - 0{,}1(6)$;

b) $\left|\frac{4}{5} - \frac{5}{4}\right| - \frac{11}{20}$; **d)** $-\frac{7}{8} - \left[-2\frac{1}{9} - \left(-\frac{91}{72} + 1\right)\right]$.

8. Trei biologi fac observații de mediu pe suprafețe diferite, într-o rezervație, după cum urmează: primul pe $\frac{1}{6}$ din suprafața rezervației, al doilea pe $\frac{4}{15}$ din suprafața rezervației, iar al treilea pe $\frac{2}{9}$ din suprafața rezervației.

a) Calculați ce parte din suprafață rămâne de studiat după terminarea activității biologilor.

b) Verificați dacă suprafața rămasă pentru studiu depășește $\frac{2}{3}$ din suprafața rezervației.

Minitest

30 p **1.** Copiați pe caiete și completați în casetele libere litera ***A***, dacă propoziția este adevărată și litera ***F***, dacă propoziția este falsă:

Propoziția	***A/F***
$p_{1:}\ -4\frac{2}{5} = -4 + \left(-\frac{2}{5}\right)$.	

Propoziția	***A/F***
$p_2\!: -1\frac{3}{4} - \left(-2\frac{1}{4}\right) > -0{,}3$.	

60 p **2.** Ordonați crescător numerele $a = -\frac{11}{2} + \frac{1}{6}$; $b = -\frac{11}{2} - \frac{3}{20}$; $c = -\frac{11}{2} - \frac{7}{60}$.

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

L2 Înmulțirea numerelor raționale. Împărțirea numerelor raționale

Ne amintim

Produsul fracțiilor ordinare $\frac{a}{n}$ și $\frac{b}{p}$, $n \neq 0$ și $p \neq 0$, este fracția ordinară $\frac{a \cdot b}{n \cdot p}$.

$$\frac{a}{n} \cdot \frac{b}{p} = \frac{a \cdot b}{n \cdot p}$$

Observație. Numărul natural b se poate scrie ca fracție ordinară cu numitorul 1, adică $\frac{b}{1}$, iar produsul dintre numărul b și fracția $\frac{a}{n}$ va fi $\frac{b}{1} \cdot \frac{a}{n} = \frac{b \cdot a}{1 \cdot n} = \frac{b \cdot a}{n}$.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Înmulțirea numerelor raționale este operația prin care fiecărei perechi de numere raționale x și y i se pune în corespondență produsul lor, adică numărul rațional unic $x \cdot y$.

Modul de calcul rezultă din ceea ce cunoaștem de la înmulțirea *numerelor întregi* și de la înmulțirea *numerelor raționale pozitive*.

Caz/ mod de calcul	*Exemple*
Dacă $x > 0$ și $y > 0$, atunci $x \cdot y > 0$ și $x \cdot y = \lvert x \rvert \cdot \lvert y \rvert$.	$(+3,5) \cdot (+0,2) = +0,75$. Scriem, de regulă, $3,5 \cdot 0,2 = 0,75$.
Dacă $x > 0$ și $y < 0$, sau $x < 0$ și $y > 0$, atunci $x \cdot y < 0$ și $x \cdot y = -(\lvert x \rvert \cdot \lvert y \rvert)$.	$(+12) \cdot (-0,2) = -(\lvert +12 \rvert \cdot \lvert -0,2 \rvert) = -(12 \cdot 0,2) = -2,4$. $(-1,2) \cdot (+2) = -(\lvert -1,2 \rvert \cdot \lvert +2 \rvert) = -(1,2 \cdot 2) = -2,4$.
$0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$, oricare ar fi numărul rațional x.	$0 \cdot (+3,7) = (+3,7) \cdot 0 = 0$; $0 \cdot (-3,5) = (-3,5) \cdot 0 = 0$.
Dacă $x < 0$ și $y < 0$, atunci $x \cdot y > 0$ și $x \cdot y = \lvert x \rvert \cdot \lvert y \rvert$.	$(-4,2) \cdot (-7,5) = \lvert -4,2 \rvert \cdot \lvert -7,5 \rvert = 4,2 \cdot 7,5 = 31,5$. $(-2) \cdot (-1,9) = \lvert -2 \rvert \cdot \lvert -1,9 \rvert = 2 \cdot 1,9 = 3,8$.

Reținem!

Regula semnelor la înmulțirea numerelor raționale

1. Produsul oricăror două numere raționale, *ambele pozitive sau ambele negative* este un număr rațional *pozitiv*. Dacă $x > 0$ și $y > 0$ sau $x < 0$ și $y < 0$, atunci $x \cdot y > 0$.
2. Produsul oricăror două numere raționale, dintre care *unul este pozitiv, iar celălalt este negativ*, este un număr rațional *negativ*. Dacă $x > 0$ și $y < 0$, sau $x < 0$ și $y > 0$, atunci $x \cdot y < 0$.
3. Modulul produsului a două numere raționale este egal cu produsul modulelor acestora. $\lvert x \cdot y \rvert = \lvert x \rvert \cdot \lvert y \rvert$, oricare ar fi numerele raționale x și y.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Dacă unul din factori este fracție zecimală periodică, se scriu ambii factori sub formă de fracții ordinare și se efectuează apoi înmulțirea, având în vedere „regula semnelor la înmulțire”.

În situații de acest fel, se recomandă ca rezultatul înmulțirilor să fie prezentat sub formă de fracție *ireductibilă*. Pentru a ușura calculul, se pot face *simplificări* ale fracțiilor care intervin sau simplificări ale rezultatului.

Înmulțirea numerelor raționale păstrează toate *proprietățile înmulțirii numerelor întregi*. În plus, numerele *raționale nenule* sunt inversabile (așa cum știam din clasa a V-a despre numerele raționale pozitive).

Proprietatea	*În limbajul simbolisticii matematice*
Înmulțirea numerelor raționale este asociativă.	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{Q}$.
Înmulțirea numerelor raționale este *comutativă*.	$x \cdot y = y \cdot x$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{Q}$.
Numărul 1 este *element neutru* pentru înmulțirea numerelor raționale.	$1 \cdot x = x \cdot 1 = x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Q}$.
Orice număr *rațional nenul* admite un invers. **Atenție! 0 nu admite invers.**	Oricare ar fi $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$, există numărul rațional $\frac{1}{x}$ astfel încât $x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$.
Înmulțirea numerelor raționale este *distributivă față de adunare și scădere.*	Oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{Q}$, $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ și $x \cdot (y - z) = x \cdot y - x \cdot z$.

Pentru compararea și ordonarea numerelor raționale este utilă și *proprietatea de monotonie*, adică:

Dacă x și y sunt numere raționale, $x < y$, iar z este număr rațional pozitiv, atunci $x \cdot z < y \cdot z$.	Dacă $x < 2,5$, atunci $2 \cdot x < 2 \cdot 2,5$, adică $2 \cdot x < 5$.
Dacă x și y sunt numere raționale, $x < y$, iar z este număr rațional negativ, atunci $x \cdot z > y \cdot z$.	Dacă $x < -0,5$, atunci $(-3) \cdot x > (-3) \cdot (-0,5)$, adică $-(3 \cdot x) > +1,5$.

Dacă $x=\dfrac{a}{b}$, $a,b\in\mathbb{Z}, a\neq 0, b\neq 0$, atunci $\dfrac{1}{x}=\dfrac{b}{a}$.

Numărul $\dfrac{1}{x}=\dfrac{b}{a}$, $a\neq 0, b\neq 0$, este inversul numărului $x=\dfrac{a}{b}$, $a\neq 0, b\neq 0$.

Numărul $x=\dfrac{a}{b}$, $a\neq 0, b\neq 0$, este inversul numărului $\dfrac{1}{x}=\dfrac{b}{a}$, $a\neq 0, b\neq 0$.

Inversul numărului *rațional nenul* x se notează x^{-1}, deci $\dfrac{1}{x}\overset{not}{=}x^{-1}, x\neq 0$.

$x=\dfrac{2}{3}$, $x^{-1}=\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{2}$. Scriem:

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}=\dfrac{3}{2}$ și $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-1}=\dfrac{2}{3}$. Analog:

$\left(\dfrac{-2}{3}\right)^{-1}=\dfrac{3}{-2}=-\dfrac{3}{2}$; $\left(\dfrac{2}{-3}\right)^{-1}=\dfrac{-3}{2}=-\dfrac{3}{2}$,

deci $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-1}=\left(\dfrac{-2}{3}\right)^{-1}=\left(\dfrac{2}{-3}\right)^{-1}=-\dfrac{3}{2}$.

Pentru oricare două numere raționale x și y, $y\neq 0$, *câtul* $x:y$ este produsul dintre numărul x și inversul numărului y.

Împărțirea la 0 nu are sens!

În limbajul simbolisticii matematice

$x:y=x\cdot y^{-1}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{Q}$ și $y\in\mathbb{Q}^*$.

$(+2):(-0,5)=2:\left(-\dfrac{1}{2}\right)=2\cdot\left(-\dfrac{2}{1}\right)=-4$;

$\left(-\dfrac{3}{2}\right):\left(-\dfrac{9}{4}\right)=\left(-\dfrac{3}{2}\right)\cdot\left(-\dfrac{4}{9}\right)=\dfrac{\cancel{3}^1}{\cancel{2}^1}\cdot\dfrac{\cancel{4}^2}{\cancel{9}^3}=\dfrac{2}{3}$.

Observație. Împărțirea $x:y$, unde $x\in\mathbb{Q}$, $y\in\mathbb{Q}$, $y\neq 0$, se scrie frecvent sub formă de raport: $x:y=\dfrac{x}{y}$.

Exerciții rezolvate

1. Determinați numărul rațional x, știind că $y\cdot z=-\dfrac{2}{7}$ și $x\cdot y\cdot z=\dfrac{16}{49}$.	Folosind asociativitatea înmulțirii, $x\cdot y\cdot z=\dfrac{16}{49}$ se poate scrie $x\cdot(y\cdot z)=\dfrac{16}{49}$. Dar, $y\cdot z=-\dfrac{2}{7}$, deci $x\cdot\left(-\dfrac{2}{7}\right)=\dfrac{16}{49}$, adică $x=\dfrac{16}{49}:\left(-\dfrac{2}{7}\right)=\dfrac{16}{49}\left(-\dfrac{7}{2}\right)=-\left(\dfrac{16}{49}\cdot\dfrac{7}{2}\right)=-\dfrac{8}{7}$.
2. Efectuați împărțirile și scrieți rezultatele sub formă de fracții ireductibile **a)** $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}$; **b)** $\dfrac{-\frac{1}{3}}{\frac{1}{9}}$.	**a)** $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}:\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{\cancel{2}^1}\cdot\dfrac{\cancel{4}^2}{1}=2$; **b)** $\dfrac{-\frac{1}{3}}{\frac{1}{9}}=-\dfrac{1}{3}:\dfrac{1}{9}=-\dfrac{1}{\cancel{3}^1}\cdot\dfrac{\cancel{9}^3}{1}=-3$.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Scrieți ca produs de numere raționale:

a) $-2+(-2)+(-2)$;

b) $-\dfrac{1}{3}+\left(-\dfrac{1}{3}\right)+\left(-\dfrac{1}{3}\right)+\left(-\dfrac{1}{3}\right)$;

c) $\underbrace{\left(-\dfrac{3}{4}\right)+\left(-\dfrac{3}{4}\right)+\ldots+\left(-\dfrac{3}{4}\right)}_{\text{10 termeni}}$.

2. Calculați:

a) numărul rațional de patru ori mai mare decât $\dfrac{2}{9}$;

b) triplul numărului rațional 2,25;

c) produsul dintre numărul -3 și opusul numărului $-\dfrac{5}{9}$.

3. Efectuați înmulțirile:

a) $-4\cdot\left(-\dfrac{3}{5}\right)$;

b) $-\dfrac{3}{8}\cdot 10$;

c) $\dfrac{11}{16}\cdot(-8)$;

d) $12\cdot(-0{,}25)$.

4. Efectuați înmulțirile, scriind rezultatul ca fracție ordinară ireductibilă:

a) $\dfrac{6}{5}\cdot\left(-\dfrac{2}{9}\right)$;

b) $-\dfrac{3}{10}\cdot\left(-\dfrac{5}{6}\right)$;

c) $\dfrac{-10}{3}\cdot\dfrac{-7}{20}$;

d) $-1\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{27}{5}$.

5. Folosind, eventual, comutativitatea și asociativitatea înmulțirii, efectuați:

a) $0{,}2\cdot\left(-\dfrac{5}{4}\right)\cdot(-10)$;

b) $-0{,}45\cdot\left(-\dfrac{7}{27}\right)\cdot 100$;

c) $-\dfrac{3}{11}\cdot 0{,}121\cdot(-1000)$.

d) $-9{,}8\cdot 17{,}92\cdot 0\cdot 9$.

6. Scrieți inversele numerelor: $\dfrac{3}{8}$; $-\dfrac{1}{4}$; -5; $2\dfrac{1}{3}$; $0{,}7$.

7. Copiați tabelul pe caiete și completați în casetele libere rezultatele corespunzătoare.

x	$\dfrac{3}{2}$	$-\dfrac{1}{7}$		-1	$-1{,}2$	
$\dfrac{1}{x}$			$-\dfrac{4}{5}$			$2\dfrac{1}{3}$
$x\cdot\dfrac{1}{x}$						

8. Efectuați împărțirile:

a) $-2{,}4 : 1{,}2$;

b) $-6{,}3 : (-0{,}9)$;

c) $-33 : \dfrac{22}{-3}$;

d) $-5{,}(5) : 2{,}(2)$.

9. Efectuați împărțirile:

a) $\dfrac{5}{4}:\dfrac{25}{3}$;

b) $-\dfrac{8}{9}:\dfrac{5}{18}$;

c) $-\dfrac{3}{16}:\left(-\dfrac{15}{8}\right)$;

d) $-1\dfrac{2}{3}:\left(-2\dfrac{2}{9}\right)$;

e) $-\dfrac{10}{3}:20$;

f) $0:\left(-\dfrac{23}{9}\right)$.

10. Efectuați calculele și scrieți rezultatele sub formă de fracții ordinare ireductibile:

a) $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}$;

b) $\dfrac{-\frac{1}{3}}{\frac{1}{9}}$;

c) $\dfrac{-4{,}8}{-1{,}6}$;

d) $\dfrac{-\frac{17}{10}}{0{,}1}$

11. Efectuați calculele:

a) $2\cdot\dfrac{9}{8}:\dfrac{3}{4}$;

b) $-3\cdot\dfrac{10}{27}:\left(-\dfrac{25}{36}\right)$;

c) $-5:\left(-\dfrac{5}{2}\right)\cdot\dfrac{15}{4}:\left(-\dfrac{45}{4}\right)$;

d) $-13:(-12:0{,}(3))$.

12. Folosind distributivitatea înmulțirii față de adunare și scădere, efectuați:

a) $\dfrac{2}{3}\cdot\left(\dfrac{3}{2}+2\right)$;

b) $\left(\dfrac{10}{9}+\dfrac{5}{6}\right)\cdot(-18)$;

c) $\dfrac{7}{8}\cdot\left(\dfrac{8}{7}-8\right)$;

d) $\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{5}\right)\cdot\left(-\dfrac{15}{4}\right)$.

13. Se consideră numerele $a=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}$ și $b=\dfrac{1}{22}+\dfrac{1}{44}+\dfrac{1}{66}$.

a) Calculați $2\cdot a-22\cdot b$.

b) Demonstrați că $a=11\cdot b$.

Minitest

1. *Alegeți varianta corectă de răspuns. Doar un răspuns este corect.*

20 p **a)** Produsul numerelor raționale $-1\dfrac{3}{5}$ și 3,75 este:

A. -1; **B.** $+3$; **C.** -6; **D.** -8.

20 p **b)** Rezultatul calculului $\dfrac{3}{4}:\left(-\dfrac{9}{16}\right):[-1{,}(3)]$ este:

A. $-0{,}5$; **B.** 1; **C.** $-1{,}5$; **D.** 3.

50 p **2.** Dacă $m=-0{,}4\cdot\dfrac{25}{8}$ și $n=-\dfrac{5^2}{-2^2}:(-2{,}5)$, calculați $m\cdot n$ și $m:n$.

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

L3 Puterea cu exponent număr întreg a unui număr rațional nenul. Reguli de calcul cu puteri

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Pentru orice număr *rațional nenul* x *și* pentru orice număr natural $n \geq 2$, *puterea* a n-a a numărului x se notează x^n *și se definește prin:* $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot ... \cdot x}_{\text{de } n \text{ ori}}$.

Dacă x este un număr *rațional nenul* și n este un număr *natural nenul,* atunci puterea a n-a a numărului rațional x^{-1} se notează x^{-n} și se numește puterea cu exponent $-n$ a numărului x.

Oricare ar fi $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$ și oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x^{-n} = \left(x^{-1}\right)^n \text{ sau } x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n.$$

Dacă $x = \frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}^*$, $b \in \mathbb{Z}^*$, atunci $x^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$; $x^{-1} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$, iar $x^{-n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$.

Convenții: $x^0 = 1$ *și* $x^1 = x$, oricare ar fi numărul *rațional* x, $x \neq 0$.
$0^n = 0$, oricare ar fi numărul natural n, $n \neq 0$. 0^0 nu are sens!

Exemple.

1. $(-1)^{-1} = \frac{1}{-1} = -1$; **2.** $(-1)^{-4} = \left((-1)^{-1}\right)^4 = (-1)^4 = 1$; **3.** $(-1)^{-3} = \left((-1)^{-1}\right)^3 = (-1)^3 = -1$; **4.** $\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = -\frac{2^3}{5^3} = -\frac{8}{125}$;

5. $2^{-4} = \left(2^{-1}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$; **6.** $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right]^2 = \left(\frac{3}{1}\right)^2 = 3^2 = 9$; **7.** $\left(\frac{3}{5}\right)^{-4} = \left[\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}\right]^4 = \left(\frac{5}{3}\right)^4 = \frac{625}{81}$.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Regulile de calcul cu *puteri cu exponent întreg ale numerelor raționale* sunt similare celor de la puteri cu exponent natural ale numerelor raționale pozitive.

Denumirea regulii	*Regula și condițiile de aplicare*
1. produsul a două puteri care au aceeași bază	$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Q}^*$ și oricare ar fi $m, n \in \mathbb{Z}$.
2. câtul a două puteri care au aceeași bază	$x^m : x^n = x^{m-n}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Q}^*$ și oricare ar fi $m, n \in \mathbb{Z}$.
3. puterea unei puteri	$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Q}^*$ și oricare ar fi $m, n \in \mathbb{Z}$.
4. puterea unui produs	$(x \cdot y)^m = x^m \cdot y^m$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Q}^*$, $y \in \mathbb{Q}^*$ și $m \in \mathbb{Z}$.
Consecință: Dacă $x \in \mathbb{Q}^*$ și $n \in \mathbb{Z}$, atunci $(-x)^n = (-1)^n \cdot x^n$;	$(-x)^n = x^n$, dacă n este par și $(-x)^n = -x^n$, dacă n este impar.
5. puterea unui cât	$(x : y)^m = x^m : y^m$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{Q}^*$ și oricare ar fi $m \in \mathbb{Z}$.

Exerciții rezolvate

Calculați în două moduri: **a)** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$; **b)** $(-2)^{-3}$.

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right]^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3^2}{2^2}=\frac{9}{4}.$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\frac{2^{-2}}{3^{-2}}=\frac{\left(\frac{2}{1}\right)^{-2}}{\left(\frac{3}{1}\right)^{-2}}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{2}}=\frac{1}{4}:\frac{1}{9}=\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{1}=\frac{9}{4}.$
b) $(-2)^{-3}=\left[(-2)^{-1}\right]^3=\left(\frac{1}{-2}\right)^3=\frac{1^3}{(-2)^3}=\frac{1}{-8}=-\frac{1}{8}.$	$(-2)^{-3}=\left[(-2)^{-1}\right]^3=\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-\left(\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{1}{8}.$

2. a) Demonstrați că $x^{-n}=\frac{1}{x^n}$ oricare ar fi $x\in\mathbb{Q}$, $x\neq 0$ și oricare ar fi $n\in\mathbb{Z}$.

b) Folosind relația dată la subpunctul a), calculați 3^{-4}; 10^{-3}; $(0,1)^{-3}$; 9^{-2}.

Rezolvare

a) $x^{-n}=\left(x^{-1}\right)^n=\left(\frac{1}{x}\right)^n=\frac{1^n}{x^n}=\frac{1}{x^n}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{Q}$, $x\neq 0$ și oricare ar fi $n\in\mathbb{Z}$.

b) $3^{-4}=\frac{1}{3^4}=\frac{1}{81}$; $10^{-3}=\frac{1}{10^3}=\frac{1}{1000}=0{,}001$; $(0{,}1)^{-3}=\frac{1}{(0{,}1)^3}\overset{1000)}{=}\frac{1}{0{,}001}=1000$; $9^{-2}=\frac{1}{9^2}=\frac{1}{81}$.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Scrieți ca putere, precizând în fiecare caz baza puterii și exponentul puterii:

a) $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$;

b) $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$;

c) $2{,}5\cdot 2{,}5\cdot 2{,}5\cdot 2{,}5$;

d) $\left(-\frac{5}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)$.

2. Efectuați calculele:

a) 4^3; **d)** $(-0{,}1)^6$;

b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$; **e)** $\left(-\frac{7}{10}\right)^0$;

c) $\left(-\frac{4}{3}\right)^3$; **f)** $\left(-\frac{4}{9}\right)^1$.

3. Efectuați calculele:

a) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2$; **e)** $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right]^3$;

b) $0{,}2^3\cdot 0{,}2^2$; **f)** $\left[(-0{,}4)^1\right]^4$;

c) $\left(-\frac{1}{4}\right)^6:\left(-\frac{1}{4}\right)^4$; **g)** $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^3$;

d) $(-0{,}3)^8:(-0{,}3)^5$; **h)** $\left(-\frac{7}{2}\right)^3\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)^5:\left(-\frac{7}{2}\right)^7$.

4. Scrieți ca putere cu baza un număr rațional:

9; -8; $\frac{1}{4}$; $0{,}01$; $-0{,}027$; $\frac{3^5}{2^{10}}$.

5. Copiați tabelul pe caiete și completați în casetele libere litera ***A***, dacă propoziția este adevărată și litera ***F***, dacă propoziția este falsă.

Propoziția	***A/F***
$0{,}4^2\cdot 0{,}4^5=0{,}4^{2+5}$	
$\left(\frac{2}{3}\right)^7:\left(\frac{2}{3}\right)^4=\left(\frac{2}{3}\right)^{7+4}$	
$\left[(-0{,}5)^2\right]^3=(-0{,}5)^{2\cdot 3}$	
$\left(-\frac{2}{7}\right)^3$ este un număr rațional negativ.	
$0{,}6^2\cdot 0{,}6^3=0{,}6^{2\cdot 3}$	
$\left(\frac{3}{2}\right)^{10}:\left(\frac{3}{2}\right)^8=\left(\frac{3}{2}\right)^{10-8}$	

6. Calculați:

a) $\frac{2^4}{3^5}\cdot\frac{3^6}{4^3}\cdot(-2)^3$; **b)** $\frac{5^6}{7^6}:\left(-\frac{5}{7}\right)^4+(-7)^{-1}$.

c) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}$; **g)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{-6}$;

d) $(-1)^{-4}$; **h)** $(-0,1)^8$.

7. Copiați pe caiete și completați tabelul folosind relația $x^{-n}=\frac{1}{x^n}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{Q}$, $x\neq 0$ și oricare ar fi $n\in\mathbb{Z}$.

a	$\frac{1}{2}$	$-0,5$	-2	$-\frac{3}{4}$	-1
a^{-1}					
a^{-2}					
a^{-3}					

8. Efectuați calculele:

a) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-1}$; **e)** $(-0,2)^{-5}$;

b) $[0,(3)]^{-3}$; **f)** 1^{-7};

9. Fie numerele

$$a=\left(-\frac{2}{3}\right)^4\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2},\ b=\left(\frac{4}{5}\right)^{-8}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^6 \text{ și}$$

$$c=\left(-\frac{3}{2}\right)^5\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^{-2}:(-1,5)^2.$$

Demonstrați că $a\cdot b\cdot c<-1$.

10. Determinați:

a) numărul natural n pentru care $\left(\frac{5}{3}\right)^{1-n}=1$;

b) numărul întreg m pentru care $\left(\frac{2}{7}\right)^m=3,5$;

c) cifra p, în baza 10, pentru care $\overline{1,p}^{\,-2}=2\frac{1}{4}$.

Minitest

1. Alegeți varianta corectă de răspuns. Doar un răspuns este corect.

20 p **a)** Dintre numerele $a=\left(-\frac{1}{2}\right)^3$, $b=\left(-\frac{2}{3}\right)^4$, $c=\left(-\frac{3}{4}\right)^5$ și $d=(1-2+3-4)^5$, este pozitiv numărul:

A. a; **B.** b; **C.** c; **D.** d.

20 p **b)** Numărul rațional $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$ este egal cu:

A. 2; **B.** – 2; **C.** – 4; **D.** 4.

20 p **c)** Rezultatul calculului $\left(-\frac{5}{2}\right)^2\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)^3:\left(-\frac{5}{2}\right)^4$ este:

A. $-\frac{5}{2}$; **B.** $\frac{5}{2}$; **C.** $-\frac{25}{4}$; **D.** $\frac{25}{4}$.

2.

15 p **a)** Calculați $\left(\frac{3}{2}\right)^n$, pentru $n\in\{-1, 0, 1, 2, 3\}$.

15 p **b)** Deduceți valorile numărului natural n pentru care $1\leq\left(\frac{3}{2}\right)^n\leq 3$.

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

L4 Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor

Adunarea și *scăderea* sunt operații de ordinul I, *înmulțirea* și *împărțirea* sunt operații de ordinul II, iar *operațiile cu puteri* sunt operații de ordinul III.
Din lecțiile anterioare, deducem și următoarele reguli de calcul:

$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Q}$.	$x \cdot (-1) = (-1) \cdot x = -x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Q}$.
$(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Q}$ și $y \in \mathbb{Q}$.	$x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{x^n}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Q}, x \neq 0$ și oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}$.
$-(x+y) = (-x) + (-y) = -x - y$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{Q}$.	$x - (y+z) = x - y - z$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

Observație. La eliminarea parantezelor care conțin sume, semnul „–" în fața parantezei schimbă semnele tuturor termenilor din paranteză.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Ordinea efectuării operațiilor cu numere raționale este similară ordinii efectuării operațiilor cu numere raționale pozitive, studiată în clasa a V-a.

Reținem!

1. Dacă exercițiul conține *doar operații de același ordin*, acestea se efectuează în ordinea în care sunt scrise, de la stânga la dreapta.
2. Dacă exercițiul are operații de *ordine diferite* dar *nu conține paranteze*, atunci se efectuează operațiile de ordin trei, apoi de ordin doi și la final de ordinul întâi, respectând ordinea de la **1**, adică:
Pasul 1. Se efectuează operațiile cu puteri și ridicările la putere.
Pasul 2. Se efectuează înmulțirile și împărțirile, folosind rezultatele de la etapa anterioară și respectând ordinea de la **1**.
Pasul 3. Se efectuează adunările și scăderile, folosind rezultatele de la pasul 2 și respectând ordinea de la **1**.

Observație: Operațiile cu puteri se pot efectua în etapa pregătitoare sau *pe parcursul rezolvării*, atunci când dorim să scriem unele numere într-o formă care să simplifice calculele.

3. Dacă exercițiul conține și paranteze, atunci:
Pasul 1. Se efectuează calculele din parantezele rotunde, respectând ordinea descrisă la **2**.
Pasul 2. Se transformă parantezele pătrate în paranteze rotunde, acoladele se transformă în paranteze pătrate.
Pasul 3. Se efectuează calculele din noile paranteze rotunde, respectând ordinea descrisă la **2**.
Pasul 4. Se continuă, în acest mod, până când se elimină toate parantezele, apoi se efectuează calculele fără paranteze.
Vom avea grijă ca fracțiile rezultate în urma calculelor să fie ireductibile.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Exercițiu rezolvat

Scrieți numărul $\left[-\frac{7}{15}-\frac{14}{5}:\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}-\frac{2}{9}\right]:\left(1+\frac{1}{3}+\frac{155}{93}\right)$ sub formă de fracție ordinară ireductibilă.

Soluție

Efectuăm:	*Calcul*
operații cu puteri, ridicări la putere	$\left[-\frac{7}{15}-\frac{14}{5}:\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}-\frac{2}{9}\right]=\left[-\frac{7}{15}-\frac{14}{5}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{2}-\frac{2}{9}\right]=\left(-\frac{7}{15}-\frac{14}{5}\cdot\frac{1}{9}-\frac{2}{9}\right)$
înmulțirea din paranteza rotundă	$\left(-\frac{7}{15}-\frac{14}{5}\cdot\frac{1}{9}-\frac{2}{9}\right)=\left(-\frac{7}{15}-\frac{14}{45}-\frac{2}{9}\right)$
adunările și scăderile din parantezele rotunde	$\left(-\frac{7}{15}-\frac{14}{45}-\frac{2}{9}\right)=\left(-{}^{3)}\frac{7}{15}-\frac{14}{45}-{}^{5)}\frac{2}{9}\right)=\left(-\frac{21}{45}-\frac{14}{45}-\frac{10}{45}\right)=-\frac{45}{45}=-1$ $\left(1+\frac{1}{3}+\frac{155}{93}\right)=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{155^{(31}}{93}\right)=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{5}{3}\right)=\left(1+\frac{6}{3}\right)=(1+2)=3.$
operația de împărțire, folosind rezultatele obținute	$(-1):3=-1\cdot\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}.$

Model de redactare

$$\left[-\frac{7}{15}-\frac{14}{5}:\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}-\frac{2}{9}\right]:\left(1+\frac{1}{3}+\frac{155}{93}\right)=\left[-\frac{7}{15}-\frac{14}{5}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{2}-\frac{2}{9}\right]:\left(1+\frac{1}{3}+\frac{155^{(31}}{93}\right)=$$

$$=\left(-\frac{7}{15}-\frac{14}{5}\cdot\frac{1}{9}-\frac{2}{9}\right):\left(1+\frac{1}{3}+\frac{5}{3}\right)=\left(-{}^{3)}\frac{7}{15}-\frac{14}{45}-{}^{5)}\frac{2}{9}\right):(1+2)=\left(-\frac{21}{45}-\frac{14}{45}-\frac{10}{45}\right):3=-\frac{45}{45}:3=-\frac{1}{3}.$$

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Calculați, respectând ordinea efectuării operațiilor:

a) $-5+\frac{7}{2}:\left(-\frac{1}{2}\right)$; **c)** $\frac{9}{10}\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)+\left(-\frac{27}{8}\right):\frac{9}{2}$;

b) $0,(8)+\left(-\frac{4}{3}\right)^{2}:\frac{2}{3}$; **d)** $(0,5)^{2}:\frac{1}{6}+(-2)^{-2}$.

2. Fie numerele $a=0,(3)$ și $b=\frac{13}{39}$.

Calculați numărul $c=(a-b)\cdot(a+b)$ și precizați dacă este negativ, pozitiv sau nul.

3. Demonstrați că $\left(\frac{1}{3}\right)^{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{5}-3^{-9}$ este număr natural.

4. Efectuați calculele și exprimați rezultatele sub forma unei fracții ordinare ireductibile:

a) $0,(7)\cdot\frac{1}{21}+2,(3)\cdot3^{-2}$;

b) $\left[\left(1,(3)-\frac{1}{3}\right)^{2}+\left(-\frac{2}{3}\right)^{2}\right]:\left(1-\frac{5}{18}\right)$;

c) $(6:1,5+1:0,2)\cdot(-0,1)^{-3}$;

d) $\left[\left(-\frac{2}{5}\right)^{3}:\left(\frac{2}{5}\right)^{2}-1\right]\cdot\frac{15}{14}+1,5$;

e) $\left(\left|2-\frac{2}{3}\right|+\left|-\frac{11}{12}+\frac{3}{4}\right|\right):\left(1,2^{2}-2,65\right)\cdot\frac{11}{15}$.

5. Se consideră numerele

$$a = 8\cdot\frac{7}{32}-\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{3}+0{,}25 \text{ și } b = 3{,}(6)+\frac{7}{3}:\left(1+\frac{2}{5}\right).$$

a) Calculați numerele raționale a și b.

b) Determinați numerele naturale m și n pentru care $m\cdot a+n\cdot b=9$.

6. Se consideră numerele

$$c=\frac{2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} \text{ și } d=\frac{3-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}-\frac{3}{4}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}.$$

Efectuați calculele și stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

p_1: $17\cdot c+5=25\cdot d$;

p_2: $c>d$;

p_3: $c<d$.

7. Efectuați calculele:

a) $\left[-\frac{7}{15}-\frac{14}{5}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{2}{9}\right]:\left(1+\frac{1}{3}+\frac{155}{93}\right)$;

b) $\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-3^{-1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-5^{-1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)$;

c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(1\frac{1}{2}\right)\cdot(-2)^4$;

d) $\left(\frac{4}{3}\right)^{43}\cdot\left(1\frac{1}{3}\right)^{4+3}:\left[\frac{1}{16}\cdot\frac{2^{100}}{9^{24}}\right]$.

8. Calculați media aritmetică a numerelor:

$$x=\left(2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}\right):\left(2^{-4}+2^{-5}+2^{-6}\right) \text{ și}$$

$$y=\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^0+\left(-\frac{1}{2}\right)^1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]:\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^4+\left(-\frac{1}{2}\right)^5+\left(-\frac{1}{2}\right)^6\right].$$

Minitest

30 p **1.** Asociați fiecărei cifre care indică un calcul din coloana **A**, litera care indică răspunsul corespunzător, aflat în coloana **B**.

A	B
1. $1+\left(-\frac{1}{2}\right):0{,}25=$	**a.** $\frac{7}{10}$
2. $\left(3^3\cdot3^{-2}+4^4\cdot4^{-3}\right):\left(-4\frac{2}{3}\right)=$	**b.** -1
3. $\frac{(-2)^3}{2^3+1}\cdot\frac{(-3)^3}{3^2-1}-2{,}3=$	**c.** $-\frac{3}{2}$
	d. -2
	e. $\frac{3}{2}$

2. Se consideră numerele raționale

$$a=1:\left(1\frac{3}{7}-2\frac{5}{14}\right),\ b=2+\left(\frac{1}{21}+\frac{5}{42}-\frac{6}{35}\right):15^{-1} \text{ și } c=\left(\frac{5}{24}+\frac{10}{72}+\frac{15}{144}\right):(-1{,}2)^{-1}.$$

50 p **a)** Determinați numerele a, b, și c.

10 p **b)** Demonstrați că $2\cdot(a\cdot b\cdot c)$ este pătratul unui număr rațional.

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

4.3. Ecuații de tipul $x + a = b$; $x \cdot a = b$; $x : a = b$, $(a \neq 0)$; $a \cdot x + b = c$, unde $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Probleme care se rezolvă folosind ecuații de acest tip

L1 Ecuații de tipul $x + a = b$; $x \cdot a = b$; $x : a = b$; $(a \neq 0)$; $a \cdot x + b = c$, unde $a, b, c \in \mathbb{Q}$

Ne amintim

Relația de egalitate, pe mulțimea numerelor raționale, este:

a) *reflexivă*: Orice număr rațional este egal cu el însuși, adică $a = a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{Q}$.

b) *simetrică*: Dacă $a, b \in \mathbb{Q}$ și $a = b$, atunci $b = a$.

c) *tranzitivă*: Dacă $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $a = b$ și $b = c$, atunci $a = c$.

Pornind de la o *egalitate*, folosind operația de *adunare*, operația de *scădere*, operația de *înmulțire* sau operația de *împărțire* a numerelor raționale, obținem următoarele *transformări echivalente*:

Dacă $a, b \in \mathbb{Q}$ și $a = b$, atunci $a + c = b + c$ și $a - c = b - c$, oricare ar fi $c \in \mathbb{Q}$.

Dacă $a, b \in \mathbb{Q}$ și $a = b$, atunci $a \cdot c = b \cdot c$, oricare ar fi $c \in \mathbb{Q}$ și $a : c = b : c$, oricare ar fi $c \in \mathbb{Q}$, $c \neq 0$.

Nu uităm! Împărțirea la 0 nu are sens!

Rezolvăm și observăm

Cristian este pasionat de prepararea deserturilor. Cadoul de ziua surorii lui va fi un tortuleț de ciocolată. Ciocolata reprezintă 20% din tort și cântărește 250 g.

a) Calculați cantitatea de ciocolată de care mai are nevoie, exprimată în g, știind că are deja 0,150 kg de ciocolată.

b) Calculați masa tortului pe care îl face Cristian, exprimată în kg.

Rezolvare.

a) Fie x masa ciocolatei de care mai are nevoie. Atunci, cum 0,150 kg = 150 g, obținem ecuația $150 + x = 250$, cu necunoscuta x, cu soluția $x = 250 - 150$, deci $x = 100$ (g).

b) Fie t masa tortului, exprimată în kg. Masa ciocolatei reprezintă 20% din t. Cum 250 g = 0,25 kg, obținem ecuația $\frac{20}{100} \cdot t = 0{,}25$ cu necunoscuta t. Împărțim ambii membri ai ecuației la $\frac{20}{100}$ și obținem $t = 0{,}25 : \frac{20}{100}$.

Cum $0{,}25 : \frac{20}{100} = \frac{\cancel{25}^{5}}{\cancel{100}^{1}} \cdot \frac{\cancel{100}^{1}}{\cancel{20}^{4}} = \frac{5}{4} = 1{,}250$, rezultă $t = 1{,}250$ (kg).

Răspuns: **a)** Cristian mai are nevoie de 100 g ciocolată. **b)** Tortul de ziua surorii lui cântărește 1,250 kg.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Rezolvarea problemei de mai sus a condus la formularea și la rezolvarea a două ecuații, în mulțimea numerelor raționale.

Ne propunem să rezolvăm în mulțimea $\mathbb{Q}$ sau în submulțimi ale mulțimii $\mathbb{Q}$, ecuații care pot fi scrise în una din formele: $x + a = b$; $x \cdot a = b$; $x : a = b$; $a \neq 0$ sau $a \cdot x + b = c$, unde $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

Am notat necunoscuta cu x, dar în probleme, putem folosi orice altă notație. Numerele a, b, c sunt cunoscute și se numesc coeficienți ai termenilor ecuației.

Toate ecuațiile de acest tip se rezolvă prin metoda mersului invers, folosind proprietățile operațiilor cu numere raționale și *transformările echivalente* ale egalităților, amintite mai sus.

1. $x + a = b;\ a, b \in \mathbb{Q}$	*Exemplu*
$x + a = b \mid -a$ $x = b - a.$ $S = \{b - a\}$	$x + 2{,}9 = 1{,}2 \mid -2{,}9$ $x = -1{,}7.$ $S = \{-1{,}7\}$
2. $x \cdot a = b;\ a, b \in \mathbb{Q}$	*Exemple*
a) Dacă $a = 0$, ecuația devine: $x \cdot 0 = b$. Are loc egalitatea doar pentru $b = 0$, și obținem: $S = \varnothing$, dacă $b \neq 0$ și $S = \mathbb{Q}$, dacă $b = 0$.	**i)** $x \cdot 0 = 1$, imposibil și $S = \varnothing$. **ii)** $x \cdot 0 = -1 + 2 : 2 \Leftrightarrow x \cdot 0 = 0$, adevărată, oricare ar fi $x \in \mathbb{Q}$ și $S = \mathbb{Q}$.
b) Dacă $a \neq 0$, $x \cdot a = b \mid : a$ $x = b : a.$ $S = \{b : a\}.$	$x \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{5} \mid : \left(-\frac{2}{3}\right)$ $x = \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{-1} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{5}$, $S = \left\{-\frac{3}{5}\right\}$.
3. $x : a = b;\ a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0$	*Exemplu*
$x : a = b \mid \cdot a$ $x = b \cdot a.$ $S = \{b \cdot a\}.$	$x : 3{,}5 = -2 \mid \cdot 3{,}5$ $x = -2 \cdot 3{,}5$ $x = -7$ și $S = \{-7\}$.
4. $a \cdot x + b = c;\ a, b \in \mathbb{Q}$	*Exemple*
a) Dacă $a = 0$, devine: $x \cdot 0 + b = c$. Are loc egalitatea doar dacă $b = c$ și obținem: $S = \varnothing$, dacă $b \neq c$ și $S = \mathbb{Q}$, dacă $b = c$.	**i)** $0 \cdot x + 3 = 5 \Leftrightarrow 0 \cdot x = -2$, imposibil și $S = \varnothing$. **ii)** $0 \cdot x + 3 = 5 - 2 \Leftrightarrow 0 \cdot x = 0$, adevărată, oricare ar fi $x \in \mathbb{Q}$ și $S = \mathbb{Q}$.
b) Dacă $a \neq 0$, $a \cdot x + b = c \mid -b$ $a \cdot x = c - b \mid : a$ $x = (c - b) : a.$ $S = \{(c - b) : a\}.$	$-1{,}2 \cdot x + 3 = 5 \mid -3$ $-1{,}2 \cdot x = -2 \mid : (-1{,}2)$ $x = -2 : \left(-\frac{12}{10}\right) \Leftrightarrow x = 2 : \frac{12}{10}$. Dar, $2 : \frac{12}{10} = 2 \cdot \frac{10^{(2}}{12} = \cancel{2}^{1} \cdot \frac{5}{\cancel{6}^{3}} = \frac{5}{3}$, deci $x = \frac{5}{3}$ și $S = \left\{\frac{5}{3}\right\}$.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

De multe ori, ecuațiile pe care trebuie să le rezolvăm pot fi aduse la una dintre formele de mai sus, folosind proprietățile operațiilor cu numere raționale.

Reținem!

Rezolvarea unei ecuații constă în:

1. aducerea ecuației la o formă cunoscută, prin prelucrarea acesteia pe baza proprietăților operațiilor cu numere raționale;
2. rezolvarea ecuației obținute folosind algoritmul cunoscut;
3. scrierea mulțimii soluțiilor în conformitate cu mulțimea în care se cere rezolvarea.

Exercițiu rezolvat

Rezolvați ecuația: $\frac{x}{2}+\frac{x-3}{7}=\frac{7-5x}{14}$.

Rezolvare. Întrucât nu se precizează mulțimea în care căutăm soluții, vom rezova ecuația în $\mathbb{Q}$.

$$\frac{x}{2}+\frac{x-3}{7}=\frac{7-5x}{14} \Leftrightarrow {}^{7)}\frac{x}{2}+{}^{2)}\frac{x-3}{7}=\frac{7-5x}{14} \Leftrightarrow \frac{7x}{14}+\frac{2x-6}{14}=\frac{7-5x}{14} \Leftrightarrow \frac{9x-6}{14}=\frac{7-5x}{14} \Leftrightarrow 9x-6=7-5x \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 9x+5x=7+6 \Leftrightarrow 14x = 13$ cu $x=\frac{13}{14}$; $S=\left\{\frac{13}{14}\right\}$.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Alegeți litera care indică ecuația a cărei soluție este numărul -3.

A. $x + 2{,}5 = 1{,}5$; **C.** $x+\frac{7}{2}=\frac{1}{2}$;

B. $x + (-2)^2 = -1$; **D.** $x + 3{,}(3) = 0{,}3$

2. Rezolvați ecuația $x+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$ și alegeți litera care indică mulțimea soluțiilor ecuației.

A. $S=\left\{-\frac{1}{6}\right\}$; **C.** $S=\left\{-\frac{1}{5}\right\}$;

B. $S=\left\{\frac{1}{6}\right\}$; **D.** $S=\left\{\frac{5}{6}\right\}$.

3. Se consideră ecuația $\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{4}=-0{,}25$.

Precizați, argumentat, dacă ecuația are soluție în mulțimea $A=\left\{-2;\ 0;\ \frac{1}{2}\right\}$.

4. Rezolvați în mulțimea numerelor raționale ecuațiile:

a) $x + 3{,}4 = -0{,}15$; **d)** $x + 3{,}(3) = 0{,}3$;

b) $3 \cdot x + 2 = -10$; **e)** $2{,}3 \cdot x - 4{,}6 = 6{,}9$;

c) $-5 \cdot x+\frac{2}{5}=5{,}4$; **f)** $x:\frac{5}{8}+4=-12$.

5. Rezolvați ecuația $9 - 2 \cdot x = 0$ în mulțimile:

a) $\mathbb{N}$; **b)** $\mathbb{Z}$; **c)** $\mathbb{Q}$.

6. **a)** Determinați numărul rațional a, știind că -2 este soluție a ecuației $a \cdot x + 5 = 8 - a$.

b) Determinați numărul rațional b, știind că numărul $-\frac{1}{2}$ este soluție a ecuației $\frac{2}{3}\cdot x+b=1+\frac{b}{3}$.

7. Rezolvați ecuațiile:

a) $4 \cdot x + 3 = -x + 18$;

b) $2 \cdot (x + 1) = -4 \cdot x + 2$;

c) $\frac{x}{4}+1=x-0{,}5$;

d) $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)\cdot x=-1$;

e) $\frac{x+1}{2}+\left|-\frac{3}{4}\right|=\frac{x}{8}$;

f) $3\cdot\left(x+\frac{1}{3}\right)=2\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)$;

g) $\frac{1}{2}\cdot\left[\left(\frac{1}{3}-x\right)+\frac{1}{4}\right]=\frac{1}{24}$;

h) $\frac{1}{9}\cdot\left[\left(\frac{1}{8}\cdot x-1\right)-1\right]=0$;

i) $\frac{0{,}9-x}{0{,}6}-\frac{3-x}{2}=\frac{x-2{,}7}{0{,}3}$;

j) $\left|x-\frac{3}{4}\right|=\frac{1}{8}$;

k) $\left|0{,}7-\frac{x-1}{5}\right|=0$;

l) $2+\left|\frac{x}{3}-1\right|=1$.

8. Determinați numărul natural $\overline{ab}$ pentru care are loc egalitatea: $\overline{ab}+\frac{\overline{ab}}{3}+\frac{\overline{ab}}{3^2}+\frac{\overline{ab}}{3^3}=120$.

Minitest

1. Alegeți varianta corectă de răspuns. Doar un răspuns este corect.

25 p **a)** Soluția ecuației $x - \frac{1}{3} = 2,(3) - \frac{3}{5} \cdot x$ este numărul:

A. $\frac{3}{5}$; **B.** $\frac{1}{3}$; **C.** $\frac{5}{3}$; D. $-\frac{5}{3}$.

25 p **b)** O ecuație echivalentă cu ecuația $\frac{x}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$ este:

A. $x - 5 = 0$; **B.** $1 + x = 0$; **C.** $1 - x = 0$; **D.** $x + 5 = 0$.

2. Rezolvați în mulțimea numerelor raționale ecuațiile:

4×10 p **a)** $x + 3,5 = 1,75$; **b)** $x : \frac{2-2^2}{5} = 1,(3) + 2$; **c)** $x \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = (-1,5)^2$; **d)** $\frac{7}{4} \cdot (x+1) = 7 - 3,5$.

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

L2 Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor

Multe dintre problemele întâlnite în practică au ca model matematic *ecuații*. Rezolvarea problemei presupune *rezolvarea ecuației* corespunzătoare, în mulțimea impusă de contextul în care are loc problema.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Atunci când problema poate fi reformulată printr-o *ecuație* cu soluții *în mulțimea dorită*, rezolvarea problemei presupune parcurgerea următorilor pași:

Pasul 1. *Stabilirea* necunoscutei, realizarea *notației*, scrierea în limbaj matematic a relațiilor între mărimile care apar; → ***Pasul 2.*** *Scrierea* ecuației; → ***Pasul 3.*** *Rezolvarea* ecuației; → ***Pasul 4.*** *Interpretarea* soluțiilor ecuației, ținând cont de *domeniul* în care căutăm soluțiile problemei → ***Pasul 5.*** *Formularea* concluziei.

Observație. Este util să verificăm soluția sau soluțiile obținute, pentru a corecta eventualele greșeli.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Problemă rezolvată

Părinții Soniei au aceeași vârstă (exprimată în ani). Vârsta Soniei este o cincime din vârsta mamei.
Peste doi ani, suma vârstelor celor trei membri ai familiei, va fi 94 de ani.
Determinați vârsta actuală a Soniei și vârsta actuală a mamei.

Rezolvare

Varianta I. Determinăm mai întâi vârsta Soniei. Necunoscuta va fi vârsta actuală a Soniei.	
Pasul 1. Fie x vârsta Soniei. Atunci, vârsta mamei este egală cu cea a tatălui și este $5 \cdot x$. Vârsta Soniei peste doi ani va fi $x + 2$, iar vârsta fiecăruia dintre părinți va fi $5 \cdot x + 2$.	***Pasul 2.*** $(x + 2) + 2 \cdot (5 \cdot x + 2) = 94$.

Pasul 3. $(x + 2) + 2 \cdot (5 \cdot x + 2) = 94 \Leftrightarrow x + 2 + 10 \cdot x + 4 = 94 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1 + 10) \cdot x + 6 = 94 \Leftrightarrow\ 11 \cdot x + 6 = 94 \quad |-6$

$11 \cdot x = 88 \quad |:11$

$x = 8.$

Pasul 4. Vârsta se exprimă prin numere naturale, 8 este număr natural și $5 \cdot 8 = 40$, este număr natural, deci problema are soluția unică.

Pasul 5. Sonia are 8 ani, iar mama are 40 de ani.

Varianta a II-a. Determinăm mai întâi vârsta mamei. Necunoscuta va fi vârsta actuală a mamei.

Pasul 1. Fie x vârsta mamei. Atunci, vârsta Soniei este $\frac{1}{5} \cdot x$, iar cea a tatălui este x. Peste doi ani, mama va avea $x + 2$ ani, ca și tata, iar Sonia va avea $\frac{1}{5} \cdot x + 2$ ani.

Pasul 2. $(x+2)+(x+2)+\frac{1}{5} \cdot x+2=94$

Pasul 3. $(x+2)+(x+2)+\frac{1}{5} \cdot x+2=94 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+2+x+2+\frac{1}{5} \cdot x+2=94 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(1+1+\frac{1}{5}\right) \cdot x+6=94 \Leftrightarrow \left({}^{5)}2+\frac{1}{5}\right) \cdot x+6=94 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{11}{5} \cdot x+6=94 \quad | -6$

$\frac{11}{5} \cdot x=88 \quad | : \frac{11}{5}$

$x = {}^{8}\cancel{88} \cdot \frac{5}{\cancel{11}_{1}} \Rightarrow x=40.$

Pasul 4. Vârsta se exprimă prin numere naturale, 40 este număr natural, $40 : 5 = 8$ este, de asemenea, număr natural, deci problema are soluție unică.

Pasul 5. Mama are 40 de ani, iar Sonia are 8 ani.

Observație. Alegerea necunoscutei poate fi diferită, obținând ecuații diferite, dar rezolvarea și interpretarea corectă a soluțiilor ecuațiilor asigură rezolvarea corectă a problemei.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Dublul numărului a este cu 1,2 mai mare decât $\frac{1}{2}$. Comparați numărul a cu numărul 0,85.

2. Determinați $r \in \mathbb{Q}$, știind că, dacă îl înmulțim cu $\frac{4}{5}$, obținem același rezultat ca atunci când scădem din el 10.

3. Ana și Maria au rezolvat, în total, în vacanța de vară, 72 de probleme de matematică. Știind că Maria a rezolvat cu 20% mai puține probleme decât Ana, determinați numărul de probleme rezolvate de fiecare dintre cele două eleve.

4. Calculați măsurile a două unghiuri complementare, pentru fiecare din situațiile:

a) Diferența măsurilor unghiurilor este 18°.

b) Raportul măsurilor unghiurilor este $\frac{7}{3}$.

5. Dintre locuitorii unui oraș, 32% sunt elevi, din care 1009 sunt preșcolari, 2018 sunt în învățământul primar și gimnazial, iar 1565 sunt liceeni.

a) Scrieți o ecuație care să folosească datele problemei.

b) Rezolvați ecuația de la subpunctul a) și determinați numărul locuitorilor acestui oraș.

6. Într-o clasă, sunt 24 de elevi, băieți și fete. Dacă ar mai veni 3 fete, atunci numărul băieților ar fi jumătate din numărul fetelor. Determinați numărul fetelor din această clasă.

7. Determinați numărul rațional x, știind că media aritmetică a numerelor 12, $9 + x$, 15 și $3 \cdot x$ este 16.

8. Lui Sergiu îi place să călătorească și să viziteze obiective istorice și culturale. Pleacă împreună cu prietenii săi într-o excursie. Își propun să parcurgă traseul în trei etape, astfel încât în fiecare etapă să parcurgă aceeași distanță. Datorită condițiilor meteorologice, nu reușesc să respecte planul. Ei parcurg în prima etapă doar jumătate din cât și-au propus, iar în a doua etapă cu 15 km mai puțin decât își propuseseră. Știind că până la destinație mai au 70,5 km, calculați lungimea totală a traseului.

9. Bogdan și-a dat seama că, în acest an școlar, n-a prea învățat la fizică. El face calcule pentru a vedea ce medie ar putea obține. Știe că are două note de 7, o notă de 6, un 9 și că mai poate lua o singură notă.

a) Determinați nota pe care ar trebui să o obțină la ultima evaluare, pentru ca media anuală să fie 8.

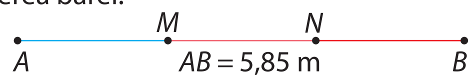
b) Decideți prin calcul dacă Bogdan poate obține la fizică media anuală 9.

10. Răspunzând la toate cele 100 de cerințe ale unui test, Ștefan a obținut 356 de puncte. Pentru fiecare răspuns corect, s-au acordat 5 puncte, iar pentru răspuns greșit s-au scăzut 3 puncte.

a) Precizați, argumentat, numărul răspunsurilor corecte date de Ștefan.

b) Calculați numărul minim de răspunsuri corecte pe care ar trebui să le dea un participant, pentru a obține la același test cel puțin 430 de puncte.

11. O bară cu lungimea 5,85 m este împărțită, prin tăiere, în trei părți având lungimile direct proporționale cu numerele 1,2; 1,3; respectiv 1,4. Calculați lungimea fiecărei bucăți obținute prin tăierea barei.



12. Ana are cu 30 lei mai puțin decât Dana. Dacă Ana ar avea o sumă de două ori mai mare decât acum, iar Dana ar avea o sumă de două ori mai mică decât acum, atunci cele două prietene ar avea sume egale de bani. Calculați suma de bani pe care o are fiecare.

13. Natalia planifică banii pe care îi are pentru o excursie astfel: 20% din sumă pentru transport, 55% pentru masă și cazare și restul de 450 de lei, pentru cadouri sau cheltuieli neprevăzute.

a) Calculați suma de bani pe care o are Natalia pentru excursie.

b) Calculați suma planificată pentru transport.

Minitest

40 p **1.** Un cablu cu lungimea 90 cm se taie în două părți, una având lungimea $\frac{2}{3}$ din lungimea celeilalte. Calculați cât măsoară fiecare parte din cablu.

2. Florin scrie un număr pe un cartonaș. Trei colegi ai lui scad pe rând, din acesta, numerele 2,3; 3,7, respectiv 7,2 și observă că adunând numerele obținute, rezultatul este chiar numărul scris de Florin pe cartonaș.

25 p **a)** Formați o ecuație cu datele din enunțul problemei.

25 p **b)** Determinați numărul scris de Florin pe cartonaș.

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

EVALUARE SUMATIVĂ

I. *Alegeți varianta corectă de răspuns. Doar un răspuns este corect.*

5 p **1.** Numărul rațional 1,75, scris ca fracție ordinară ireductibilă, este:

A. $\frac{7}{4}$ **B.** $\frac{17}{5}$; **C.** $\frac{7}{5}$; **D.** $\frac{11}{4}$.

5 p **2.** Opusul numărului $-1{,}5+0{,}25\cdot 5$ este:

A. 0; **B.** 0,25; **C.** –0,25; **D.** –0,5.

5 p **3.** Dacă $\left|a+\frac{3}{2}\right|=0$, atunci a este egal cu:

A. $\frac{1}{3}$; **B.** $\frac{3}{2}$; **C.** $-\frac{3}{2}$; **D.** $-\frac{2}{3}$.

5 p **4.** Numerele $-2{,}5$; $-\frac{11}{5}$; $-\frac{b}{10}$; $-\frac{4}{2}$ sunt scrise în ordine crescătoare atunci când numărul natural b este:

A. 24; **B.** 19; **C.** 23; **D.** 21.

5 p **5.** Numărul întreg n pentru care $n<-\frac{31}{10}<n+1$ este egal cu:

A. –2; **B.** –4; **C.** –3; **D.** –1.

5 p **6.** Rezultatul calculului $\left(-\frac{2}{5}\right)^5:\left(-\frac{2}{5}\right)^2$ este:

A. $-\frac{6}{15}$; **B.** $+\frac{8}{25}$; **C.** $-\frac{8}{125}$; **D.** $+\frac{8}{125}$.

II. *Scrieți rezolvările complete.*

1. Fie numerele $a=\left(-\frac{1}{5}\right)^{-1}$, $b=\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{8}{3}\right)-\left(5-\frac{5}{3}\right)$ și $c=24:(-32)-2{,}75$.

15 p **a)** Precizați dacă printre cele trei numere sunt numere raționale care nu sunt numere întregi.

5 p **b)** Arătați că numărul $d=\frac{a\cdot b\cdot c}{-7}$ este număr natural.

15 p **2.** Rezolvați ecuația: $\frac{x+2}{5}-\frac{3}{10}=-\frac{1}{2}$.

3. Adrian dorește să-și cumpere un telefon. Studiind ofertele constată că are doar jumătate din suma necesară. Andreea, sora lui Adrian, contribuie cu o treime din prețul telefonului, iar bunica lor îi dă restul de 150 lei. Notăm prețul telefonului cu p.

5 p **a)** Exprimați suma de bani cu care contribuie Adrian, în funcție de p.

5 p **b)** Exprimați suma de bani cu care contribuie Andreea, în funcție de p.

5 p **c)** Scrieți o ecuație cu necunoscuta p (prețul telefonului) care să corespundă datelor problemei.

10 p **d)** Rezolvați ecuația și determinați prețul telefonului pe care îl dorește Adrian.

Notă: Timp de lucru 50 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

5. NOȚIUNI GEOMETRICE FUNDAMENTALE

5.1. Unghiuri în plan

L1 Recapitulare și completări

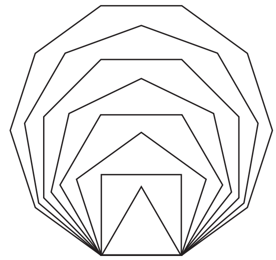
Competențe specifice: 1.5; 2.5; 3.5; 4.5; 5.5; 6.5

Ne amintim

Figura geometrică formată din *două semidrepte* care au *originea comună* se numește *unghi*.

Cele două semidrepte se numesc *laturile unghiului*, iar originea lor comună se numește *vârful unghiului*.

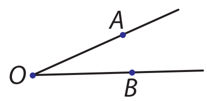
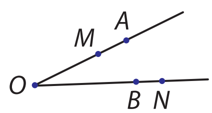
Identificați, în imaginea alăturată, cel puțin trei unghiuri de măsuri diferite, urmărind laturile și vârfurile acestora, împreună cu colegul/colega de bancă.



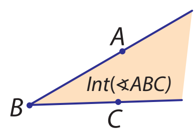
Folosiți raportorul pentru a măsura unghiurile identificate. Desenați pe caiete, cu ajutorul instrumentelor geometrice, unghiuri congruente cu acestea și precizați natura lor (ascuțite, drepte, obtuze).

Pentru a răspunde acestor solicitări, folosiți cunoștințele studiate în clasa a V-a, amintite și exemplificate mai jos.

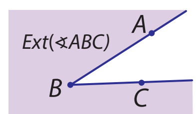
- Pentru unghiul determinat de semidreptele *OA* și *OB*, folosim una dintre notațiile: $\sphericalangle AOB$ sau $\widehat{AOB}$ sau $\sphericalangle BOA$ sau $\widehat{BOA}$.
- Dacă nu sunt reprezentate mai multe unghiuri cu vârful *O*, atunci se poate scrie și $\sphericalangle O$ sau $\widehat{O}$.
- Dacă punctul *M* este situat pe latura *OA*, iar punctul *N* este situat pe latura *OB*, atunci unghiul *AOB* este *identic* cu unghiul *MON*.

Desen	Notație
	$\sphericalangle AOB$ sau $\widehat{AOB}$ $\sphericalangle BOA$ sau $\widehat{BOA}$ $\sphericalangle O$ sau $\widehat{O}$
	$\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOA$, $\sphericalangle MON$, $\sphericalangle NOM$, $\sphericalangle MOB$, $\sphericalangle BOM$, $\sphericalangle AON$, $\sphericalangle NOA$ reprezintă același unghi

Interiorul unghiului *ABC* este format din toate punctele care se află atât în semiplanul delimitat de *AB* care conține punctul *C*, cât și în semiplanul delimitat de *BC* care conține punctul *A* (este format din punctele comune ale celor două semiplane).



Exteriorul unghiului este format din toate punctele care sunt situate în *cel mult unul* dintre semiplanele: cel delimitat de *AB* care conține punctul *C* și cel delimitat de *BC* care conține punctul *A*.



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Pentru a exprima *măsurile unghiurilor,* folosim *gradul sexagesimal* și submultiplii săi: *minutul* și *secunda*.
Gradul sexagesimal reprezintă un unghi a cărui deschidere este a 360-a parte dintr-un cerc.

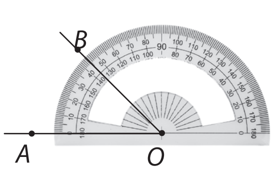
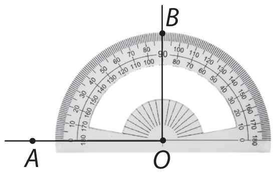
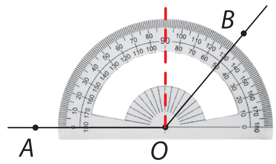
Minutul sexagesimal reprezintă a 60-a parte dintr-un grad, adică un unghi cu deschiderea egală cu a 21 600-a parte dintr-un cerc; $1° = 60'$, $360° = (360 \cdot 60)' = 21\,600'$.

Secunda sexagesimală reprezintă a 60-a parte dintr-un minut, deci a 3600-a parte dintr-un grad, adică un unghi cu deschiderea egală cu a 1 296 000-a parte dintr-un cerc; $1' = 60''$, $1° = 3600''$, $360° = (360 \cdot 3600)'' = 1\,296\,000''$.

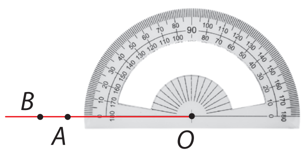
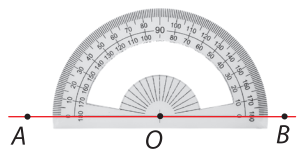
Observație. Măsura unui unghi se exprimă printr-un număr α de grade sexagesimale cu $0° \leq \alpha° \leq 180°$.

În funcție de *măsura unghiurilor*, acestea se pot grupa în: unghiuri *ascuțite*, unghiuri *drepte*, unghiuri *obtuze*, unghiuri *nule* și unghiuri *alungite*.

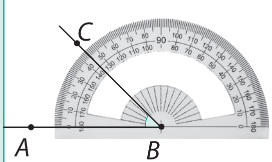
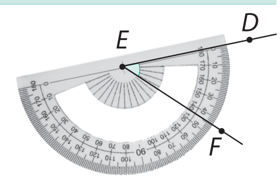
1. Dacă două unghiuri au ca laturi semidrepte situate pe *drepte diferite*, adică cele *trei puncte* cu ajutorul cărora numim unghiul sunt *necoliniare*, sunt posibile următoarele situații:

Unghi ascuțit	*Unghi drept*	*Unghi obtuz*
Un unghi cu măsura *mai mare* decât 0° și *mai mică* decât 90° se numește *unghi ascuțit*.	Un unghi cu măsura *egală* cu 90° se numește *unghi drept*.	Un unghi cu măsura *mai mare* decât 90° și mai mică decât 180° se numește *unghi obtuz*.
		
$0° < \sphericalangle AOB < 90°$	$\sphericalangle AOB = 90°$	$90° < \sphericalangle AOB < 180°$

2. Dacă laturile unui unghi sunt semidrepte ale aceleiași drepte, adică *punctele* care numesc unghiul *sunt coliniare*, sunt posibile *cazurile particulare*:

Un unghi cu măsura 0° se numește *unghi nul*. Laturile unghiului nul sunt *semidrepte identice*.	Un unghi cu măsura 180° se numește *unghi alungit*. Laturile unghiului alungit sunt *semidrepte opuse*.
	
$\sphericalangle AOB = 0°$	$\sphericalangle AOB = 180°$

Observație. **1.** Unghiurile ascuțite, unghiurile drepte și unghiurile obtuze se numesc *unghiuri proprii*.
2. Unghiul nul și unghiul alungit se numesc *unghiuri improprii*.

Două unghiuri, *ABC* și *DEF*, care *prin suprapunere coincid* se numesc *unghiuri congruente*.	
Două unghiuri *ABC* și *DEF* sunt congruente dacă și numai dacă au aceeași măsură. Matematic: Dacă $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DEF$, atunci $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEF$. Dacă $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEF$, atunci $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DEF$.	 

Reținem!

$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A$, oricare ar fi unghiul $\sphericalangle A$. (Orice unghi este congruent cu el însuși.)

Dacă $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$, atunci $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle A$.

Dacă $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$ și $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$, atunci $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Dacă se cunosc măsurile unghiurilor *A* și *B*, atunci se poate calcula suma măsurilor lor ($\sphericalangle A + \sphericalangle B$).

Model de redactare pentru suma măsurilor a două unghiuri:

Fie $\sphericalangle MNP = 57°56'20''$, $\sphericalangle QRS = 41°37'2''$. Atunci: $\sphericalangle MNP + \sphericalangle QRS = 57°56'20'' + 41°37'2'' = (57 + 41)° + (56 + 37)' + (20'' + 2'') = 98°93'22'' = 98° + (1 \cdot 60 + 33)'22'' = 98° + 1° + 33'\,22'' = 99°33'22''$.

Dacă $\sphericalangle B > \sphericalangle A$, atunci se poate calcula diferența dintre măsurile lor ($\sphericalangle B - \sphericalangle A$).

Model de redactare pentru diferența măsurilor a două unghiuri:

1. Fie $\sphericalangle MNP = 57°56'20''$, $\sphericalangle QRS = 41°37'2''$. Din $\sphericalangle MNP > \sphericalangle QRS$, rezultă că se poate calcula diferența $\sphericalangle MNP - \sphericalangle QRS = 57°56'20'' - 41°37'2'' = (57 - 41)° + (56 - 37)' + (20 - 2)'' = 16°19'18''$.

2. Fie $\sphericalangle MNP = 54°18'21''$, $\sphericalangle QRS = 42°37'35''$. Din $\sphericalangle MNP > \sphericalangle QRS$, rezultă că se poate calcula diferența $\sphericalangle MNP - \sphericalangle QRS = 54°18'21'' - 42°37'35'' = 53°77'81'' - 42°37'35'' = (53 - 42)° + (77 - 37)' + (81 - 35)'' = 11°40'46''$.

Dacă se cunoaște măsura unghiului A, atunci se poate calcula produsul $(\sphericalangle A) \cdot n$, unde n este număr natural nenul.

Model de redactare: Fie $\sphericalangle MPQ = 33°45'12''$. Atunci, $(\sphericalangle MPQ) \cdot 5 = (33°45'12'') \cdot 5 = 33° \cdot 5 + 45' \cdot 5 + 12'' \cdot 5 =$ $= 165°225'60'' = 165° + (3 \cdot 60 + 45)' + 60'' = (165 + 3)° + (45 + 1)'$, deci $(\sphericalangle MPQ) \cdot 5 = 168°46'$.

Dacă se cunoaște măsura unghiului A, atunci se poate calcula $(\sphericalangle A) : n$, unde n este număr natural nenul.

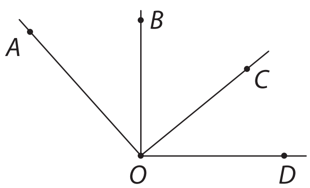
Model de redactare: Dacă $\sphericalangle MPQ = 122°43'$, atunci

$(\sphericalangle MPQ) : 5 = (122°43') : 5 = [(24 \cdot 5 + 2)° + (43)'] : 5 = [(24 \cdot 5)° + (2 \cdot 60 + 43)'] : 5 = [(24 \cdot 5)° + (32 \cdot 5 + 3)'] : 5 =$
$= [(24 \cdot 5)° + (32 \cdot 5)' + (3 \cdot 60)''] : 5 = [(24 \cdot 5)° + (32 \cdot 5)' + (36 \cdot 5)''] : 5 = 24° + 32' + 36'' = 24°32'36''$,
adică $(\sphericalangle MPQ) : 5 = 24°32'36''$.

Observație. La ultima etapă, dacă numărul secundelor nu este divizibil la împărțitor, atunci rezultatul împărțirii secundelor se rotunjește.

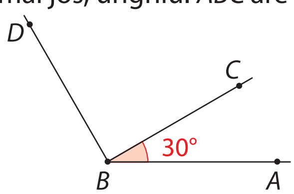
Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. **a)** Scrieți unghiurile identificate în figura alăturată.
b) Precizați elementele (laturile și vârful) fiecărui unghi de la subpunctul a).



2. Folosind instrumentele geometrice, reprezentați:
a) un unghi nul; **d)** un unghi obtuz;
b) un unghi ascuțit; **e)** un unghi alungit;
c) un unghi drept; **f)** două unghiuri congruente.

3. În figura de mai jos, unghiul ABC are măsura 30°.



a) Realizați desenul pe caiet, știind că $\sphericalangle CBD = 90°$. Determinați, cu ajutorul raportorului, măsura unghiului ABD.
b) Comparați măsura unghiul ABD cu suma măsurior unghiurilor CBD și CBA.

4. Desenați, cu ajutorul instrumentelor geometrice, unghiul ABC cu măsura 23°. Copiați pe caiete și completați spațiile libere astfel încât să obțineți afirmații adevărate.
a) Punctul B este ... unghiului ABC.
b) Semidreptele ... și ... sunt laturile unghiului ABC.
c) Măsura unghiului ABC, exprimată în minute, este ... '.

5. Desenați semidreptele OA, OB, OC astfel încât $\sphericalangle AOB = 47°$, $\sphericalangle BOC = 43°$. Determinați, cu ajutorul raportorului, măsura unghiului AOC.
Analizați fiecare caz posibil.

6. Semidreptele OA și OB sunt opuse, punctele M, N sunt situate de aceeași parte a dreptei AB și unghiurile AOM, MON, NOB sunt congruente.
a) Realizați un desen care să corespundă datelor problemei.
b) Verificați, prin măsurare cu ajutorul raportorului, dacă $\sphericalangle AON \equiv \sphericalangle BOM$.
c) Determinați, cu ajutorul raportorului, măsurile unghiurilor AOM și BOM.

L2 Unghiuri suplementare. Unghiuri complementare

Ne amintim

Un unghi cu măsura egală cu 90° se numește *unghi drept*.

Un unghi cu măsura de 180° se numește *unghi alungit*.

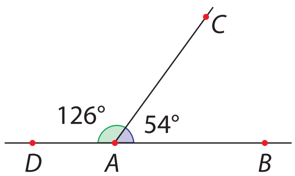
Un unghi cu măsura egală cu 0° se numește *unghi nul*.

Identificați unghiuri în imaginea alăturată. Folosind experiența personală, intuiți două unghiuri drepte, două unghiuri nule și două unghiuri alungite.

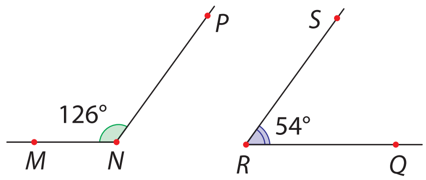
Folosim notația $\sphericalangle ABC$ atât pentru a numi *unghiul ABC*, cât și pentru *măsura unghiului ABC*.

Rezolvăm și observăm

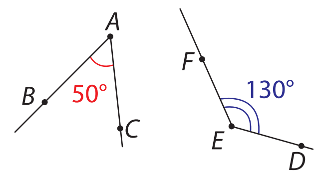
1. În imaginile de mai jos, sunt reprezentate perechi de unghiuri.
Observați *măsurile unghiurilor* marcate și efectuați *suma acestora*, pentru fiecare configurație.



$\sphericalangle BAC = 54^\circ$, $\sphericalangle DAC = 126^\circ$,
$\boldsymbol{\sphericalangle BAC + \sphericalangle DAC = 180^\circ}$.

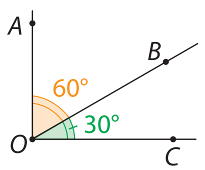


$\sphericalangle MNP = 126^\circ$, $\sphericalangle QRS = 54^\circ$,
$\boldsymbol{\sphericalangle MNP + \sphericalangle QRS = 180^\circ}$.

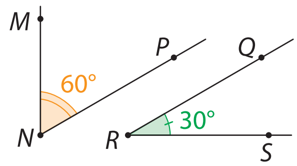


$\sphericalangle BAC = 50^\circ$, $\sphericalangle DEF = 130^\circ$,
$\boldsymbol{\sphericalangle BAC + \sphericalangle DEF = 180^\circ}$.

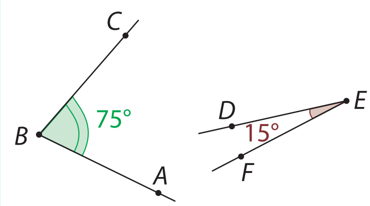
2. În imaginile de mai jos, sunt reprezentate perechi de unghiuri. Observați *măsurile unghiurilor* marcate și efectuați *suma acestora*, pentru fiecare configurație.



$\sphericalangle BOA = 60^\circ$, $\sphericalangle COB = 30^\circ$,
$\boldsymbol{\sphericalangle BOA + \sphericalangle COB = 90^\circ}$.



$\sphericalangle MNP = 60^\circ$, $\sphericalangle QRS = 30^\circ$,
$\boldsymbol{\sphericalangle MNP + \sphericalangle QRS = 90^\circ}$.



$\sphericalangle CBA = 75^\circ$, $\sphericalangle DEF = 15^\circ$,
$\boldsymbol{\sphericalangle CBA + \sphericalangle DEF = 90^\circ}$.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

1. Două unghiuri se numesc *unghiuri suplementare* dacă suma măsurilor lor este 180°.

Dacă unghiurile *A* și *B* sunt suplementare, atunci $\sphericalangle A$ se numește *suplementul unghiului B*, iar $\sphericalangle B$ se numește *suplementul unghiului A*.

Dacă $\sphericalangle A = 100^\circ$ și $\sphericalangle B = 80^\circ$, atunci $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180^\circ$, deci $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle B$ sunt suplementare.

Unghiul de 100° este suplementul unghiului de 80°.

Unghiul de 80° este suplementul unghiului de 100°.

2. Două unghiuri se numesc *unghiuri complementare* dacă suma măsurilor lor este 90°.	Dacă $\sphericalangle A = 40°15'$ și $\sphericalangle B = 49°45'$, atunci $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 90°$, deci $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle B$ sunt complementare.
Dacă unghiurile A și B sunt complementare, atunci $\sphericalangle A$ se numește *complementul unghiului B*, iar $\sphericalangle B$ se numește *complementul unghiului A*.	Unghiul de $40°15'$ este *complementul* unghiului de $49°45'$. Unghiul de $49°45'$ este *complementul* unghiului de $40°15'$.

Observații.

1. Dacă unghiurile M și N sunt *suplementare* și $\sphericalangle M = a^\circ$, cu $0 \leq a \leq 180$, atunci $\sphericalangle N = 180^\circ - a^\circ$.

2. Dacă unghiurile M și N sunt *complementare* și $\sphericalangle M = b^\circ$, cu $0 \leq b \leq 90$, atunci $\sphericalangle N = 90^\circ - b^\circ$.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicația 1.

a) Dacă două unghiuri sunt congruente, atunci suplementele lor sunt congruente.

b) Dacă două unghiuri au suplementele congruente, atunci unghiurile sunt congruente.

Rezolvare.

a) Fie $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$. Atunci, unghiurile A și B au aceeași măsură, adică $\sphericalangle A = \sphericalangle B = a°$, cu $0 \leq a \leq 180$.
Suplementul unghiului A are măsura $180° - a$ °Ca și suplementul unghiului B. Scriem: Dacă $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$, atunci $180° - \sphericalangle A = 180° - \sphericalangle B$.

b) În același fel, din $180° - \sphericalangle A = 180° - \sphericalangle B$, rezultă $\sphericalangle A = \sphericalangle B$, deci $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$.

Aplicația 2.

a) Dacă două unghiuri cu măsura de cel mult 90° sunt congruente, atunci complementele lor sunt congruente.

b) Dacă două unghiuri au complementele congruente, atunci unghiurile sunt congruente.

Rezolvare.

a) Fie $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$. Atunci, unghiurile A și B au aceeași măsură, adică $\sphericalangle A = \sphericalangle B = b°$, cu $0 \leq b \leq 90$. Complementul unghiului A are măsura $90° - b°$, ca și complementul unghiului B.
Scriem: Dacă $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$, atunci $90° - \sphericalangle A = 90° - \sphericalangle B$.

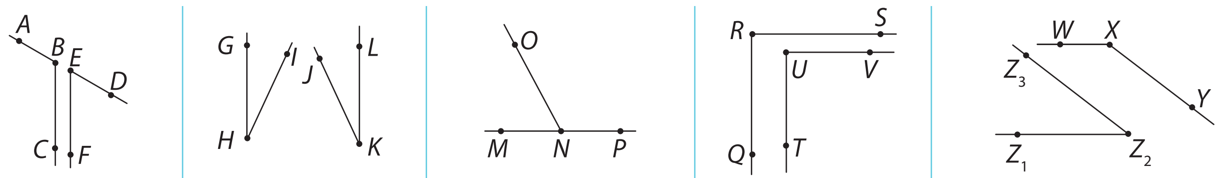
b) În același fel, din $90° - \sphericalangle A = 90° - \sphericalangle B$, rezultă $\sphericalangle A = \sphericalangle B$, deci $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$.

Reținem!

Pentru a deduce că *două unghiuri sunt congruente*, este suficient să demonstrăm că unghiurile au *același suplement* sau că au *același complement*.

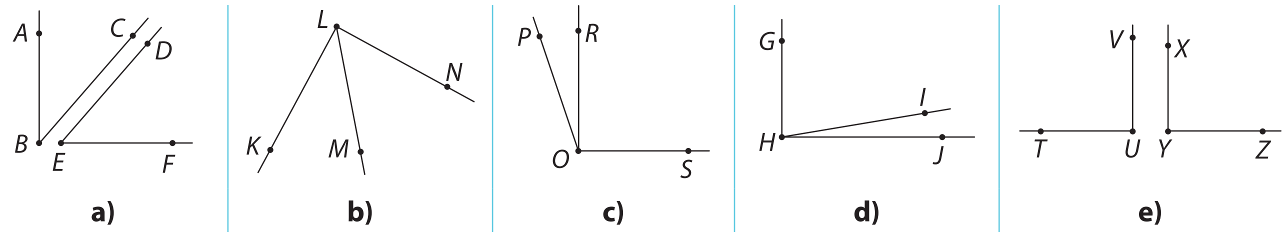
Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Măsurați cu raportorul unghiurile din fiecare configurație și stabiliți, argumentat, în care dintre aceste configurații identificați perechi de unghiuri suplementare.



a) b) c) d) e)

2. Măsurați cu raportorul unghiurile din fiecare configurație și stabiliți, argumentat, în care dintre acestea identificați perechi de unghiuri complementare.



3. Un unghi are măsura de 67°. Calculați:
   a) măsura complementului său;
   b) măsura suplementului său.

4. Se consideră unghiurile $\sphericalangle A = 40^\circ$, $\sphericalangle B = 60^\circ$, $\sphericalangle C = 54^\circ$, $\sphericalangle D = 30^\circ$, $\sphericalangle E = 50^\circ$, $\sphericalangle F = 26^\circ$.
   Scrieți perechile de unghiuri complementare, justificând răspunsul dat.

5. Se consideră unghiurile $\sphericalangle M = 140^\circ$, $\sphericalangle N = 55^\circ$, $\sphericalangle P = 100^\circ 30'$, $\sphericalangle Q = 40^\circ$, $\sphericalangle R = 125^\circ$, $\sphericalangle S = 79^\circ 30'$.
   Scrieți perechile de unghiuri suplementare, justificând răspunsul dat.

6. Copiați pe caiete și completați tabelul după modelul dat.

Măsura unghiului	Măsura complementului	Măsura suplementului	Justificare
27°	63°	153°	$90^\circ - 27^\circ = 63^\circ$; $180^\circ - 27^\circ = 153^\circ$.
$80^\circ 20'$			
103°			
	55°		
		101°	
90°			

7. Demonstrați că:
   a) Dacă două unghiuri proprii sunt complementare, atunci cele două unghiuri sunt ascuțite.
   b) Dacă două unghiuri proprii sunt suplementare, atunci unul dintre unghiuri este obtuz sau drept.

8. Diferența măsurilor a două unghiuri complementare este 34°. Calculați măsurile celor două unghiuri.

9. Diferența măsurilor a două unghiuri suplementare este 72°. Calculați măsurile celor două unghiuri.

Minitest

Copiați pe caiete și completați spațiile libere astfel încât să obțineți propoziții adevărate.

20 p 1. Dacă două unghiuri sunt congruente și complementare, atunci fiecare are măsura … °.

20 p 2. Dacă două unghiuri sunt congruente și suplementare, atunci fiecare are măsura … °.

20 p 3. Unghiurile *A* și *B* sunt complementare, iar $\sphericalangle A = 72^\circ$. Măsura unghiului *B* este … °.

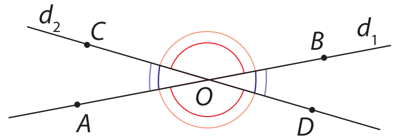
30 p 4. Unghiurile *C* și *D* sunt suplementare, iar măsura unghiului *C* este cu 20° mai mare decât măsura unghiului *D*. Atunci $\sphericalangle C = \ldots^\circ$ și $\sphericalangle D = \ldots^\circ$.

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

L3 Unghiuri opuse la vârf. Unghiuri formate în jurul unui punct

Rezolvăm și observăm

Aplicația practică 1



Desenați dreptele diferite d_1 și d_2 care se intersectează în punctul O.
Reprezentați pe dreapta d_1 punctele A și B astfel încât O să se găsească pe segmentul AB, apoi reprezentați pe dreapta d_2 punctele C și D astfel încât O să fie un punct al segmentului CD.

a) Precizați, argumentat, măsura unghiului AOB și măsura unghiului COD.

b) Verificați, prin măsurare, dacă unghiurile AOC și BOD sunt congruente.

c) Verificați, prin măsurare, dacă unghiurile COB și DOA sunt congruente.

Soluție. **a)** Laturile unghiului AOB sunt *semidrepte opuse*, deci $\sphericalangle AOB$ este unghi alungit. Laturile unghiului COD sunt *semidrepte opuse*, deci $\sphericalangle COD$ este unghi alungit. Atunci, $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD = 180^\circ$.

b) În desenul nostru, $\sphericalangle AOC = \sphericalangle BOD = 30^\circ$.

c) În desenul nostru, $\sphericalangle COB = \sphericalangle DOA = 150^\circ$.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

În aplicația de mai sus:

1. Semidreptele ***OA*** și ***OB*** sunt opuse; semidreptele ***OC*** și ***OD*** sunt opuse.

2. Laturile unghiului *AOC* sunt semidreptele ***OA*** și ***OC***, iar laturile unghiului *BOD* sunt semidreptele ***OB*** și ***OD***.

Reformulări: **R_1**: Unghiurile *AOC* și *BOD* au ca laturi perechi de semidrepte opuse.
R_2: Unghiurile *AOC* și *BOD* au laturile în prelungire.

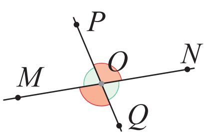
3. Laturile unghiului *AOD* sunt semidreptele ***OA*** și ***OD***, iar laturile unghiului *BOC* sunt semidreptele ***OB*** și ***OC***.

Reformulări: **R_1**: Unghiurile *AOD* și *BOC* au ca laturi perechi de semidrepte opuse.
R_2: Unghiurile *AOD* și *BOC* au laturile în prelungire.

Reținem!

Două unghiuri se numesc *unghiuri opuse la vârf* dacă laturile lor sunt *perechi de semidrepte opuse.*

Orice două drepte concurente determină *două perechi de unghiuri opuse la vârf.*



Semidreptele OP și OQ sunt *semidrepte opuse*.
Semidreptele OM și ON sunt *semidrepte opuse*.
$\sphericalangle POM$ și $\sphericalangle QON$ sunt opuse la vârf.
$\sphericalangle QOM$ și $\sphericalangle PON$ sunt opuse la vârf.

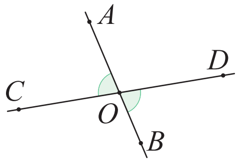
În *Aplicația practică*, am aflat, prin măsurare, că *unghiurile opuse la vârf sunt congruente*.
Vom *demonstra* această proprietate, pentru *oricare două unghiuri opuse la vârf*, prin *raționament*.
Raționamentul este esențial în matematică. Prin diferite tipuri de raționament, se identifică și se demonstrează unele proprietăți cu caracter general ale figurilor geometrice, măsurarea nefiind suficientă.

Dicționar

Raționament = tehnică prin care, prin conexiuni ale unor informații cunoscute, se obțin rezultate noi.

Aplicația 1.

Dacă două unghiuri sunt *opuse la vârf*, atunci acestea *sunt congruente*.



Demonstrație. Unghiurile AOC și BOD sunt unghiuri opuse la vârf cu semidreptele OA și OB opuse, deci $\sphericalangle AOB$ este alungit.

În același mod, $\sphericalangle COD$ este unghi alungit.

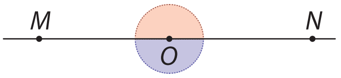
Deducem că $\sphericalangle AOD$ este suplementar atât cu $\sphericalangle AOC$, cât și cu $\sphericalangle BOD$, adică $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle BOD$ au *același suplement*, prin urmare, $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$.

În același mod, $\sphericalangle AOD$ și $\sphericalangle BOC$ sunt opuse la vârf și au suplementul comun $\sphericalangle AOC$, deci $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle BOC$.

Aplicație practică.

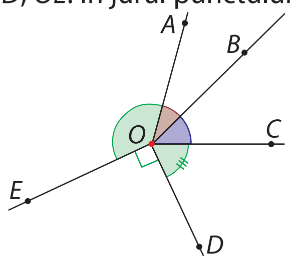
1. **a)** Desenați dreapta MN și reprezentați punctul O pe segmentul MN.
   b) Precizați, argumentat, măsura fiecăruia dintre unghiurile MON, care se formează de o parte și de alta a dreptei MN.
   c) Calculați suma *măsurilor* celor două *unghiuri cu vârful în punctul O, formate de o parte și de alta a dreptei MN*.

Soluție.



b) Cele două unghiuri MON sunt alungite, deci fiecare are măsura de 180°.
c) Suma măsurilor celor două unghiuri este 360°.

2. În figura alăturată, punctul O este *originea comună* a semidreptelor OA, OB, OC, OD, OE. În jurul punctului O, se formează, în acest fel, $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$, $\sphericalangle DOE$, $\sphericalangle EOA$, cu interioarele *disjuncte*. *Fiecare punct al planului* este situat sau în *interiorul unui unghi* sau *pe una din laturile* unuia dintre ele.



   a) Măsurați, cu ajutorul raportorului, cele cinci unghiuri marcate.
   b) Calculați suma măsurilor unghiurilor: AOB, BOC, COD, DOE, EOA.

Soluție. În desenul nostru:

a) $\sphericalangle AOB = 30^\circ$; $\sphericalangle BOC = 45^\circ$; $\sphericalangle COD = 65^\circ$; $\sphericalangle DOE = 90^\circ$; $\sphericalangle EOA = 130^\circ$.
b) $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD + \sphericalangle DOE + \sphericalangle EOA = 30^\circ + 45^\circ + 65^\circ + 90^\circ + 130^\circ = 360^\circ$.

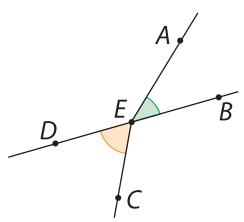
Reținem!

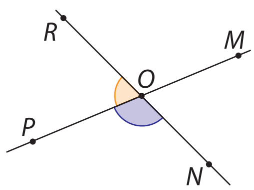
Trei sau mai multe unghiuri se numesc *unghiuri în jurul unui punct* dacă au *vârful comun*, au *interioarele disjuncte* și fiecare *punct al planului* este situat sau în *interiorul unuia dintre unghiuri* sau *pe una dintre semidrepte*.

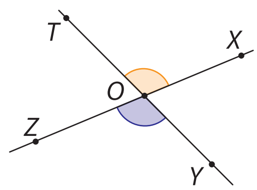
Teoremă: Suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct este 360°.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicația 1. Observați configurațiile de mai jos și stabiliți, argumentat, dacă unghiurile marcate sunt opuse la vârf.







Rezolvare.

Punctele A, E și C nu sunt coliniare, deci semidreptele EA și EC nu sunt semidrepte opuse.

Concluzie: $\sphericalangle CED$ și $\sphericalangle AEB$ nu sunt unghiuri opuse la vârf.

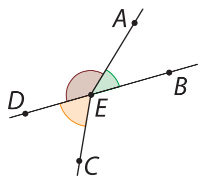
$\sphericalangle POR$ și $\sphericalangle PON$ au o latură comună, deci nu au ambele laturi perechi de semidrepte opuse.

Concluzie: $\sphericalangle POR$ și $\sphericalangle PON$ nu sunt unghiuri opuse la vârf.

Laturile unghiului XOT sunt semidreptele OX și OT. Laturile unghiului YOZ sunt semidreptele OZ (opusă semidreptei OX) și OY (opusă semidreptei OT).

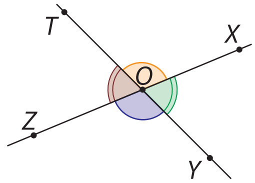
Concluzie: $\sphericalangle XOT$ și $\sphericalangle ZOY$ sunt unghiuri opuse la vârf.

Aplicația 2. Observați configurațiile de mai jos și stabiliți, argumentat, dacă unghiurile marcate sunt unghiuri în jurul unui punct.



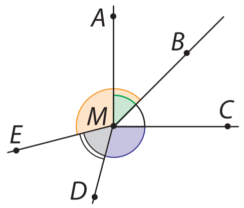
Sunt marcate unghiurile AEB, CED și DEA. Acestea au *vârful comun* și *interioarele disjuncte*, dar există puncte ale planului care nu aparțin nici interiorului unuia dintre cele trei unghiuri și nici uneia dintre laturi.

Concluzie: $\sphericalangle AEB$, $\sphericalangle CED$ și $\sphericalangle DEA$ *nu sunt* unghiuri în jurul punctului E.



Sunt marcate unghiurile XOY, YOZ, ZOT și TOX. Acestea au *vârful comun*, au *interioarele disjuncte*, și fiecare punct din plan *aparține interiorului* unuia dintre cele patru unghiuri sau *uneia dintre semidrepte*.

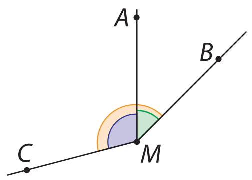
Concluzie: $\sphericalangle XOY$, $\sphericalangle YOZ$, $\sphericalangle ZOT$ și $\sphericalangle TOX$ *sunt* unghiuri în jurul punctului O.



Sunt marcate unghiurile AMB, BMC, CMD, DME și EMB.

Interioarele unghiurilor AMB și EMB nu sunt disjuncte ($\text{Int}\sphericalangle AMB \subset \text{Int}\sphericalangle EMB$).

Concluzie: $\sphericalangle AMB$, $\sphericalangle BMC$, $\sphericalangle CMD$, $\sphericalangle DME$ și $\sphericalangle EMB$ *nu sunt* unghiuri în jurul punctului M.



Sunt marcate unghiurile AMB, AMC și BMC.

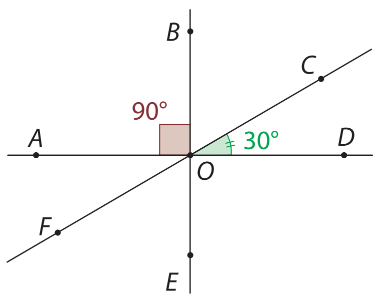
Interioarele unghiurilor AMB și BMC nu sunt disjuncte. Interioarele unghiurilor AMC și BMC nu sunt disjuncte.

($\text{Int}\sphericalangle AMB \subset \text{Int}\sphericalangle BMC$ și $\text{Int}\sphericalangle AMC \subset \text{Int}\sphericalangle BMC$.)

Există puncte ale planului care nu aparțin nici interiorului unuia dintre cele trei unghiuri și nici uneia dintre laturi.

Concluzie: $\sphericalangle AMB$, $\sphericalangle BMC$, $\sphericalangle AMC$ *nu sunt* unghiuri în jurul punctului M.

Problemă rezolvată. Dreptele AD, BE și CF se intersectează în punctul O. Știind că $\sphericalangle COD = 30^\circ$ și $\sphericalangle AOB = 90^\circ$, determinați măsurile unghiurilor FOA, DOE, BOC, EOF.



Soluție. $\sphericalangle COD$ și $\sphericalangle FOA$ sunt opuse la vârf, deci $\sphericalangle COD \equiv \sphericalangle FOA$, de unde $\sphericalangle FOA = 30^\circ$.

Pe de altă parte, $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle DOE$ sunt opuse la vârf, deci $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle DOE$, de unde $\sphericalangle DOE = 90^\circ$.

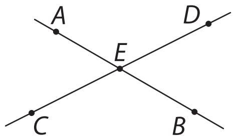
$\sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle EOF$ sunt opuse la vârf, deci $\sphericalangle BOC \equiv \sphericalangle EOF$.

Fie $x = \sphericalangle BOC = \sphericalangle EOF$. Cum suma măsurilor unghiurilor formate în jurul unui punct este 360°, rezultă că $2 \cdot x + 2 \cdot 30^\circ + 2 \cdot 90^\circ = 360^\circ$.

Obținem $2 \cdot x + 240^\circ = 360^\circ$. Folosind metoda mersului invers, deducem $x = 60^\circ$, adică $\sphericalangle BOC = \sphericalangle EOF = 60^\circ$.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. În desenul alăturat, dreptele AB și CD sunt concurente în punctul E.



Identificați și numiți perechile de unghiuri opuse la vârf reprezentate în configurație, justificând răspunsul dat.

2. Construiți cu ajutorul instrumentelor geometrice:

a) unghiurile ABC și DBE opuse la vârf;

b) unghiurile FGH și IGJ opuse la vârf, cu $\sphericalangle FGH = 60^\circ$;

c) unghiurile MON și POQ opuse la vârf și suplementare.

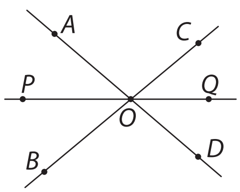
3. Desenați unghiurile opuse la vârf AOB și COD.

a) Dacă $\sphericalangle AOB = 100^\circ$, calculați măsura unghiului COD.

b) Dacă $\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD = 170^\circ$, calculați măsura unghiului AOB.

c) Dacă $\sphericalangle AOB = 2 \cdot \sphericalangle BOC$, calculați măsura $\sphericalangle AOD$.

4. În imaginea alăturată, sunt reprezentate perechile de semidrepte opuse OA, OD, respectiv OB, OC, și punctele coliniare P, O, Q.

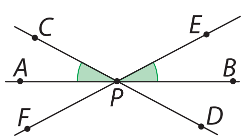


a) Demonstrați că unghiurile AOP *și* DOQ sunt opuse la vârf.

b) Dacă $\sphericalangle BOP = 33^\circ$, calculați $\sphericalangle COQ$.

c) Dacă $\sphericalangle AOP \equiv \sphericalangle BOP$ și $\sphericalangle DOQ = 40^\circ$, calculați $\sphericalangle COQ$.

5. În desenul următor, dreptele AB, CD și EF sunt concurente în punctul P, $\sphericalangle APC = \sphericalangle BPE = 28^\circ$.



a) Calculați măsurile unghiurilor APF, BPD.

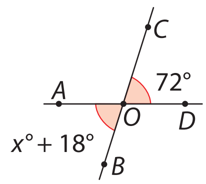
b) Folosind suma măsurilor unghiurilor formate în jurul unui punct, calculați $\sphericalangle CPE + \sphericalangle DPF$.

c) Calculați măsurile unghiurilor CPE, DPF.

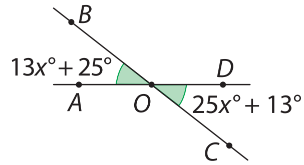
6. Unghiurile AOB și COD sunt opuse la vârf și complementare, $O \in AC$. Calculați măsurile unghiurilor AOB și BOC.

7. Folosind datele și notațiile din configurațiile următoare, calculați numărul x și măsura $\sphericalangle AOB$ știind că O este intersecția dreptelor AD și BC.

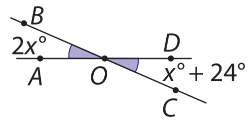
a)



b)



c)



8. Calculați măsurile unghiurilor formate de două drepte concurente în jurul punctului comun, știind că diferența măsurilor a două dintre ele este 56°.

9. Cinci unghiuri în jurul unui punct au aceeași măsură.

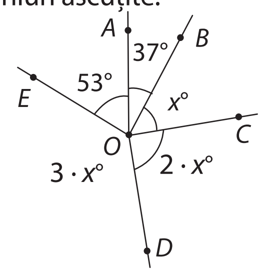
a) Determinați măsura fiecărui unghi.

b) Realizați un desen care să corespundă datelor problemei.

10. Se consideră patru unghiuri în jurul unui punct, având măsurile exprimate, în grade sexagesimale, prin numere naturale impare consecutive. Determinați măsurile acestor unghiuri și precizați câte dintre acestea sunt unghiuri ascuțite.

11. În figura alăturată:

$\sphericalangle AOB = 37^\circ$, $\sphericalangle BOC = x^\circ$,
$\sphericalangle COD = 2 \cdot x^\circ$,
$\sphericalangle DOE = 3 \cdot x^\circ$ și
$\sphericalangle EOA = 53^\circ$.



a) Determinați numărul x și măsurile unghiurilor BOC, COD, DOE.

b) Demonstrați că printre cele cinci unghiuri există cel puțin o pereche de unghiuri suplementare.

12. Se consideră n unghiuri în jurul punctului M, unele cu măsura de 30°, altele cu măsura de 70°.

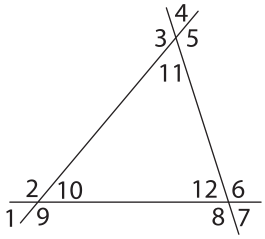
a) Determinați numărul natural n.

b) Realizați un desen care să corespundă datelor problemei.

c) Dovediți că, oricum am desena aceste unghiuri, printre laturile lor nu există două semidrepte opuse.

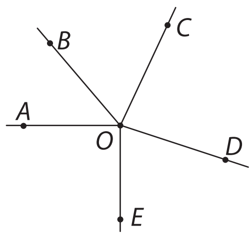
Minitest

45 p **1.** Observați configurația următoare, copiați tabelul pe caiete și completați în casetele libere litera ***A***, dacă afirmația este adevărată, și litera ***F***, dacă afirmația este falsă.



Propoziția	***A/F***
a) $\sphericalangle 1$ este opus la vârf cu $\sphericalangle 10$.	
b) $\sphericalangle 3$ este opus la vârf cu $\sphericalangle 11$.	
c) Unghiurile 12 și 7 sunt opuse la vârf.	
d) Dacă $\sphericalangle 2 = 130°$, atunci $\sphericalangle 9 = 50°$.	
e) Dacă $\sphericalangle 6 + \sphericalangle 8 = 116°$, atunci $\sphericalangle 7 = 121°$.	
f) $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 9 + \sphericalangle 10 = 360°$.	

45 p **2.** Observați configurația următoare, copiați tabelul pe caiete și completați în caseta liberă litera ***A***, dacă afirmația este adevărată, și litera ***F***, dacă afirmația este falsă.



Propoziția	***A/F***
a) Unghiurile *AOB*, *BOC*, *COD*, *DOE*, *EOA* sunt unghiuri în jurul punctului *O*.	
b) Unghiurile *AOB*, *BOC*, *COD*, *DOE* sunt unghiuri în jurul punctului *O*.	
c) Unghiurile *AOB*, *BOC*, *COD* și *AOD* sunt unghiuri în jurul punctului *O*.	
d) Unghiurile *AOB*, *BOC*, *COA* nu sunt unghiuri în jurul punctului *O*.	
e) Unghiurile *AOE*, *EOC*, *COA* sunt unghiuri în jurul punctului *O*.	

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

L4 Unghiuri adiacente

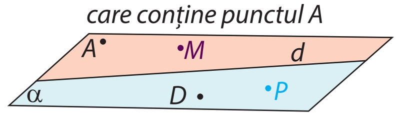
Ne amintim

SEMIPLANUL

Punctele *M* din plan situate de aceeași parte a dreptei *d* ca și punctul *A* formează *semiplanul mărginit de dreapta d care conține punctul A*.
Punctele *P* din plan situate de aceeași parte a dreptei *d* ca și punctul *D* formează *semiplanul mărginit de dreapta d care conține punctul D*.

Observație. Semiplanele delimitate de dreapta *d* sunt disjuncte (nu au niciun punct comun).

Semiplanul mărginit de d, care conține punctul A



Semiplanul mărginit de d, care conține punctul D

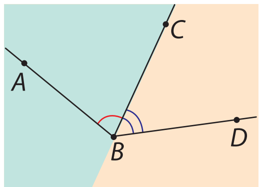
Un unghi *nenul* și *nealungit* se numește *unghi propriu*. Unghiul *nul* și unghiul *alungit* sunt unghiuri *improprii*.

Rezolvăm și observăm

1. a) Scrieți elementele comune ale unghiurilor *ABC* și *DBC*.

b) Stabiliți dacă interioarele unghiurilor *ABC* și *CBD* au puncte comune.

Soluție.



a) Punctul *B* este vârf și pentru $\sphericalangle ABC$ și pentru $\sphericalangle DBC$, deci *B* este *vârf comun* al acestora.

Semidreapta *BC* este latură atât pentru $\sphericalangle ABC$, cât și pentru $\sphericalangle DBC$, deci este *latură comună*.

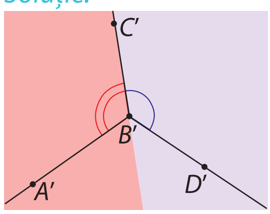
b) Interioarele unghiurilor *ABC* și *DBC* sunt incluse în semiplane opuse, deci *nu au puncte comune*.

Vom spune că $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle DBC$ sunt *unghiuri adiacente*.

2. a) Scrieți elementele comune ale unghiurilor $A'B'C'$ și $C'B'D'$.

b) Stabiliți dacă interioarele unghiurilor $A'B'C'$ și $C'B'D'$ au puncte comune.

Soluție.



a) Punctul B' este vârf și pentru $\sphericalangle A'B'C'$ și pentru $\sphericalangle D'B'C'$, deci B' este *vârf comun* al acestora.

Semidreapta $B'C'$ este latură atât pentru $\sphericalangle A'B'C'$, cât și pentru $\sphericalangle D'B'C'$, deci $B'C'$ este *latură comună*.

b) Interioarele unghiurilor $A'B'C'$ și $D'B'C'$ sunt incluse în semiplane opuse, deci *nu au puncte comune*.

Vom spune că $\sphericalangle A'B'C'$ și $\sphericalangle D'B'C'$ sunt *unghiuri adiacente*.

Reținem!

Două unghiuri proprii se numesc *unghiuri adiacente* dacă au *vârful comun*, au *o latură comună* și *interioarele* lor sunt *disjuncte*.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

În cele două cazuri de *unghiuri adiacente* din problemele de mai sus, observăm:

1. Semidreapta *BC*, *latură comună* a unghiurilor adiacente *ABC* și *CBD*, este *inclusă în interiorul* unghiului *ABD*.

2. Semidreapta $B'C'$, *latură comună* a unghiurilor adiacente $A'B'C'$ și $C'B'D'$, este *inclusă în exteriorul* unghiului $A'B'D'$.

Deducem o procedură de calcul pentru *măsura unghiului format de laturile necomune* ale celor două unghiuri adiacente.

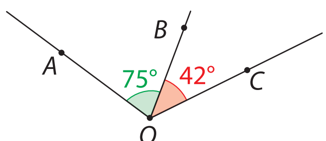
Aplicația 1. Considerăm unghiurile adiacente *AOB* și *BOC*.

1. Identificăm unghiul *AOC*, format de laturile necomune ale unghiurilor adiacente.

2. Stabilim poziția laturii comune a unghiurilor adiacente, în raport cu interiorul unghiului *AOC*.

3. Calculăm măsura unghiului *AOC*, astfel:

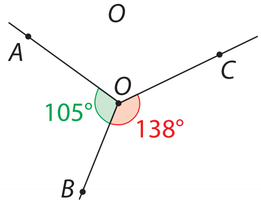
a) Dacă semidreapta *OB* este situată în interiorul unghiului *AOC*, atunci $\sphericalangle AOC = \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC$.



$\sphericalangle AOC = \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC$;

$\sphericalangle AOC = 75° + 42° = 117°$.

b) Dacă semidreapta *OB* este situată în exteriorul unghiului *AOC*, atunci $\sphericalangle AOC = 360° - (\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC)$.



$\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle AOC$ sunt unghiuri în jurul punctului *O*, deci

$\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle AOC = 360°$.

$\sphericalangle AOC = 360° - (105° + 138°) = 117°$.

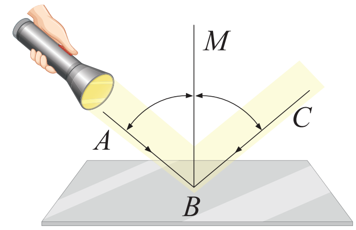
Observație.

Dacă unghiurile *AOB, BOC* sunt adiacente, iar $B \in \mathrm{Int}(\sphericalangle AOC)$, atunci $\sphericalangle AOC = \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC$.

Dacă unghiurile *AOB, BOC* sunt adiacente, iar $B \in \mathrm{Ext}(\sphericalangle AOC)$, atunci $\sphericalangle AOC = 360° - (\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC)$.

În imaginea alăturată, semidreapta BM este inclusă în interiorul unghiului propriu ABC și $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle MBC$.

Semidreapta BM se numește *bisectoarea* unghiului ABC.



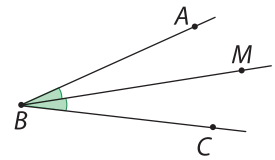
Definiție. Se numește *bisectoarea unui unghi propriu* semidreapta cu originea în vârful unghiului, care determină cu laturile acestuia *două unghiuri congruente*.

Orice unghi propriu admite o singură bisectoare.

Observație.

Dacă $\sphericalangle ABC$ este unghi propriu și $M \in \text{Int}(\sphericalangle ABC)$ astfel încât $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle MBC$, atunci semidreapta BM este bisectoarea unghiului ABC.

Dacă $\sphericalangle ABC$ este unghi propriu și BM este bisectoarea unghiului ABC, atunci $M \in \text{Int}(\sphericalangle ABC)$ și $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle MBC$.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicație practică: **Construcția bisectoarei unui unghi propriu**

Materiale necesare: o foaie A4, o folie transparentă, flexibilă, creion, riglă, raportor, compas.

1. Construcția bisectoarei cu ajutorul *riglei și al raportorului*.

Pasul 1. Pe o foaie A4, desenați un unghi propriu MON.

Pasul 2. Măsurați unghiul desenat și calculați $\sphericalangle MON : 2$.

Pasul 3. Construiți, folosind raportorul și rigla, unghiul MOP cu $P \in \text{Int}(\sphericalangle MON)$ și $\sphericalangle MOP = \sphericalangle MON : 2$.

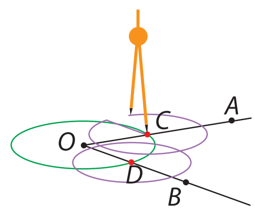
Pasul 4. Determinați măsura unghiului PON folosind unghiuri adiacente, adică $\sphericalangle PON = \sphericalangle MON - \sphericalangle MOP$.

Concluzie. $\sphericalangle PON = \sphericalangle MOP = \sphericalangle MON : 2$, deci $\sphericalangle PON \equiv \sphericalangle MOP$.

Ați construit bisectoarea OP, a unghiului MON, folosind rigla și raportorul.

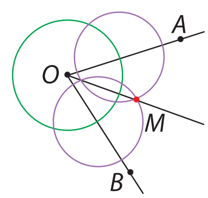
2. Construcția bisectoarei cu ajutorul *riglei și al compasului*.

Pasul 1. Pe o folie transparentă, flexibilă, construiți unghiul propriu AOB.



Pasul 2. Fixați acul compasului în vârful unghiului și trasați cu un arc de cerc astfel încât să intersecteze cele două laturi ale unghiului în câte un punct. Notați cu C intersecția arcului cu latura OA și notați cu D intersecția arcului cu latura OB.

Pasul 3. Fixați acul compasului în punctul C și trasați un arc de cerc cu raza mai mare decât jumătatea distanței CO, în interiorul unghiului AOB.

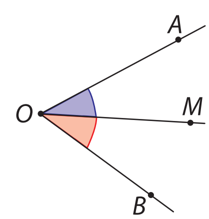


Pasul 4. Cu aceeași deschidere a compasului, ca la *Pasul 3*, fixați acul compasului în punctul D și trasați un arc de cerc în interiorul unghiului AOB. Acesta va intersecta arcul de la *Pasul 3* într-un punct M.

Pasul 5. Trasați cu ajutorul riglei semidreapta OM.

Pasul 6. Îndoiți folia după semidreapta OM.

Concluzie. Unghiurile MOA și MOB coincid prin suprapunere, deci *sunt congruente*.

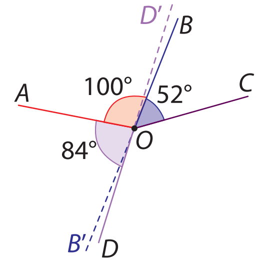


Ați construit bisectoarea OM, a unghiului AOB, folosind rigla și compasul.

Consultați manualul digital pentru a urmări cele două tehnici de construcție a bisectoarei unui unghi.

Probleme rezolvate

Problema 1



În configurația alăturată, $\sphericalangle AOB = 100^\circ$, $\sphericalangle BOC = 52^\circ$, $\sphericalangle AOD = 84^\circ$. Determinați măsurile unghiurilor *AOC* și *BOD* folosind, dacă este posibil, *unghiuri adiacente*.

Soluție. Observăm cu ușurință că $B \in \text{Int}(\sphericalangle AOC)$, deci $\sphericalangle AOC = \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC$, adică $\sphericalangle AOC = 100^\circ + 52^\circ = 152^\circ$.

Pentru a calcula măsura unghiului propriu *BOD*, folosind unghiuri adiacente, avem două variante:

1. $C \in \text{Int}(\sphericalangle BOD)$ și $\sphericalangle BOD = \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD$. Folosind suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct, găsim $\sphericalangle COD = 124^\circ$, apoi $\sphericalangle BOD = 52^\circ + 124^\circ = 176^\circ$.

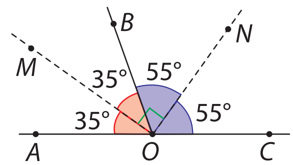
2. $A \in \text{Ext}(\sphericalangle BOD)$ și $\sphericalangle BOD = 360^\circ - (\sphericalangle AOD + \sphericalangle AOB) = 360^\circ - (84^\circ + 100^\circ) = 176^\circ$.

Problema 2.

a) Calculați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor adiacente *AOB* și *BOC*, știind că $\sphericalangle AOB = 70^\circ$, $\sphericalangle BOC = 110^\circ$.

b) Arătați că bisectoarele a două unghiuri adiacente suplementare formează *un unghi drept*.

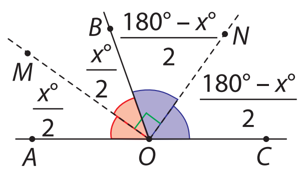
Soluție.



a) Fie *OM* bisectoarea unghiului *AOB* și fie *ON* bisectoarea unghiului *BOC*. Atunci, $\sphericalangle AOM = \sphericalangle MOB = \sphericalangle AOB : 2 = 70^\circ : 2 = 35^\circ$, iar

$\sphericalangle BON = \sphericalangle NOC = \sphericalangle BOC : 2 = 110^\circ : 2 = 55^\circ$.

Cum $\sphericalangle MOB$ și $\sphericalangle BON$ sunt adiacente, rezultă $\sphericalangle MON = \sphericalangle MOB + \sphericalangle BON = 35^\circ + 55^\circ = 90^\circ$.



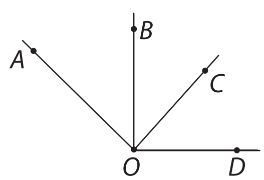
b) Fie *OM* bisectoarea unghiului *AOB* și fie *ON* bisectoarea unghiului *BOC*. Dacă $\sphericalangle AOB = x^\circ$, atunci, $\sphericalangle BOC = 180^\circ - x^\circ$. Atunci, $\sphericalangle MOB$ și $\sphericalangle BON$ sunt adiacente și $\sphericalangle MOB = x^\circ : 2$, iar $\sphericalangle BON = (180^\circ - x^\circ) : 2$, de unde rezultă $\sphericalangle MON = \sphericalangle MOB + \sphericalangle BON = [x^\circ + (180^\circ - x^\circ)] : 2 = 90^\circ$.

Concluzie: Bisectoarele a două unghiuri *adiacente suplementare* formează *unghi drept*.

Reformulare: Unghiurile formate de *bisectoarele a două unghiuri adiacente suplementare* cu *latura* lor *comună* sunt unghiuri *complementare*.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

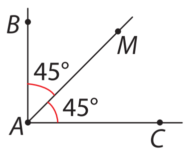
1. În imaginea alăturată, sunt reprezentate mai multe unghiuri. Copiați pe caiete tabelul alăturat și completați în casetele libere litera ***A***, dacă propoziția este adevărată, și litera ***F***, dacă propoziția este falsă.



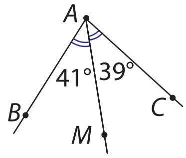
Propoziția	***A/F***
Unghiurile *AOB* și *BOC* sunt adiacente.	
Unghiurile *AOC* și *COD* nu sunt adiacente.	
Unghiurile *AOB* și *BOD* sunt adiacente.	
Unghiurile *AOC* și *BOD* sunt adiacente.	
Unghiurile *AOD* și *BOC* nu sunt adiacente.	

2. Precizați în care dintre desenele următoare semidreapta AM este bisectoarea unghiului BAC.

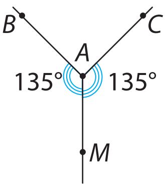
a)



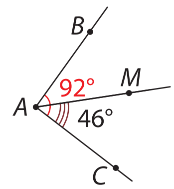
b)



c)



d)



3. Construiți unghiurile adiacente ABC și ABD, apoi calculați măsura unghiului CBD, în fiecare caz.

a) $\sphericalangle ABC = 35^\circ$, $\sphericalangle ABD = 45^\circ$;

b) $\sphericalangle ABC = 137^\circ$, $\sphericalangle ABD = 73^\circ$.

4. Construiți unghiurile adiacente AOB și BOC știind că:

a) sunt complementare și $\sphericalangle AOB = 50^\circ$;

b) sunt suplementare și $\sphericalangle BOC = 30^\circ + \sphericalangle AOB$.

5. Semidreapta OM este bisectoarea unghiului AOB. Determinați:

a) măsura unghiurilor AOM și BOM, știind că $\sphericalangle AOB = 100^\circ$;

b) măsura unghiului AOB, știind că $\sphericalangle AOM = 44^\circ 30'$.

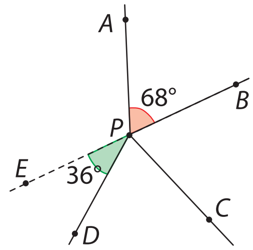
6. Fie unghiurile opuse la vârf AOB și COD cu $O \in AC$. Punctul M este situat în interiorul unghiului AOD astfel încât $\sphericalangle AOB = \sphericalangle DOM = 60^\circ$.

a) Calculați măsurile unghiurilor COD și AOD.

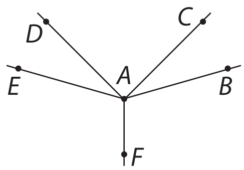
b) Demonstrați că OM este bisectoarea unghiului AOD.

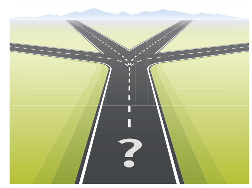
7. Demonstrați că dacă unghiurile $\sphericalangle AOM$ și $\sphericalangle BON$ sunt congruente, OA și OB sunt semidrepte opuse, iar OM și ON sunt de o parte și de alta a dreptei AB, atunci semidreptele OM și ON sunt semidrepte opuse.

8. Unghiurile APB, BPC, CPD, DPA sunt unghiuri în jurul punctului P, PC este bisectoarea unghiului BPD, iar semidreapta PE este opusă semidreptei PB. Folosind datele din desen, aflați măsurile unghiurilor BPE, BPD, BPC, CPD și DPA.



9. **a)** Realizați schița intersecției din imaginea de mai jos, reprezentând fiecare drum printr-o semidreaptă cu originea în punctul A. Obțineți, astfel, semidreptele AB, AC, AD, AE, AF.



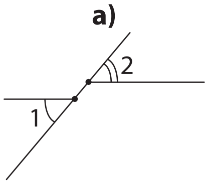


b) Știind că DAC este unghi drept, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAE = 30^\circ$ și că semidreapta opusă semidreptei AF este bisectoarea unghiului CAD, determinați măsurile unghiurilor formate în jurul punctului A.

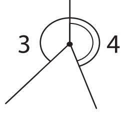
Minitest

50 p **1.** Pentru fiecare dintre perechile de unghiuri reprezentate mai jos, precizați, argumentat, perechile de unghiuri adiacente și perechile de unghiuri care nu sunt adiacente.

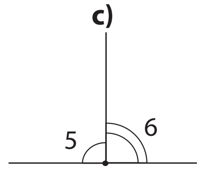
a)



b)

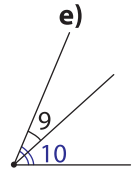


c)



d)

e)



40 p **2.** Unghiul MON are măsura 120°, iar semidreapta OA este situată în interiorul unghiului astfel încât $\sphericalangle AOM = 10^\circ + \sphericalangle AON$. Determinați măsurile unghiurilor AOM și AON.

Notă: Timp de lucru 20 de minute. Se acordă 10 puncte din oficiu.

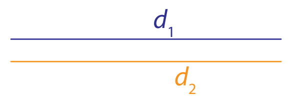
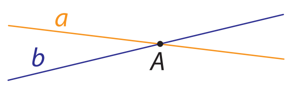
5.2. Drepte paralele

L1 Drepte paralele. Axioma paralelelor

Ne amintim

Poziția relativă pe care două drepte distincte o au, una față de alta, este dată de *numărul punctelor* pe care cele două drepte le au *în comun*.

Pentru două drepte distincte dintr-un plan, sunt posibile următoarele situații:

Poziția relativă a dreptelor	Descriere/Definiție	Reprezentare	În limbajul simbolisticii matematice
Drepte *paralele*	Două drepte dintr-un plan care *nu au niciun punct comun* se numesc *drepte paralele*.		$d_1 \parallel d_2$ $d_1 \cap d_2 = \varnothing$
Drepte *concurente* sau *secante*	Două drepte care au *un singur punct* comun se numesc drepte *concurente* sau secante.		$a \nparallel b$ $a \cap b = \{A\}$

Observații.

1. În plan, orice două drepte distincte sunt sau *paralele* sau *concurente*.
2. Despre un segment sau o semidreaptă vom spune că este paralel cu un alt segment, respectiv paralelă cu o altă semidreaptă, dacă *dreptele suport* ale acestora sunt paralele.

Dicționar

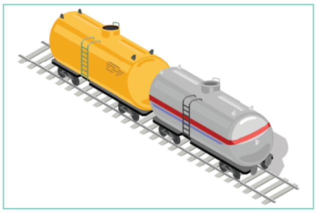
Dreaptă suport pentru un segment sau pentru o semidreaptă = dreapta care conține toate punctele segmentului, respectiv ale semidreptei.

Exemplu: Dreapta *AB* este *dreapta suport* a segmentului *AB*, dar și a semidreptelor *AB* și *BA*.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

În viața cotidiană, estimăm frecvent poziția a două drepte.

Uneori, *intuim* dacă într-un plan două drepte distincte sunt *paralele* sau sunt *concurente*, pe baza experienței de viață și raportându-ne la obiectele din vecinătatea lor. Dezavantajul este că pot interveni *iluzii optice* sau alți factori care să vicieze răspunsul.



Prima imagine sugerează foarte clar că *șinele* pe care se deplasează cele două vagoane *sunt paralele*. Pentru a doua imagine, dacă n-am ști, din experiența de viață acumulată, că șinele de cale ferată sunt situate pe drepte paralele, am fi tentați să spunem că cele două șine se întâlnesc într-un punct, nu foarte îndepărtat.

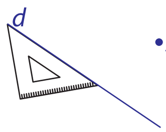
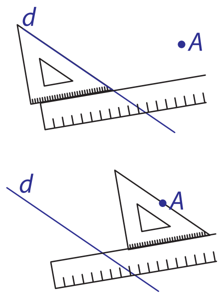
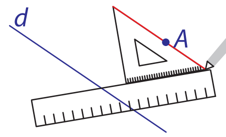
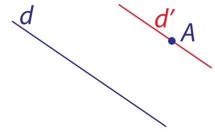
Dreptele paralele din realitate se transpun în reprezentări geometrice, realizate cu ajutorul instrumentelor geometrice.

Observație. Pe caietul de matematică, putem folosi caroiajul paginii pentru realizarea dreptelor paralele.

În rezolvarea problemelor de geometrie, verificăm *paralelismul* a două drepte sau construim *două drepte paralele*, folosind rigla și echerul, printr-o tehnică descrisă în aplicația următoare (prin *translație*).

***Lucrare practică* 1:** Tehnică de construcție a *paralelei* la o dreaptă *d*, printr-un punct *A*, exterior dreptei *d*.

Materiale necesare: caietul de matematică, rigla, echerul, un creion ascuțit.

	Pasul 1	***Pasul 2***	***Pasul 3***	***Pasul 4***
Etapele de realizare a construcției	Plasăm echerul astfel încât una din laturile sale să se suprapună peste dreapta *d*.	Sprijinim rigla de altă latură a echerului astfel încât, dacă translatăm echerul pe rigla nemișcată, latura care s-a sprijinit pe dreapta *d* să treacă prin punctul *A*.	Cu echerul în această poziție, trasăm dreapta suport a laturii care trece prin punctul *A*.	Notăm dreapta *d'*, paralelă cu dreapta *d*, prin punctul *A*, exterior dreptei *d*.
Reprezentare geometrică	 	 	 $\boldsymbol{d' \parallel d}$, $A \in \boldsymbol{d'}$ și $A \notin \boldsymbol{d}$	

Consultați manualul digital pentru a urmări, dinamic, tehnica de construcție a *paralelei la o dreaptă dată, printr-un punct dat*, folosind rigla și echerul.

Construcția de mai sus probează *intuitiv* un adevăr fundamental, numit *Axioma paralelelor*.

Axioma paralelelor (*Axioma lui Euclid*)

Printr-un punct exterior unei drepte, se poate construi o singură dreaptă, paralelă cu dreapta dată.

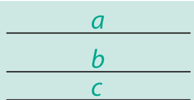
Dicționar

Axiomă = adevăr fundamental care se referă la noțiuni primare, acceptat fără demonstrație

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Pornind de la axioma paralelelor, putem *demonstra*, prin raționament, alte rezultate importante.

Teorema 1. (tranzitivitatea relației de paralelism) Două drepte distincte, paralele cu o a treia, sunt paralele între ele.



Dicționar

Teoremă = afirmație al cărei adevăr este demonstrat prin raționament logic.

Demonstrație = șir de judecăți formulate pe baza datelor inițiale și a informațiilor oferite de alte rezultate, cunoscute deja, prin care este obținută concluzia.

Reformulare, în limbajul simbolisticii matematice:

Fie *a*, *b* și *c* drepte distincte. Dacă $a \parallel b$ și $b \parallel c$, atunci $a \parallel c$.

Într-o demonstrație, este important să identificăm *ipoteza* problemei sau a teoremei (datele cunoscute) și *concluzia* (ceea ce trebuie demonstrat). Astfel, putem formula afirmația de demonstrat sub forma: „Dacă, *ipoteză*, atunci, *concluzie*".

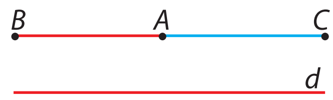
Din această perspectivă, *Teorema 1* poate fi văzută astfel:

Ipoteză	Concluzie
$a \parallel b$ $b \parallel c$ $a \neq c$	$a \parallel c$

Demonstrație. Știm că $a \parallel b$, $b \parallel c$, $a \neq c$ și dorim să demonstrăm că $a \parallel c$. Conform *Observației 1*, dreptele *a* și *c* pot fi paralele sau concurente. Să presupunem că $a \nparallel c$. Atunci, *a* și *c* sunt concurente într-un punct *M*, exterior dreptei *b*. Obținem $a \parallel b$, cu $M \in a$, și $c \parallel b$, cu $M \in c$, adică prin *M*, există două paralele distincte la dreapta *b*, ceea ce contrazice *axioma paralelelor*. Prin urmare, afirmația $a \nparallel c$ este falsă, rămânând adevărată afirmația $a \parallel c$.

Observație tehnică 1. Teorema 1 reprezintă o primă modalitate de *a demonstra că două drepte sunt paralele*.

Teorema 2. Dacă *A*, *B*, *C* sunt puncte, iar două dintre segmentele *AB*, *AC*, *BC* sunt paralele cu o dreaptă *d*, atunci punctele *A*, *B*, *C* sunt coliniare.

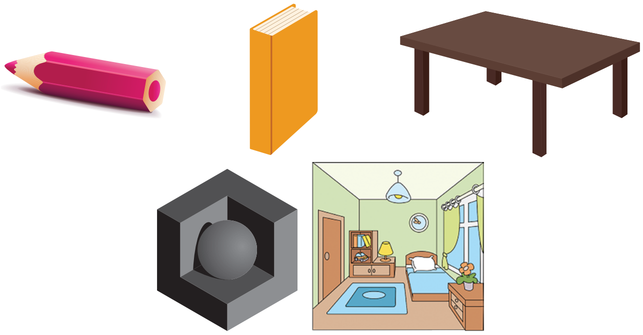


Demonstrație. Fie *A*, *B*, *C* puncte distincte, cu $AB \parallel d$ și $AC \parallel d$. Din *Axioma paralelelor*, rezultă că dreptele *AB* și *CD* coincid, adică punctele *A*, *B* și *C* sunt coliniare.

Observație tehnică 2. Teorema 2 este un instrument foarte util pentru *a demonstra că trei puncte sunt coliniare*.

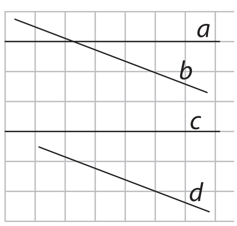
Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. **a)** Identificați, împreună cu colegul/colega de bancă, în imaginile de mai jos, muchii care sunt drepte paralele.



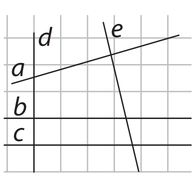
b) Identificați drepte concurente și drepte paralele, folosind muchiile de intersecție a pereților, tavanului și podelei încăperii în care vă aflați.

2. Ana desenează pe caietul de matematică mai multe drepte.
Observați desenul realizat de Ana, folosiți, eventual, instrumentele geometrice sau caroiajul paginii și precizați:



a) perechi de drepte paralele;
b) perechi de drepte concurente.

3. Observați desenul alăturat, copiați pe caiete și completați în spațiile libere unul dintre simbolurile $\parallel$ sau $\nparallel$, pentru a obține afirmații adevărate.



a … *b*	*b* … *c*	*c* … *d*	*d* … *e*
a … *c*	*b* … *d*	*c* … *e*	
a … *d*	*b* … *e*		
a … e			

4. Fie dreapta *a* și punctul *A*, exterior dreptei *a*.
a) Trasați prin punctul *A*, dreapta *b*, paralelă cu dreapta *a*.
b) Trasați prin punctul *A*, dreapta *c*, care nu este paralelă cu dreapta *a*.

5. Alegeți litera care indică varianta corectă. Doar un răspuns este corect.
a) Printr-un punct exterior unei drepte putem construi:
A. oricât de multe drepte paralele cu dreapta dată;
B. două drepte distincte, paralele cu dreapta dată;
C. o singură dreaptă paralelă cu dreapta dată.
b) Printr-un punct exterior unei drepte, putem construi:
A. oricât de multe drepte concurente cu dreapta dată;
B. două drepte concurente cu dreapta dată;
C. o singură dreaptă concurentă cu dreapta dată.

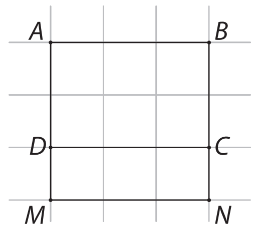
6. De o parte și de alta a dreptei *d* se consideră punctele *A*, respectiv *B*.
Construiți prin punctul *A*, dreapta *a*, paralelă cu dreapta *d*, apoi construiți prin punctul *B*, dreapta *b*, paralelă cu dreapta *d*. Precizați, poziția dreptelor *a* și *b*, justificând răspunsul dat.

7. Punctele *A* și *E* sunt de o parte și de alta a laturii *BC* a dreptunghiului *ABCD*, astfel încât $BE \parallel CD$ și $BE \equiv CD$.
Demonstrați că *B* este mijlocul segmentului *AE*.

Minitest

45 p **1.** Fie punctele distincte A, B, C și dreapta d. Dacă $AB \parallel d$ și $AC \parallel d$, demonstrați că punctele A, B, C sunt coliniare.

45 p **2.** $ABCD$ și $CDMN$ sunt dreptunghiuri astfel încât A, D, M sunt puncte coliniare și B, C, N sunt puncte coliniare.
Copiați pe caiete și completați în casetele libere litera ***A***, dacă afirmația este adevărată, și litera ***F***, dacă afirmația este falsă.

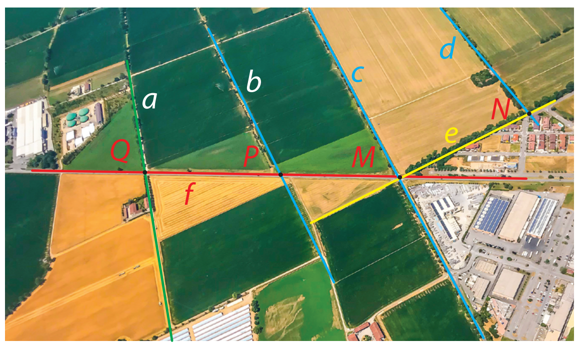


Propoziția	***A/F***
$AB \parallel CD$	
$BC \nparallel MN$	
$AM \parallel BN$	
$AB \nparallel MN$	
$CD \nparallel BN$	

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

L2 Unghiuri formate de două drepte distincte cu o secantă

Rezolvăm și observăm



În imaginea alăturată, sunt evidențiate mai multe drepte. Observați tripletele de drepte (b, c, d); (c, e, f); (a, b, f); (b, c, f).

În plan, *trei drepte distincte* pot fi dispuse în unul din următoarele moduri:

1. Sunt paralele două câte două: De exemplu, $b \parallel c \parallel d$.

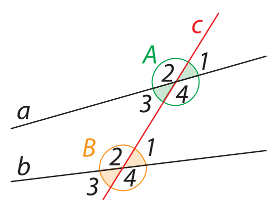
2. Sunt *concurente* (au un punct comun): Dreptele c, e, f sunt concurente în punctul M; $c \cap e \cap f = \{M\}$.

3. Una dintre drepte este *secantă* celorlalte două (le intersectează în puncte diferite):

Dreapta f este *secantă* a dreptelor a și b pentru că $a \cap f = \{Q\}$, $b \cap f = \{P\}$ și $Q \neq P$.
Identificați, în imagine și în realitate, alte triplete de drepte *tăiate* de o *secantă*.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Considerăm dreptele distincte a și b, *tăiate* (intersectate) de secanta c, în punctele A, respectiv B. În jurul punctului A se formează unghiurile A_1, A_2, A_3, A_4, iar în jurul punctului B se formează unghiurile B_1, B_2, B_3, B_4.



Ținând cont de poziția pe care cele opt unghiuri o au în raport cu secanta c și cu dreptele a și b, le grupăm în *perechi de unghiuri* între care unul este cu vârful în A și celălalt este cu vârful în B, fiecare purtând un nume specific.

În funcție de poziția față de secantă, pot fi: *de o parte și de alta* a secantei sau *de aceeași parte a secantei*. Celor care sunt de o parte și de alta a secantei le mai spunem și *alterne*.

În funcție de poziția față de dreptele *a* și *b*, pot fi: *interne*, adică sunt în interiorul fâșiei dintre dreptele *a* și *b*, sau *externe*, adică sunt în exteriorul fâșiei dintre dreptele *a* și *b*. Obținem, în acest fel: unghiuri *alterne interne*, unghiuri *alterne externe*, unghiuri *corespondente*, unghiuri *interne de aceeași parte a secantei*, unghiuri *externe de aceeași parte a secantei*, după cum rezultă din tabelul următor.

alterne interne	*alterne externe*	*corespondente*	*interne de aceeași parte a secantei*	*externe de aceeași parte a secantei*
$\sphericalangle A_3$ și $\sphericalangle B_1$; $\sphericalangle A_4$ și $\sphericalangle B_2$	$\sphericalangle A_1$ și $\sphericalangle B_3$; $\sphericalangle A_2$ și $\sphericalangle B_4$	$\sphericalangle A_1$ și $\sphericalangle B_1$; $\sphericalangle A_2$ și $\sphericalangle B_2$; $\sphericalangle A_3$ și $\sphericalangle B_3$; $\sphericalangle A_4$ și $\sphericalangle B_4$	$\sphericalangle A_3$ și $\sphericalangle B_2$; $\sphericalangle A_4$ și $\sphericalangle B_1$	$\sphericalangle A_1$ și $\sphericalangle B_4$; $\sphericalangle A_2$ și $\sphericalangle B_3$

Observație. Unghiurile *corespondente* sunt: unul intern, iar celălalt extern față de dreptele *a* și *b*, fiind de aceeași parte a secantei.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Problemă rezolvată.

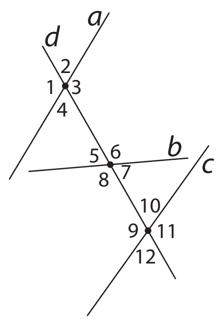
Dreapta *d* este secantă dreptelor *a*, *b*, *c* și formează cu acestea unghiuri notate ca în configurația alăturată.

Știind că $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 8 = 115°$ și $\sphericalangle 7 = \sphericalangle 10$, calculați:

a) $\sphericalangle 2$, $\sphericalangle 3$, $\sphericalangle 4$;

b) $\sphericalangle 5$, $\sphericalangle 6$, $\sphericalangle 7$;

c) $\sphericalangle 9$, $\sphericalangle 10$, $\sphericalangle 11$ și $\sphericalangle 12$.



Soluție.

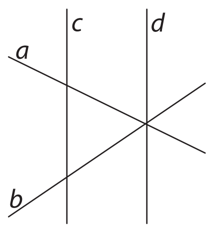
a) $\sphericalangle 1$ și $\sphericalangle 3$ sunt opuse la vârf.
Din $\sphericalangle 1 = 115°$, rezultă $\sphericalangle 3 = 115°$.
$\sphericalangle 1$ și $\sphericalangle 2$ sunt suplementare. Atunci, $\sphericalangle 2 = 65°$.
$\sphericalangle 2$ și $\sphericalangle 4$ sunt opuse la vârf, deci $\sphericalangle 4 = 65°$.

b) Cu un raționament similar, găsim:
$\sphericalangle 6 = 115°$, $\sphericalangle 5 = 65°$, $\sphericalangle 7 = 65°$.

c) Din $\sphericalangle 7 = \sphericalangle 10$ și $\sphericalangle 7 = 65°$, rezultă:
$\sphericalangle 10 = 65°$.
Atunci, $\sphericalangle 9 = 115°$, $\sphericalangle 11 = 115°$, $\sphericalangle 12 = 65°$.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Observați și analizați configurația geometrică de mai jos. Copiați textul pe caiete și completați spațiile libere astfel încât să obțineți propoziții adevărate.



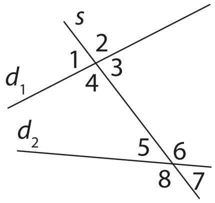
a) Dreapta *a* este secantă a dreptelor … și … respectiv a dreptelor … și … .

b) Dreapta *b* este secantă a dreptelor … și … respectiv a dreptelor … și … .

2. Pe laturile *OA*, respectiv *OB*, ale unghiului ascuțit *AOB*, reprezentați punctele *M*, respectiv *N*, apoi trasați dreapta *MN*. Copiați pe caiete tabelul următor și completați în caseta liberă litera ***A***, dacă afirmația este adevărată, sau litera ***F***, dacă afirmația este falsă.

Propoziția	***A/F***
p_1: Dreptele *AM* și *BN* sunt concurente.	
p_2: Dreapta *MN* este secantă a dreptelor *OA* și *OB*.	
p_3: Unghiurile *OMN* și *ONM* sunt unghiuri corespondente formate de dreptele *OA* și *OB* cu secanta *MN*.	

3. În desenul următor sunt notate 1, 2, 3, ..., 7, 8 unghiurile formate de dreptele d_1 și d_2 cu s, secanta acestora. Copiați pe caiete și completați spațiile libere astfel încât să obțineți propoziții adevărate.

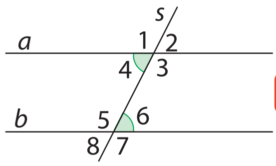


a) Unghiurile 1 și 5 sunt unghiuri ... .
b) Unghiurile 4 și 6 sunt unghiuri ... .
c) Unghiurile 2 și 8 sunt unghiuri ... .
d) Unghiul 3 și 6 sunt unghiuri ... .
e) Unghiul 2 și 7 sunt unghiuri ... .

4. Folosind reprezentarea geometrică de la problema 3:

a) Scrieți perechile de unghiuri suplementare, justificând răspunsul dat.
b) Calculați măsurile unghiurilor 3 și 4, știind că $\sphericalangle 1 = 54°$.
c) Calculați măsurile unghiurilor 6 și 8, știind că $\sphericalangle 5 + \sphericalangle 7 = 72°$.

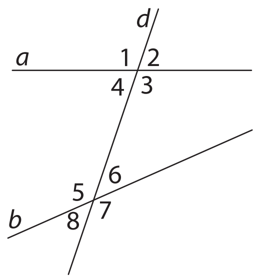
5. Dreptele *a* și *b* formează cu secanta *s* unghiurile din figura alăturată. Știind că $\sphericalangle 4 = \sphericalangle 6$, demonstrați că:



a) $\sphericalangle 3 \equiv \sphericalangle 5$;
b) $\sphericalangle 2 \equiv \sphericalangle 8$;
c) $\sphericalangle 4 + \sphericalangle 5 = 180°$.

Minitest

În desenul de mai jos sunt notate, cu cifre, unghiurile formate de dreptele *a* și *b* cu secanta *d*.
Alegeți litera care indică varianta corectă. Doar un răspuns este corect.



18 p **1.** O pereche de unghiuri alterne interne este:
A. $\sphericalangle 2$ și $\sphericalangle 4$; **B.** $\sphericalangle 1$ și $\sphericalangle 6$; **C.** $\sphericalangle 1$ și $\sphericalangle 7$; **D.** $\sphericalangle 3$ și $\sphericalangle 5$.

18 p **2.** O pereche de unghiuri alterne externe este:
A. $\sphericalangle 2$ și $\sphericalangle 5$; **B.** $\sphericalangle 1$ și $\sphericalangle 8$; **C.** $\sphericalangle 2$ și $\sphericalangle 8$; **D.** $\sphericalangle 4$ și $\sphericalangle 7$.

18 p **3.** Numărul perechilor de unghiuri corespondente reprezentate în desen este:
A. 2; **B.** 4; **C.** 3; **D.** 1.

18 p **4.** O pereche de unghiuri interne de aceeași parte a secantei este:
A. $\sphericalangle 1$ și $\sphericalangle 7$; **B.** $\sphericalangle 3$ și $\sphericalangle 5$; **C.** $\sphericalangle 3$ și $\sphericalangle 6$; **D.** $\sphericalangle 4$ și $\sphericalangle 7$.

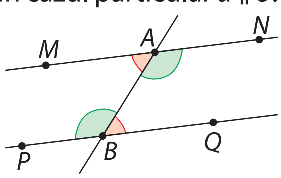
18 p **5.** O pereche de unghiuri externe de aceeași parte a secantei este:
A. $\sphericalangle 2$ și $\sphericalangle 7$; **B.** $\sphericalangle 2$ și $\sphericalangle 6$; **C.** $\sphericalangle 3$ și $\sphericalangle 8$; **D.** $\sphericalangle 2$ și $\sphericalangle 8$.

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

L3 Unghiuri formate de două drepte paralele cu o secantă. Criterii de paralelism

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Perechile de unghiuri formate de două drepte cu o secantă se dovedesc a fi foarte utile în cazul particular $a \parallel b$.
Considerăm dreptele $MN \parallel PQ$, cu secanta AB, $A \in MN$ și $B \in PQ$.
Măsurați cele două perechi de unghiuri *alterne interne*. Comparați măsurile unghiurilor MAB și QBA, apoi comparați măsurile unghiurilor NAB și PBA.

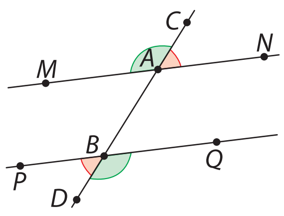


Secanta AB formează cu dreptele paralele MN și PQ perechi de unghiuri *alterne interne congruente*: $\sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle QBA$ și $\sphericalangle NAB \equiv \sphericalangle PBA$.

Teorema 1. (teorema unghiurilor alterne interne) Dacă două drepte sunt paralele, atunci orice secantă determină cu acestea *unghiuri alterne interne congruente*.

Pe baza *Teoremei 1*, vom putea deduce alte rezultate despre unghiurile determinate de două drepte paralele cu o secantă.

Teorema 2. (teorema unghiurilor alterne externe) Dacă două drepte sunt paralele, atunci orice secantă determină cu acestea *unghiuri alterne externe congruente*.

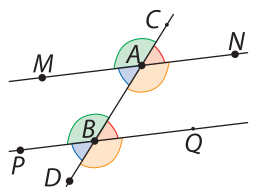


Demonstrație. Fie $MN \parallel PQ$ și CD o secantă, astfel încât $CD \cap MN = \{A\}$ și $CD \cap PQ = \{B\}$. Unghiurile CAM și QBD sunt unghiuri *alterne externe*.
Din *Teorema 1*, rezultă $\sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle QBA$ (alterne interne).
Dar $\sphericalangle MAB$ și $\sphericalangle MAC$ sunt suplementare, $\sphericalangle QBA$ și $\sphericalangle QBD$ sunt suplementare, deci $\sphericalangle MAC$ și $\sphericalangle QBD$ au suplementele congruente, de unde $\sphericalangle MAC \equiv \sphericalangle QBD$.

Temă de portofoliu. Folosind ca model raționamentul de mai sus, demonstrați că: $\sphericalangle CAN \equiv \sphericalangle DBP$.

Perechi de unghiuri alterne externe, congruente: $\sphericalangle MAC \equiv \sphericalangle QBD$ și $\sphericalangle CAN \equiv \sphericalangle DBP$.

Teorema 3. (teorema unghiurilor corespondente) Dacă două drepte sunt paralele, atunci orice secantă determină cu acestea *unghiuri corespondente congruente*.

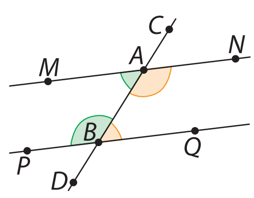


Demonstrație. $\sphericalangle NAB$ este suplementar cu $\sphericalangle MAB$, iar $\sphericalangle DBQ$ este suplementar cu $\sphericalangle QBA$. Din *Teorema 1*, $\sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle QBA$ (alterne interne), deci $\sphericalangle NAB$ și $\sphericalangle DBQ$ au suplementele congruente, adică $\sphericalangle NAB \equiv \sphericalangle DBQ$.

Temă de portofoliu. Folosind ca model raționamentul de mai sus, demonstrați că: $\sphericalangle CAM$ și $\sphericalangle ABP$; $\sphericalangle CAN$ și $\sphericalangle ABQ$; $\sphericalangle BAM$ și $\sphericalangle DBP$.

Perechi de unghiuri corespondente, congruente: $\sphericalangle CAM \equiv \sphericalangle ABP$, $\sphericalangle CAN \equiv \sphericalangle ABQ$, $\sphericalangle DBP \equiv \sphericalangle BAM$, $\sphericalangle NAB \equiv \sphericalangle DBQ$.

Teorema 4. (teorema unghiurilor interne, de aceeași parte a secantei) Dacă două drepte sunt paralele, atunci orice secantă determină cu acestea *unghiuri interne* de *aceeași parte a secantei*, *suplementare*.

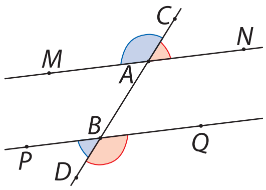


Demonstrație. $\sphericalangle NAB$ este suplementar cu $\sphericalangle MAB$, iar din *Teorema 1*, $\sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle QBA$ (unghiuri alterne interne). Atunci, $\sphericalangle NAB$ este suplementar cu $\sphericalangle QBA$, adică $\sphericalangle NAB + \sphericalangle QBA = 180°$.

Temă de portofoliu. Folosind ca model raționamentul de mai sus, demonstrați că: $\sphericalangle MAB + \sphericalangle PBA = 180°$.

Perechi de unghiuri interne de aceeași parte a secantei, suplementare:
$\sphericalangle NAB$ este suplementar cu $\sphericalangle QBA$, iar $\sphericalangle MAB$ este suplementar cu $\sphericalangle PBA$.

Teorema 5. (teorema unghiurilor externe de aceeași parte a secantei) Dacă două drepte sunt paralele, atunci orice secantă determină cu acestea *unghiuri externe de aceeași parte a secantei suplementare*.



Demonstrație. $\sphericalangle NAC$ este suplementar cu $\sphericalangle NAB$, iar din *Teorema 3*, $\sphericalangle NAB \equiv \sphericalangle QBD$ (unghiuri corespondente). Atunci, $\sphericalangle QBD$ este suplementar cu $\sphericalangle NAC$, adică $\sphericalangle NAC + \sphericalangle QBD = 180^\circ$.

Temă de portofoliu. Folosind ca model raționamentul de mai sus, demonstrați că: $\sphericalangle MAC + \sphericalangle PBD = 180^\circ$.

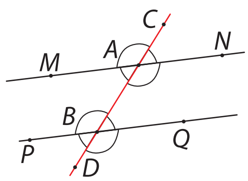
Perechi de unghiuri externe de aceeași parte a secantei, suplementare:
$\sphericalangle NAC$ este suplementar cu $\sphericalangle QBD$ *și* $\sphericalangle MAC$ este suplementar cu $\sphericalangle PBD$.

Observație. În rezolvarea unor probleme de geometrie, de multe ori e nevoie să demonstrăm congruența sau suplementaritatea unor unghiuri. Atunci, căutăm o configurație formată din două drepte paralele tăiate de o secantă, care generează o mulțime de perechi de unghiuri congruente sau suplementare.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Pornind de la enunțul unei teoreme, schimbând între ele *ipoteza* și *concluzia*, obținem un enunț care, în cazul în care este adevărat, este la rândul său teoremă și se va numi *teorema reciprocă* a teoremei inițiale.

Considerăm dreptele distincte MN și PQ, tăiate de secanta CD, astfel încât $CD \cap MN = \{A\}$ și $CD \cap PQ = \{B\}$.
Reciprocele teoremelor de mai sus sunt adevărate și ne oferă *condiții suficiente* ca dreptele să fie paralele. Aceste teoreme se numesc *criterii de paralelism*.



Dicționar

Criteriu de paralelism = teoremă cu ajutorul căreia demonstrăm că două drepte sunt paralele.

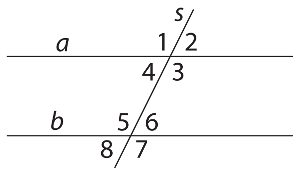
Pentru dreptele distincte MN și PQ, tăiate de secanta CD, unde $CD \cap MN = \{A\}$ și $CD \cap PQ = \{B\}$, folosind reprezentarea geometrică de mai sus, formulăm *reciprocele* teoremelor 1-5 și obținem *criterii de paralelism*.

Criterii de paralelism	*În limbajul simbolisticii matematice*
C$_1$: Dacă două drepte formează cu o secantă *o pereche de unghiuri alterne interne congruente*, atunci dreptele sunt paralele.	Dacă $\sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle QBA$, atunci $MN \parallel PQ$. Dacă $\sphericalangle NAB \equiv \sphericalangle PBA$, atunci $MN \parallel PQ$.
C$_2$: Dacă două drepte formează cu o secantă *o pereche de unghiuri alterne externe congruente*, atunci dreptele sunt paralele.	Dacă $\sphericalangle CAN \equiv \sphericalangle PBD$, atunci $MN \parallel PQ$. Dacă $\sphericalangle CAM \equiv \sphericalangle QBD$, atunci $MN \parallel PQ$.
C$_3$: Dacă două drepte formează cu o secantă *o pereche de unghiuri corespondente congruente*, atunci dreptele sunt paralele.	Dacă $\sphericalangle CAN \equiv \sphericalangle ABQ$, atunci $MN \parallel PQ$. Dacă $\sphericalangle CAM \equiv \sphericalangle ABP$, atunci $MN \parallel PQ$. Dacă $\sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle PBD$, atunci $MN \parallel PQ$. Dacă $\sphericalangle NAB \equiv \sphericalangle QBD$, atunci $MN \parallel PQ$.
C$_4$: Dacă două drepte formează cu o secantă *o pereche de unghiuri interne de aceeași parte a secantei suplementare*, atunci dreptele sunt paralele.	Dacă $\sphericalangle MAB + \sphericalangle PBA = 180^\circ$, atunci $MN \parallel PQ$. Dacă $\sphericalangle NAB + \sphericalangle QBA = 180^\circ$, atunci $MN \parallel PQ$.
C$_5$: Dacă două drepte formează cu o secantă *o pereche de unghiuri externe de aceeași parte a secantei suplementare*, atunci dreptele sunt paralele.	Dacă $\sphericalangle CAM + \sphericalangle PBD = 180^\circ$, atunci $MN \parallel PQ$. Dacă $\sphericalangle CAN + \sphericalangle QBD = 180^\circ$, atunci $MN \parallel PQ$.

Observație. Criteriile de paralelism ne furnizează o bogăție de *instrumente* simple și eficiente pentru a demonstra *paralelismul a două drepte*.

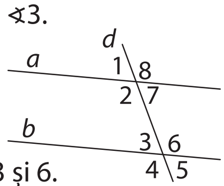
Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Notăm unghiurile formate de dreptele paralele a și b cu secanta s, ca în imaginea alăturată. Dintre unghiurile reprezentate, scrieți, justificând răspunsul dat:

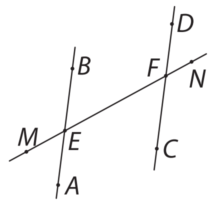


a) unghiurile congruente cu $\sphericalangle 1$;
b) unghiurile congruente cu $\sphericalangle 6$;
c) unghiurile suplementare cu $\sphericalangle 3$.

2. În imaginea alăturată, dreptele a și b sunt paralele, iar măsura unghiului 7 este de 65°. Calculați măsurile unghiurilor 3 și 6.

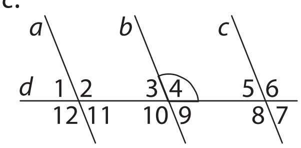


3. În desenul următor, dreptele AB și CD sunt paralele. Secanta MN intersectează AB în punctul E și CD în punctul F.



a) Știind că $\sphericalangle AEF = 126^\circ$, aflați măsurile unghiurilor EFD și CFN.
b) Dacă $\sphericalangle NFD = 77^\circ$, aflați măsurile unghiurilor AEM, MEB și BEF.

4. Dreapta d este secantă pentru perechile de drepte paralele a, b, respectiv b, c. Știind că $\sphericalangle 4 = 111^\circ$, aflați măsurile unghiurilor 6 și 12.

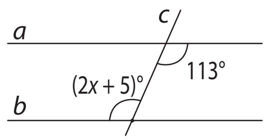


5. Reprezentați printr-un desen unghiul AOB cu măsura de 54° și dreapta BC paralelă cu dreapta OA, punctul C fiind situat în interiorul unghiului AOB.
a) Calculați măsura unghiului OBC.
b) Dacă BA este bisectoarea unghiului OBC, determinați măsura unghiului BAO.

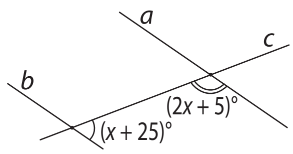
6. Unghiurile ABC, CBD sunt adiacente. În interiorul unghiului ABD se consideră semidreptele AM și DN situate pe drepte paralele cu dreapta BC.
a) Demonstrați că $AM \parallel DN$.
b) Știind că $\sphericalangle BAM = 134^\circ$ și $\sphericalangle BDN = 122^\circ$, calculați măsura unghiului ABD.

7. În fiecare dintre configurațiile următoare, dreptele a și b sunt paralele, iar c este o secantă a lor.

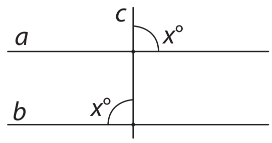
a)



b)

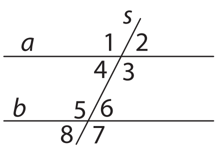


c)



Determinați, în fiecare caz, numărul x.

8. Copiați pe caiete și completați spațiile libere cu unul din simbolurile $\parallel$ sau $\nparallel$ astfel încât, cu notațiile din desen, să obțineți propoziții adevărate.



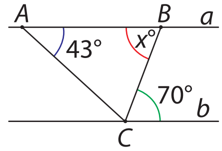
a) Dacă $\sphericalangle 4 = 64^\circ$ și $\sphericalangle 6 = 64^\circ$, atunci a ... b.
b) Dacă $\sphericalangle 2 = 60^\circ$ și $\sphericalangle 5 = 130^\circ$, atunci a ... b.
c) Dacă $\sphericalangle 1 = 119^\circ$ și $\sphericalangle 8 = 61^\circ$, atunci a ... b.

9. Fie ABC un unghi drept și punctul D în exteriorul unghiului. Se știe că $\sphericalangle BAC = 55^\circ$ și $\sphericalangle CBD = 35^\circ$.
a) Realizați un desen conform datelor problemei.
b) Calculați măsura unghiului ABD.
c) Arătați că dreptele AC și BD sunt paralele.
d) Calculați măsura unghiului ACB.

10. Se consideră două drepte paralele și o secantă oarecare a lor.
a) Demonstrați că bisectoarele a două unghiuri alterne interne sunt situate pe drepte paralele.
b) Demonstrați că bisectoarele a două unghiuri interne de aceeași parte a secantei formează un unghi drept.

Minitest

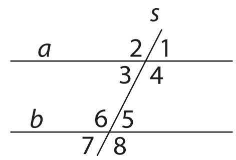
1. Dreptele *a* și *b* sunt tăiate de secantele *AC* și *BC*.



15 p **a)** Determinați numărul *x* astfel încât dreptele *a* și *b* să fie paralele.

15 p **b)** În condițiile subpunctului **a)**, calculați măsura unghiului *ACB*.

2. Se notează cu 1, 2, 3, … , 7, 8 unghiurile formate de dreptele paralele *a* și *b* cu secanta *s*.



20 p **a)** Dacă $\sphericalangle 1 = 75°$, determinați măsurile unghiurilor 4 și 5.

20 p **b)** Dacă $\sphericalangle 2 = 105°$, determinați măsurile unghiurilor 6 și 3.

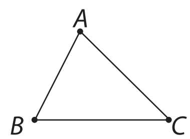
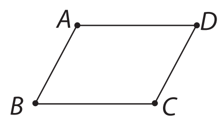
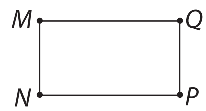
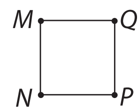
20 p **c)** Dacă $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 = 240°$, calculați măsurile unghiurilor 4 și 7.

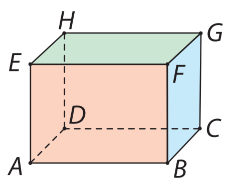
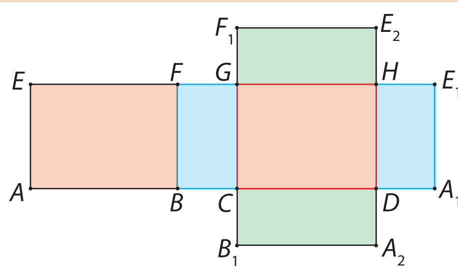
Notă: Timp de lucru 20 de minute. Se acordă 10 puncte din oficiu.

L4 Aplicații practice în poligoane și corpuri geometrice

Orice obiect fizic poate fi simplificat, abstractizat, astfel încât să poată fi divizat în mai multe corpuri geometrice sau figuri geometrice elementare. Pentru fiecare dintre aceste elemente putem analiza forme, dimensiuni, poziții, relații, pe care să le folosim apoi în practică.

Ne amintim

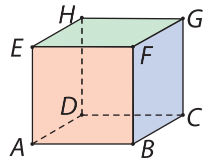
poligon	triunghi	paralelogram	dreptunghi	pătrat
reprezentare geometrică				
vârfuri	*A*, *B*, *C*	*A*, *B*, *C*, *D*	*M*, *N*, *P*, *Q*	*M*, *N*, *P*, *Q*
laturi	*AB*, *BC*, *CA*	*AB*, *BC*, *CD*, *DA*	*MN*, *NP*, *PQ*, *QM*	*MN*, *NP*, *PQ*, *QM*
unghiuri	$\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle A$ $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle B$ $\sphericalangle ACB$, $\sphericalangle C$	$\sphericalangle DAB$, $\sphericalangle A$ $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle B$ $\sphericalangle BCD$, $\sphericalangle C$ $\sphericalangle CDA$, $\sphericalangle D$	$\sphericalangle QMN$, $\sphericalangle M$ $\sphericalangle MNP$, $\sphericalangle N$ $\sphericalangle NPQ$, $\sphericalangle P$ $\sphericalangle PQM$, $\sphericalangle Q$	$\sphericalangle QMN$, $\sphericalangle M$ $\sphericalangle MNP$, $\sphericalangle N$ $\sphericalangle NPQ$, $\sphericalangle P$ $\sphericalangle PQM$, $\sphericalangle Q$

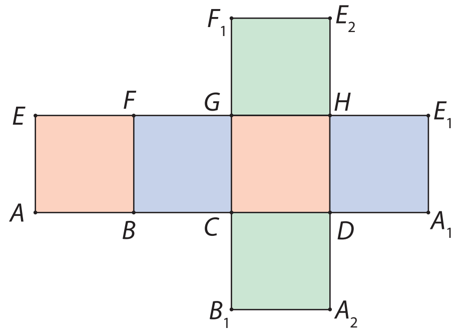
Corp geometric	Reprezentare geometrică	Desfășurare – o suprafață plană din care, prin pliere, se poate obține corpul geometric
Paralelipiped dreptunghic Descriere: • 8 vârfuri: *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H* • 6 fețe: *ABCD*, *EFGH*, *ABFE*, *DCGH*, *BCGF*, *ADHE* • Toate fețele paralelipipedului dreptunghic sunt dreptunghiuri.		

Cub

Descriere:

- 8 vârfuri; *A, B, C, D, E, F, G, H*
- 6 fețe: *ABCD, EFGH, ABFE, DCGH, BCGF, ADHE*
- Toate fețele cubului sunt pătrate.



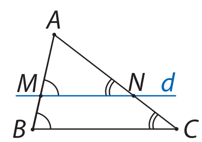


Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicația 1.

Dreapta *d* intersectează laturile *AB,* respectiv *AC*, ale triunghiului *ABC*, în punctele *M* respectiv *N*.

Știind că $d \parallel BC$, demonstrați că $\sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle ANM \equiv \sphericalangle ACB$.



Rezolvare explicită.

Dreapta *AB* este secantă a dreptelor paralele *d* și *BC*, iar $AB \cap d = \{M\}$. Atunci, unghiurile *AMN* și *ABC* sunt unghiuri *corespondente*. Cum $MN \parallel BC$, rezultă $\sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle ABC$.

Dreapta *AC* este secantă a dreptelor paralele *d* și *BC*, iar $AC \cap d = \{N\}$. Atunci, unghiurile *ANM* și *ACB* sunt unghiuri *corespondente*. Din teorema unghiurilor corespondente, rezultă $\sphericalangle ANM \equiv \sphericalangle ACB$.

Rezolvare succintă.

$\left.\begin{array}{l} d \parallel BC \\ AB \text{ secantă} \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle AMN$ *și* $\sphericalangle ABC$ sunt unghiuri *corespondente congruente* $\Rightarrow \sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle ABC$

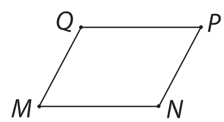
Demonstrați, analog, că $\sphericalangle ANM \equiv ACB$.

Aplicația 2.

Paralelogramul are două perechi de *laturi opuse paralele*.

a) Demonstrați că unghiurile alăturate ale paralelogramului sunt suplementare.

b) Demonstrați că unghiurile opuse ale paralelogramului sunt congruente.



Rezolvare explicită.

Fie *MNPQ* paralelogram. Atunci: $MN \parallel PQ$ și $MQ \parallel NP$.

a) Sunt patru perechi de unghiuri alăturate: $\sphericalangle M$ și $\sphericalangle N$, $\sphericalangle N$ și $\sphericalangle P$, $\sphericalangle P$ și $\sphericalangle Q$, $\sphericalangle M$ și $\sphericalangle Q$.

Model. Dreapta *MQ* este secantă pentru dreptele paralele *MN* și *PQ*. Atunci, unghiurile *M* și *Q* sunt interne de aceeași parte a secantei și sunt *suplementare*, deci $\sphericalangle M + \sphericalangle Q = 180^\circ$.

Folosind modelul prezentat, demonstrați că $\sphericalangle M + \sphericalangle N = \sphericalangle N + \sphericalangle P = \sphericalangle P + \sphericalangle Q = 180^\circ$.

b) Paralelogramul are două perechi de unghiuri opuse: $\sphericalangle M$ și $\sphericalangle P$; $\sphericalangle N$ și $\sphericalangle Q$. Din subpunctul **a)**, rezultă $\sphericalangle M + \sphericalangle N = 180^\circ$ (unghiuri alăturate în paralelogram) și $\sphericalangle N + \sphericalangle P = 180^\circ$ (unghiuri alăturate în paralelogram). Deducem că $\sphericalangle M$ și $\sphericalangle P$ au același suplement, deci sunt congruente, adică $\sphericalangle M \equiv \sphericalangle P$.

Folosind justificarea de mai sus, demonstrați că $\sphericalangle N \equiv \sphericalangle Q$.

Rezolvare succintă.

MNPQ paralelogram $\Rightarrow MN \parallel PQ$ și $MQ \parallel NP$.

a) $\left.\begin{array}{l} MN \parallel PQ \\ MQ \text{ secantă} \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle M$ *și* $\sphericalangle Q$

interne de aceeași parte a secantei *suplementare* $\Rightarrow \sphericalangle M + \sphericalangle Q = 180^\circ$.

b) $\left.\begin{array}{l} MNPQ \textit{ paralelogram} \\ \sphericalangle M, \sphericalangle N \textit{ alăturate} \\ \sphericalangle N, \sphericalangle Q \textit{ alăturate} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{array}{l} \sphericalangle M + \sphericalangle N = 180^\circ \text{ și} \\ \sphericalangle N + \sphericalangle P = 180^\circ, \end{array}$

deci $\sphericalangle M \equiv \sphericalangle P$.

Aplicația 3.

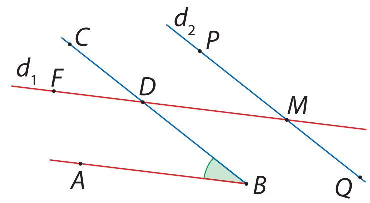
În figura alăturată, dreptele d_1 și d_2 sunt paralele cu laturile AB, respectiv BC, ale unghiului ABC.

Folosind notațiile din imagine:

a) Identificați, în reprezentarea geometrică, două perechi de drepte paralele, tăiate de câte o secantă.

b) Demonstrați că $\sphericalangle DMP \equiv \sphericalangle ABC$.

c) Demonstrați că $\sphericalangle DMQ$ este suplementar cu $\sphericalangle ABC$.



Rezolvare explicită.

a) $AB \parallel DM$ cu secanta BC; $BC \parallel PQ$ cu secanta DM.

b) Secanta BC determină cu dreptele paralele AB și DM unghiurile alterne interne $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle BDM$, deci $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle BDM$.

Secanta DM determină cu dreptele paralele BC și PQ unghiurile alterne interne $\sphericalangle BDM$ și $\sphericalangle DMP$, deci $\sphericalangle BDM \equiv \sphericalangle DMP$.

Am obținut $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle BDM$ și $\sphericalangle BDM \equiv \sphericalangle DMP$, deci $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DMP$.

c) Secanta BC determină cu dreptele paralele AB și DM unghiurile interne de aceeași parte a secantei $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle BDF$, deci $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BDF = 180^\circ$.

Secanta DM determină cu dreptele paralele BC și PQ unghiurile corespondente $\sphericalangle BDF$ și $\sphericalangle QMD$, deci $\sphericalangle BDF \equiv \sphericalangle QMD$.

Atunci, $\sphericalangle ABC + \sphericalangle QMD = \sphericalangle ABC + \sphericalangle BDF = 180^\circ$.

Am demonstrat mai sus următorul rezultat:

Observație. Orice două unghiuri cu laturile respectiv paralele sunt congruente sau suplementare.

Rezolvare succintă.

b) $\left.\begin{array}{l} AB \parallel DM \\ BC \text{ secantă} \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle BDM$ (alterne interne) (1)

$\left.\begin{array}{l} BC \parallel PQ \\ DM \text{ secantă} \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle BDM$ și $\sphericalangle PMD$ (alterne interne) (2)

Din (1) și (2), $\Rightarrow \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle PMD$.

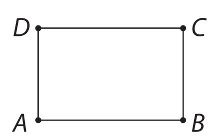
c) $\left.\begin{array}{l} AB \parallel DM \\ BC \text{ secantă} \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle ABC + \sphericalangle BDF = 180^\circ$ (interne de aceeași parte a secantei) (3)

$\left.\begin{array}{l} BC \parallel PQ \\ DM \text{ secantă} \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle BDF \equiv \sphericalangle QMD$ (corespondente) (4)

Din (3) și (4) $\Rightarrow \sphericalangle ABC + \sphericalangle QMD = 180^\circ$.

Aplicația 4.

Considerăm cunoscut faptul că dreptunghiul are un unghi drept. Verificați, folosind unghiul drept al echerului, validitatea afirmației. Considerăm, de asemenea, cunoscut faptul că laturile opuse ale dreptunghiului sunt paralele. Demonstrați că toate unghiurile dreptunghiului sunt drepte.



Rezolvare.

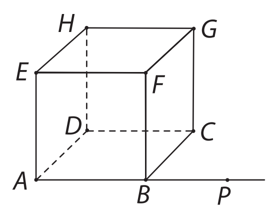
Fie $\sphericalangle A = 90^\circ$. Din $BC \parallel AD$, cu secanta AB, rezultă că $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle B$ sunt interne de aceeași parte a secantei suplementare, deci $\sphericalangle B = 180^\circ - \sphericalangle A = 90^\circ$. Din $AB \parallel CD$ cu secanta AD, rezultă că $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle D$ sunt interne de aceeași parte a secantei suplementare, deci $\sphericalangle D = 180^\circ - \sphericalangle A = 90^\circ$. Folosind aceleași paralele cu secanta BC, rezultă că $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle C$ sunt interne de aceeași parte a secantei suplementare, adică $\sphericalangle C = 180^\circ - \sphericalangle B = 90^\circ$.

Provocare! Rezolvați această problemă folosind aplicația 2 și faptul că *orice dreptunghi este paralelogram*.

Aplicația 5.

În desenul alăturat este reprezentat un cub și semidreapta BP.

Știind că punctele A, B, P sunt coliniare, demonstrați că $\sphericalangle PBC = 90^\circ$ și $\sphericalangle PBF = 90^\circ$.



Rezolvare.

Cu dreptele $AB \parallel CD$, secanta BC formează unghiurile alterne interne $\sphericalangle DCB$ și $\sphericalangle PBC$, deci $\sphericalangle PBC = \sphericalangle DCB = 90^\circ$.

Analog, dreptele $AE \parallel BF$, formează cu secanta AB unghiurile corespondente $\sphericalangle EAB$ și $\sphericalangle FBP$, deci $\sphericalangle PBF = \sphericalangle EAB = 90^\circ$.

Aplicația 6.

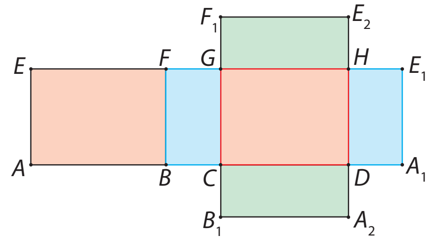
Configurația alăturată reprezintă desfășurarea în plan a unui paralelipiped dreptunghic. Folosind notațiile din reprezentare, demonstrați că:

a) punctele A, B, C sunt coliniare;

b) punctele E, F, G sunt coliniare;

c) $AE \parallel CG$;

d) $\sphericalangle GAC = \sphericalangle AGE$.



Rezolvare explicită.

a) *Model*: $ABFE$ și $BCGF$ provin din fețele paralelipipedului dreptunghic, deci sunt dreptunghiuri și au toate unghiurile drepte. Atunci, $\sphericalangle ABF$ și $\sphericalangle CBF$ sunt adiacente suplementare, deci $\sphericalangle ABC = 180^\circ$ și A, B, C sunt coliniare.

b) Folosind modelul de la subpunctul **a)** scrieți o demonstrație similară pentru **b).**

c) Din $AE \parallel BF$ și $BF \parallel CG$, rezultă $AE \parallel CG$.

d) Din **a)** și **b)**, $ACGE$ dreptunghi. Considerăm AG secantă pentru dreptele paralele AC și EG. Atunci, $\sphericalangle GAC$ și $\sphericalangle AGE$ sunt unghiuri alterne interne congruente, deci $\sphericalangle GAC = \sphericalangle AGE$.

Rezolvare succintă.

a) $ABFE$ și $BCGF$ dreptunghiuri
$\Rightarrow \sphericalangle ABF = \sphericalangle CBF = 90^\circ$.
$\sphericalangle ABF$ și $\sphericalangle CBF$ adiacente și
$\sphericalangle ABF + \sphericalangle CBF = 180^\circ$, rezultă
$\sphericalangle ABC = 180^\circ$, deci A, B, C sunt coliniare.

b) Analog demonstrăm coliniaritatea punctelor E, F și G.

c) $\left.\begin{array}{l} AE \parallel BF \\ BF \parallel CG \end{array}\right\} \Rightarrow AE \parallel CG.$

d) $\left.\begin{array}{l} AC \parallel EG \\ AG \text{ secantă} \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle GAC \equiv \sphericalangle AGE$ (alterne interne),
deci $\sphericalangle GAC = \sphericalangle AGE$

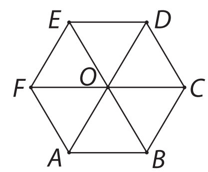
Aplicația 7.

$ABCDEF$ este un hexagon (poligon cu șase laturi). Toate unghiurile sale sunt congruente, cu măsura de 120°, iar AO, BO, CO, DO, EO, FO sunt, respectiv, bisectoarele unghiurilor hexagonului. Demonstrați că:

a) dreptele OC și AB sunt paralele;

b) punctele C, O, F sunt coliniare;

c) dreptele DE și AB sunt paralele.



Rezolvare completă.

a) Din ipoteză, unghiurile ABC și BCD sunt congruente și au măsura de 120°. Semidreapta CO este bisectoarea unghiului BCD, deci unghiurile OCB și OCD sunt congruente, fiecare având măsura 60°.

Pentru dreptele AB și OC, dreapta BC este secantă și formează unghiurile OCB și ABC, interne de aceeași parte a secantei suplementare ($\sphericalangle OCB + \sphericalangle ABC = 180^\circ$). Rezultă, folosind criteriul de paralelism C_4, $AB \parallel OC$.

b) Analog, pentru AB și OF, dreapta AF este secantă și formează unghiurile OFA și BAF, interne de aceeași parte a secantei suplementare ($\sphericalangle OFA + \sphericalangle BAF = 180^\circ$). Rezultă $AB \parallel OF$. Am obținut $OC \parallel AB \parallel OF$, adică, folosind axioma lui Euclid, O, F, C sunt coliniare.

c) Printr-un raționament similar se demonstrează că $DE \parallel OF$. Atunci, din $DE \parallel OF$ și $AB \parallel OF$, rezultă $DE \parallel AB$.

Rezolvare succintă.

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD = 120^\circ$ și CO bisectoare
$\Rightarrow \sphericalangle OCB \equiv \sphericalangle OCD$ și
$\sphericalangle OCB = \sphericalangle OCD = 60^\circ$.

a) $\sphericalangle ABC + \sphericalangle OCB = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$, iar $\sphericalangle OCB$ și $\sphericalangle ABC$ interne de aceeași parte a secantei BC, pentru AB și OC. Rezultă $AB \parallel OC$.

b) $\sphericalangle BAF + \sphericalangle OFA = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$, iar $\sphericalangle OFA$ și $\sphericalangle BAF$ interne de aceeași parte a secantei AF, pentru AB și OF. Rezultă $AB \parallel OF$. Cum $OF \parallel AB \parallel OC$ rezultă O, F, C coliniare.

c) Similar, $ED \parallel OF$. Atunci, din $ED \parallel OF$ și $AB \parallel OF$, rezultă $ED \parallel AB$.

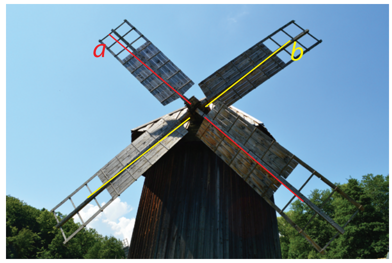
5.3. Drepte perpendiculare în plan

L1 Drepte perpendiculare în plan. Distanța de la un punct la o dreaptă

Rezolvăm și observăm

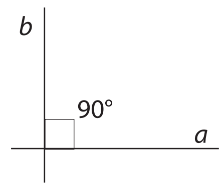
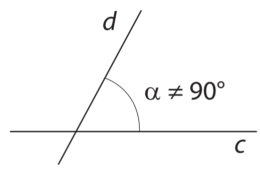
În imaginea alăturată, dreptele a și b sunt dreptele *suport* ale tijelor metalice pe care s-au construit cele patru palete ale morii de vânt.

Știind că unghiurile formate de oricare două palete alăturate sunt congruente, determinați unghiul format de dreptele a și b.



Soluție. Fie $\{O\} = a \cap b$. Semidreptele determinate de punctul O pe cele două drepte formează patru unghiuri congruente în jurul punctului O. Cum suma unghiurilor în jurul unui punct este 360°, rezultă că cele patru unghiuri au fiecare câte 90°, deci dreptele a și b formează un *unghi drept*. Vom spune că a și b sunt *perpendiculare*.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

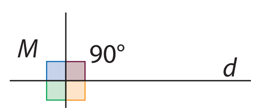
Definiție	*Scriem/Citim*	*Reprezentare*
Dreptele a și b sunt *perpendiculare* dacă acestea formează un *unghi drept*.	• $a \perp b$ sau $b \perp a$ • a este *perpendiculară* pe b, respectiv b este *perpendiculară* pe a	
Dacă dreptele c și d formează un unghi propriu, care nu este unghi drept, atunci fiecare dintre ele este oblică față de cealaltă.	• $c \not\perp d$ sau $d \not\perp c$ • c nu este perpendiculară pe d sau c este *oblică* față de d, respectiv d nu este perpendiculară pe c sau d este *oblică* față de c	

Teoremă: Printr-un punct din plan, se poate construi o singură perpendiculară pe o dreaptă dată.

Demonstrație.

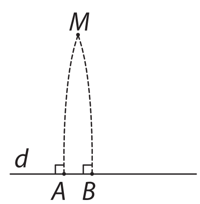
1. Considerăm cazul în care punctul M aparține dreptei d. Atunci, există o singură dreaptă care trece prin M, iar semidreptele cu originea în M ale acesteia formează cu cele două semidrepte opuse ale dreptei d unghiuri de 90°.

1.



2. Pentru cazul când M este exterior dreptei d, presupunem că putem construi perpendicularele MA și MB ($A \neq B$). Atunci, dreptele MA și MB formează cu secanta AB unghiuri corespondente congruente (drepte). Rezultă că MA și MB sunt paralele, rezultat care contrazice faptul că M este punct comun. Presupunerea este falsă, deci există *o unică perpendiculară* din M, pe dreapta d.

2.



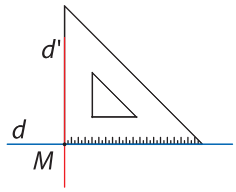
Pentru a construi o dreaptă d', perpendiculară printr-un punct M al planului, pe o dreaptă d, putem folosi unghiul drept al echerului sau putem folosi compasul.

Se consideră dreapta d și punctul M în plan. Se disting două cazuri: $M \in d$ sau $M \notin d$.

Aplicație practică 1. **Construcția perpendicularei pe o dreaptă dată, printr-un punct, cu ajutorul echerului**

a) Dacă $M \in d$, construim perpendiculara *în* punctul M, pe dreapta d.

Pasul 1. Fixați echerul cu vârful unghiului drept în punctul M, astfel încât una din laturile care formează unghiul drept să se suprapună pe dreapta d.



Dicționar

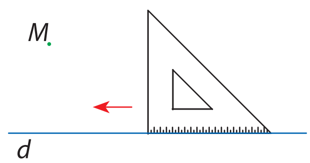
dreapta suport a unui segment = dreapta pe care este situat segmentul respectiv.

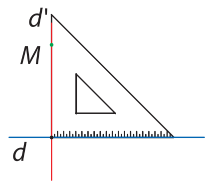
Pasul 2. Trasați d', dreapta suport a celeilalte laturi a unghiului drept al echerului.

Ați construit astfel perpendiculara *în* punctul M, pe dreapta d. Scriem: $d' \perp d$ și $d' \cap d = \{M\}$.

b) Dacă $M \notin d$, construim perpendiculara *din* punctul M, pe dreapta d.

Pasul 1. Așezați echerul de aceeași parte cu punctul M, față de dreapta d, astfel încât una din laturile care formează unghiul drept să fie suprapusă pe dreapta d.





Pasul 2. Deplasați echerul de-a lungul dreptei d, până când punctul M este situat pe cea de-a doua latură a unghiului drept al echerului.

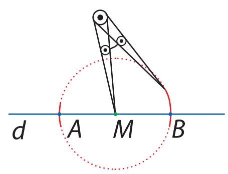
Pasul 3. Trasați d', dreapta suport a laturii unghiului drept al echerului, care conține punctul M.

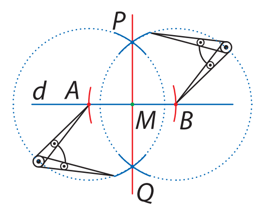
Ați construit astfel perpendiculara *din* punctul M, pe dreapta d. Scriem: $d' \perp d$ și $M \in d'$.

Aplicație practică 2. **Construcția perpendicularei pe o dreaptă dată, printr-un punct, cu ajutorul compasului**

a) Dacă $M \in d$, construim perpendiculara *în* punctul M, pe dreapta d.

Pasul 1. Fixați compasul cu acul în punctul M și trasați un cerc. Notați cu A și B punctele în care acesta intersectează dreapta d.





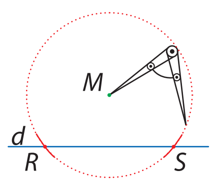
Pasul 2. Măriți puțin deschiderea compasului, apoi trasați un cerc cu centrul în punctul A și un cerc, de aceeași rază, cu centrul în punctul B. Notați cu P și Q punctele de intersecție ale celor două cercuri.

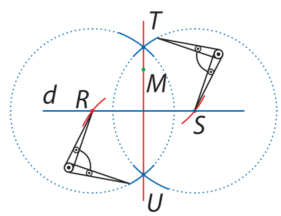
Pasul 3. Trasați dreapta PQ. Punctele P, M, Q sunt coliniare și $PQ \perp d$, deci $d' = PQ$.

Ați construit astfel perpendiculara *în* punctul M, pe dreapta d. Scriem: $d' \perp d$ și $d' \cap d = \{M\}$.

b) Dacă $M \notin d$, construim perpendiculara *din* punctul M, pe dreapta d.

Pasul 1. Fixați compasul cu acul în punctul M și trasați un cerc de rază convenabilă, așa încât cercul să intersecteze dreapta d în două puncte, pe care le notați cu R și S.



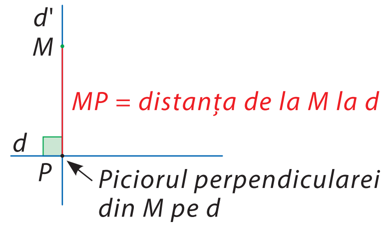


Pasul 2. Cu acul compasului în punctul R, trasați un cerc cu raza mai mare decât jumătate din distanța RS. Cu aceeași deschidere a compasului, trasați un cerc cu centrul în S.
Pasul 3. Notați cu T și U punctele de intersecție ale celor două cercuri.
Pasul 4. Trasați dreapta TU. Punctele T, M, U sunt coliniare și $TU \perp d$, deci $d' = TM$.
Ați construit astfel perpendiculara *din* punctul M, pe dreapta d. Scriem: $d' \perp d$ și $M \in d'$.

Distanța de la un punct la o dreaptă

Considerăm *M*, punct exterior dreptei *d*. Construim perpendiculara din *M* pe dreapta *d* și o notăm cu *d′*. Fie $\{P\} = d' \cap d$.

Punctul *P*, descris mai sus, se numește *piciorul perpendicularei* din punctul *M*, pe dreapta *d*.

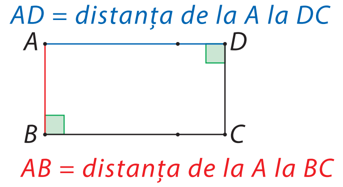


Definiție. Fie *M* este un punct exterior dreptei *d*. Se numește *distanța* de la punctul *M* la dreapta *d*, lungimea segmentului *MP*, unde *P* este piciorul perpendicularei din *M* pe *d*.

Dacă $M \in d$, distanța de la *M* la *d* este 0.

Exemplu. Dacă *ABCD* este dreptunghi, oricare două laturi sunt situate pe drepte perpendiculare. Piciorul perpendicularei din *A* pe *BC* este chiar punctul *B*, deci distanța de la *A* la *BC* este lungimea laturii *AB*.

În același mod, piciorul perpendicularei din *A* pe *CD* este chiar punctul *D*, deci distanța de la *A* la *CD* este lungimea laturii *AD*.



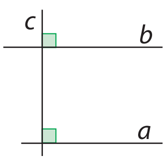
Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicația 1.

Două drepte distincte perpendiculare pe o a treia dreaptă sunt drepte paralele.

În limbajul simbolisticii matematice:

Dacă *a*, *b*, *c* sunt trei drepte cu $a \neq b$, $a \perp c$ și $b \perp c$, atunci $a \parallel b$.



Ipoteză.
$a \neq b$,
$a \perp c$ și $b \perp c$

Concluzie.
$a \parallel b$

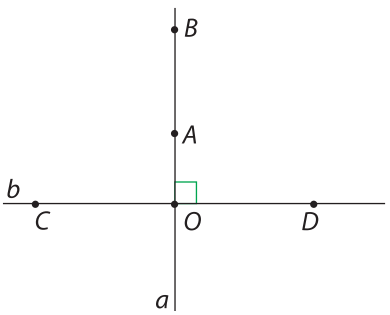
Demonstrație. Din $a \perp c$ și $b \perp c$, rezultă că dreptele *a* și *b* formează cu secanta *c* câte patru unghiuri drepte, deci obținem unghiuri corespondente congruente, de unde rezultă $a \parallel b$.

Observație. Rezultatul de mai sus constituie încă un criteriu de paralelism, adică o altă modalitate de a arăta că două drepte sunt paralele.

Problemă rezolvată. Dreptele *a* și *b* sunt perpendiculare și $a \cap b = \{O\}$. Punctele *A* și *B* sunt situate pe dreapta *a*, astfel încât $OA = 2$ cm și $OB = 5$ cm. Punctele *C* și *D* sunt situate pe dreapta *b*, astfel încât $OC = OD = 4$ cm.

Calculați distanțele:

a) de la *A* la *b*; **c)** de la *B* la *a*; **e)** de la *C* la *a*;
b) de la *B* la b; **d)** de la *D* la *a*; **f)** de la *D* la *b*.



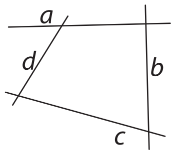
Rezolvare.

$a \perp b$, $a \cap b = \{O\}$, $A \in a$, $B \in a$. Atunci: **a)** distanța de la *A* la *b* este $AO = 2$ cm;
b) distanța de la *B* la *b* este $BO = 5$ cm;
c) distanța de la *B* la *a* este 0 cm.

$b \perp a$, $a \cap b = \{O\}$, $C \in b$, $D \in b$. Atunci: **d)** distanța de la *D* la *a* este $DO = 4$ cm;
e) distanța de la *C* la *a* este $CO = 4$ cm;
f) distanța de la *D* la *b* este 0 cm.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Măsurați cu ajutorul raportorului unghiurile din figura următoare, apoi alegeți litera care indică varianta corectă. Doar un răspuns este corect.



a) Dreptele care formează un unghi drept sunt:
A. *a* și *b*; **C.** *c* și *d*;
B. *b* și *c*; **D.** *d* și *a*.

b) Două drepte perpendiculare sunt:
A. *a* și *d*; **C.** *c* și *b*;
B. *d* și *c*; **D.** *b* și *a*.

2. Fie *a* o dreaptă oarecare și *A* un punct exterior dreptei *a*.
a) Trasați, cu ajutorul echerului, dreapta *b*, perpendiculară din punctul *A* pe dreapta *a*. Scrieți cu simboluri matematice relația dintre cele două drepte.
b) Trasați, cu ajutorul riglei, prin punctul *A*, o dreaptă *c*, oblică față de dreapta *a*. Scrieți cu simboluri matematice relația dintre cele două drepte.

3. Fie *b* o dreaptă oarecare și *B* un punct care aparține dreptei *b*.
a) Trasați, cu ajutorul echerului, dreapta *d*, perpendiculară în punctul *B* pe dreapta *b*. Scrieți cu simboluri matematice relația dintre cele două drepte.
b) Trasați, cu ajutorul riglei, o dreaptă *e*, oblică față de dreapta *b* și care conține punctul *B*. Scrieți cu simboluri matematice relația dintre cele două drepte.

4. Fie *d* o dreaptă oarecare și punctele distincte *M* și *N*, cel puțin unul exterior dreptei *d*.
a) Realizați un desen astfel încât $MN \perp d$.
b) Realizați un desen astfel încât $MN \not\perp d$.

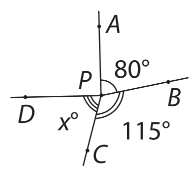
5. Desenați un pătrat *ABCD*.
Scrieți perechile de laturi ale pătratului situate pe drepte perpendiculare în prima coloană și perechile de laturi ale pătratului situate pe drepte care nu sunt perpendiculare, în coloana a doua, după model.

... $\perp$ ...	... $\not\perp$ ...
$AB \perp BC$	$AB \not\perp CD$

6. Unghiurile *AOB*, *BOC*, *COD*, *DOA* sunt unghiuri congruente în jurul punctului *O*.
Arătați că $AC \perp BD$.

7. Unghiurile *ABC* și *CBD* sunt adiacente suplementare, $\sphericalangle ABC = 120°$, *BE* este bisectoarea unghiului *ABC* și *BF* este bisectoarea unghiului *CBE*.
a) Realizați un desen care să corespundă datelor problemei.
b) Demonstrați că dreptele *AD* și *BF* sunt perpendiculare.

8. În jurul punctului *P* se consideră unghiurile *APB*, *BPC*, *CPD*, *DPA*.
Folosind datele din desenul următor, determinați numărul *x* astfel încât dreptele *AP* și *DP* să fie perpendiculare.



9. Reprezentați printr-un desen o dreaptă oarecare *a* și punctul *A* care nu aparține acesteia.
a) Construiți cu ajutorul echerului dreapta *AB*, astfel încât $AB \perp a$ și $B \in a$.
b) Măsurați cu rigla gradată lungimea segmentului *AB*.
c) Folosind datele obținute la subpunctele anterioare, completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:
p_1: Punctul *B* se numește … din …, pe … .
p_2: Distanța de la punctul *A* la dreapta *a* este de … cm.

10. Reprezentați printr-un desen o dreaptă oarecare d și punctele A, B, C, D așa încât $A \notin d$, $B \notin d$, $C \notin d$, $D \in d$.

a) Construiți $MA \perp d$, $NB \perp d$, $PC \perp d$, $QD \perp d$, cu $M \in d$, $N \in d$, $P \in d$.

b) Măsurați cu rigla gradată lungimile segmentelor MA, NB, PC, QD.

c) Copiați pe caiete propozițiile de mai jos, apoi, folosind datele obținute la subpunctele anterioare, completați spațiile libere pentru a obține enunțuri adevărate:

p_1: Punctul M se numește … din …, pe ….

p_2: Punctul D se numește … din …, pe ….

p_3: Distanța de la punctul B la dreapta d este de … cm.

p_4: Distanța de la punctul C la dreapta d este de … cm.

p_5: Distanța de la punctul D la dreapta d este de … cm.

11. Considerăm dreapta d și punctul P exterior dreptei d. Reprezentați $PA \perp d$, $A \in d$ și punctul B pe dreapta d, $B \neq A$.

a) Măsurați cu ajutorul riglei gradate lungimile segmentelor PA și PB. Folosind valorile găsite, alegeți dintre relațiile următoare pe cea care este adevărată.

A. $PA < PB$; **B.** $PA = PB$; **C.** $PA > PB$.

b) Determinați cu ajutorul raportorului măsurile unghiurilor PAB și PBA. Folosind valorile găsite, alegeți dintre relațiile următoare pe cea care este adevărată.

A. $\sphericalangle PAB < \sphericalangle PBA$;

B. $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBA$;

C. $\sphericalangle PAB > \sphericalangle PBA$.

12. Desenați dreapta a și punctele M, N, P situate la distanțele 2 cm; 3,5 cm, respectiv 5 cm, față de aceasta.

13. Fie $ABCD$ un dreptunghi, $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm, M mijlocul laturii AB și punctul N situat pe latura BC, cu $BN = 2 \cdot CN$.

a) Determinați lungimile segmentelor AM, BM, BN, CN.

b) Calculați distanțele de la punctul M la dreptele AD și BC.

c) Calculați distanțele de la punctul N la dreptele AB și CD.

14. Punctele A, B, C, D sunt coliniare în această ordine, $AB = 1{,}5$ cm, $BC = 3$ cm, $CD = 4{,}5$ cm. Se construiesc dreptele AM, BN, CP, DQ perpendiculare pe dreapta AB.

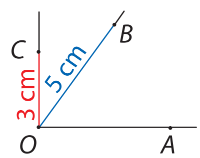
Calculați:

a) distanța de la punctul A la fiecare dintre dreptele AM, BN, CP, DQ.

b) distanța de la punctul C la dreapta AM și distanța de la punctul C la dreapta DQ.

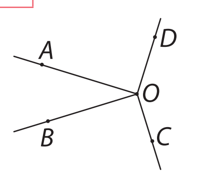
Minitest

1. Unghiurile AOB și BOC sunt adiacente complementare. Copiați pe caiete tabelul și, folosind datele din figura alăturată, completați în caseta liberă litera ***A***, dacă propoziția este adevărată, și litera ***F***, dacă propoziția este falsă.



	Propoziția	***A/F***
15 p	Măsura unghiului AOC este 90°.	
15 p	Punctul O nu este piciorul perpendicularei din A pe dreapta OC.	
15 p	$OB \not\perp OC$.	
15 p	Distanța de la punctul C la dreapta AO este de 3 cm.	
15 p	Distanța de la punctul B la dreapta CO este de 5 cm.	

15 p **2.** În figura alăturată, $OA \perp OD$, $OB \perp OC$ și $\sphericalangle AOC + \sphericalangle BOD = 240°$. Calculați măsura unghiului COD.



Notă: Timp de lucru 20 de minute. Se acordă 10 puncte din oficiu.

L2 Mediatoarea unui segment

Ne amintim

Distanța dintre două puncte A și B din plan este lungimea segmentului AB.

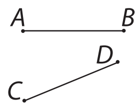
Dacă punctele A, B, C sunt coliniare, în această ordine, atunci între lungimile segmentelor AB, BC, AC are loc relația: $AC = AB + BC$.

Dacă între lungimile segmentelor AB, BC, AC are loc relația: $AC = AB + BC$, atunci punctele A, B, C sunt coliniare, în această ordine.

Două *figuri geometrice* se numesc *congruente* dacă, prin suprapunere, coincid.

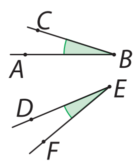
Două segmente, AB și CD, care prin suprapunere coincid se numesc *segmente congruente*.

Scriem $AB \equiv CD$ și citim segmentul AB este *congruent* cu segmentul CD (sau simplu: AB *congruent* cu CD).



Două unghiuri, ABC și DEF, care prin suprapunere coincid se numesc *unghiuri congruente*.

Scriem $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DEF$ și citim unghiul ABC este congruent cu unghiul DEF.



Dintre *proprietățile* relației de congruență, amintim proprietatea de tranzitivitate:

1. Dacă $AB \equiv CD$ și $CD \equiv EF$, atunci $AB \equiv EF$.

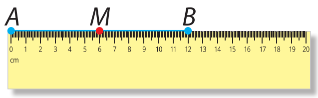
2. Dacă $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DEF$ și $\sphericalangle DEF \equiv \sphericalangle MNP$, atunci $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle MNP$.

Teoremă:

1. Dacă două segmente *sunt congruente*, atunci acestea *au aceeași lungime*.
2. Dacă două segmente *au aceeași lungime*, atunci acestea *sunt congruente*.
3. Dacă două unghiuri *sunt congruente*, atunci acestea *au aceeași măsură*.
4. Dacă două unghiuri *au aceeași măsură*, atunci ele *sunt congruente*.

Mijlocul segmentului AB este punctul M, situat pe segmentul AB, la distanță egală de capete ($AM = MB$).

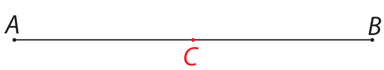
Punctul M, situat pe segmentul AB, este mijlocul acestuia dacă și numai dacă $MA \equiv MB$.



Dacă $AB = 12$ cm și M este mijlocul segmentului AB, atunci $AM = MB = 6$ cm.

Dacă $AB = 12$ cm și $AM = MB = 6$ cm, atunci M este mijlocul segmentului AB.

Fie C mijlocul segmentului AB.
Atunci, punctele A, C, B sunt coliniare și $AC = CB$.



Vom spune că:

- Punctul B este *simetricul punctului A față de punctul C*.
- Punctul A este *simetricul punctului B față de punctul C*.
- Punctele A și B *sunt simetrice față de punctul C*.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Definiție. Se numește *mediatoarea* segmentului AB, dreapta perpendiculară pe segmentul AB care conține mijlocul acestuia.

Construcția corectă a mediatoarei unui segment dat reprezintă un element important în rezolvarea problemelor. Aceasta se poate realiza cu rigla gradată și echerul sau cu compasul și rigla negradată.

Construcția cu rigla gradată și echerul

Dacă folosim rigla gradată și echerul, ne bazăm pe *cunoașterea lungimii* segmentului AB și pe faptul că mijlocul segmentului este punctul M cu $AM = MB = AB : 2$.

Pasul 1. Măsurăm, de la unul din capete, un segment de lungime $AB : 2$, suprapus pe segmentul dat și marcăm punctul M.

Pasul 2. Construim, folosind unghiul drept al echerului, dreapta d, perpendiculară pe AB, în punctul M. Dreapta d este mediatoarea segmentului AB.

Construcția cu rigla negradată și compasul

Dacă folosim *compasul și rigla negradată*, facem construcția fără a cunoaște lungimea segmentului.

Lucrare practică: Construcția mediatoarei unui *segment AB* cu rigla și compasul

Materiale necesare: caietul de matematică, compasul, o riglă negradată, un creion ascuțit.

Etapele de realizare a construcției

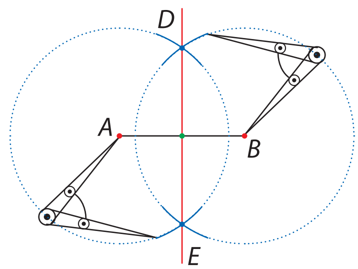
Pasul 1. Deschidem și blocăm compasul astfel încât distanța estimată dintre vârfurile sale să fie mai mare decât jumătate din lungimea segmentului AB, a cărei mediatoare urmează a fi construită.

Pasul 2. Fixăm acul compasului în punctul A și trasăm un cerc. Cu aceeași deschidere a compasului, trasăm un cerc cu centrul în B.

Pasul 3. Notăm cu D, respectiv E, punctele în care se intersectează cercurile construite la *pasul 2*.

Pasul 4. Trasăm dreapta DE, care este *mediatoarea* segmentului AB.

Reprezentare geometrică



Aplicație practică

Reprezentați geometric un segment AB cu lungimea de 6 cm. Construiți, cu ajutorul compasului și al riglei negradate, mediatoarea d a segmentului AB. Fie $\{M\} = d \cap AB$ și $N \in d$, $N \neq M$. Măsurați, cu ajutorul riglei gradate, lungimile segmentelor MA, MB, respectiv NA, NB.

Folosind rezultatele obținute, decideți care dintre relațiile următoare sunt adevărate:

$MA > MB$, $MA = MB$, $MA < MB$, $NA > NB$, $NA = NB$, $NA < NB$.

Răspuns. Oricare ar fi segmentul AB și oricare ar fi punctul N pe mediatoarea acestuia, prin măsurare, se obține $MA = MB$ și $NA = NB$.

Construcția mediatoarei unui segment cu ajutorul compasului, conform aplicației de mai sus, sugerează următorul rezultat foarte important:

Dacă d este mediatoarea segmentului AB și $M \in d$, atunci $MA \equiv MB$.

Dacă d este mediatoarea segmentului AB și $MA \equiv MB$, atunci $M \in d$.

Cele două afirmații de mai sus pot fi înlocuite cu următorul enunț, care caracterizează punctele de pe mediatoare:

Teoremă:

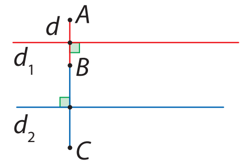
Mediatoarea unui segment este mulțimea punctelor din plan *egal depărtate* de capetele segmentului.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicația 1.

a) Dacă punctele A, B și C sunt coliniare, atunci, mediatoarele segmentelor AB și BC sunt paralele.
b) Dacă mediatoarele segmentelor AB și BC sunt paralele, atunci, punctele A, B și C sunt coliniare.

Soluție. Notăm cu d_1 mediatoarea segmentului AB și cu d_2 mediatoarea segmentului BC.

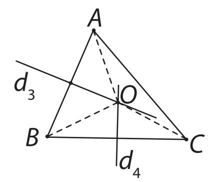


a) Punctul B este situat pe segmentul AC, prin urmare dreptele AB, AC, BC coincid. Fie d această dreaptă. Dreptele d_1 și d_2 sunt mediatoare, deci $d_1 \perp AB$ și $d_2 \perp BC$, adică d_1 și d_2 sunt *perpendiculare pe aceeași dreaptă d*. Mijloacele segmentelor AB și BC sunt de o parte și de alta a punctului B, deci sunt distincte.

Atunci, d_1 și d_2 sunt *perpendiculare pe aceeași dreaptă* în puncte distincte, deci $d_1 \parallel d_2$.

b) Presupunem că A, B, C nu sunt coliniare. Atunci putem prelungi segmentul AB care taie d_2 în D. Dreptele paralele d_1 și d_2 formează cu secanta BD unghiuri alterne interne congruente, deci $BD \perp d_2$. Dar, $BC \perp d_2$, iar prin punctul B, putem duce o unică dreaptă perpendiculară pe d_2. Rezultă că dreptele BD și BC coincid, adică A, B și C sunt coliniare.

Aplicația 2.



Desenați pe caiete punctele necoliniare A, B, C.

a) Construiți dreapta d_3, mediatoarea segmentului AB și dreapta d_4, mediatoarea segmentului BC.
b) Demonstrați că dreptele d_3 și d_4 sunt concurente într-un punct. Notați cu O acest punct.
c) Folosind teorema enunțată mai sus, deduceți că O aparține mediatoarei segmentului AC.

Soluție.

b) Presupunem că d_3 și d_4 nu sunt concurente, adică $d_3 \parallel d_4$. Atunci, conform *Aplicației* 1 **b)**, rezultă că A, B, C sunt coliniare, ceea ce contrazice ipoteza. Presupunerea că $d_3 \parallel d_4$ este falsă, iar d_3 și d_4 sunt concurente, deci există un punct O, astfel încât $d_3 \cap d_4 = \{O\}$.

c) Din $O \in d_3$, cum d_3 este mediatoarea segmentului AB, avem $OA \equiv OB$, iar din $O \in d_4$, cum d_4 este mediatoarea segmentului BC, avem $OB \equiv OC$; prin urmare, $OA \equiv OC$, ceea ce înseamnă că O este situat pe mediatoarea segmentului AC.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Reprezentați geometric segmentul AB cu lungimea de 6 cm, și punctul M, situat pe segmentul AB, astfel încât MA = 3 cm. Reprezentați dreapta d, perpendiculară în punctul M, pe dreapta AB. Copiați pe caiete și completați spațiile libere astfel încât să obțineți propoziții adevărate:

a) Punctul M este … segmentului … .
b) Unghiul format de dreapta d cu dreapta AB are măsura …°.
c) Dreapta d este … segmentului … .

2. Dreapta AB este mediatoarea segmentului CD și $AB \cap CD = \{M\}$. Scrieți în caseta liberă ***A***, dacă propoziția este adevărată și ***F***, dacă propoziția este falsă.

Propoziția	***A/F***
$AB \perp CD$.	
$CM = MD$.	
$\sphericalangle AMB = 90^\circ$.	
$\sphericalangle CMA = 90^\circ$.	

3. Desenați punctele coliniare A, B, C, cu $AB = 2$ cm și $BC = 6$ cm.

a) Construiți dreptele m_1 și m_2, mediatoarele segmentelor AB, respectiv BC.
b) Dacă $m_1 \cap AB = \{M\}$ iar $m_2 \cap BC = \{N\}$, calculați lungimea segmentului MN. Analizați toate cazurile posibile.

4. Desenați punctele necoliniare A, B, C. Construiți dreptele m_1, m_2 și m_3, mediatoarele segmentelor AB, BC, respectiv AC.

5. Dreptele a și b sunt mediatoarele segmentelor MN, respectiv PQ. Demonstrați că:

a) Dacă a și b sunt paralele, atunci MN și PQ sunt paralele sau coincid.

b) Dacă dreptele MN și PQ sunt paralele, atunci a și b sunt paralele sau coincid.

6. Fie d mediatoarea segmentului MN, $d \cap MN = \{O\}$, $MO = 3$ cm și A un punct situat pe d cu $AN = 5$ cm. Calculați:

a) lungimile segmentelor MN și AM;

b) suma $AM + MN + AN$.

Minitest

20 p **1.** Dacă punctele A, B, C sunt distincte și $AB = BC$, atunci punctul B aparține mediatoarei segmentului AC.

a) adevărat; **b)** fals.

20 p **2.** Dacă dreptele AB și d se intersectează în punctul C și $AC = BC$, atunci dreapta d este mediatoarea segmentului AB.

a) adevărat; **b)** fals.

20 p **3.** Dacă $d \perp AB$, $C \in d$ și $AC = BC$, atunci dreapta d este mediatoarea segmentului AB.

a) adevărat; **b)** fals.

30 p **4.** Dacă punctele A, B, C, D sunt coliniare în această ordine, $AB = 2$ cm, $AC = 5$ cm, $AD = 7$ cm, atunci segmentele AD și BC au aceeași mediatoare.

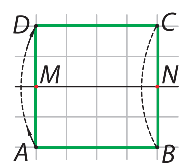
a) adevărat; **b)** fals.

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

L3 Simetrie față de o dreaptă

Ne amintim

O figură geometrică *are axă de simetrie* dacă există o dreaptă după care să ne putem imagina îndoirea planului astfel încât *cele două părți ale figurii*, situate în cele două semiplane delimitate de această dreaptă, *să fie congruente* deci *să coincidă prin suprapunere.*



Dreapta după care ne imaginăm îndoirea se numește *axă de simetrie* a figurii.

În imaginea de mai sus, dreapta MN este *axă de simetrie* pentru pătratul $ABCD$.

Punctul D este simetricul punctului A față de dreapta MN, îndoind „planul" după dreapta d, cele două puncte se suprapun. Identificați simetricele punctelor B, C, D, M, N, față de dreapta MN.

Observație. M este situat pe axa de simetrie, deci simetricul său față de axă este însuși punctul M.

Caroiajul paginii ne ajută să observăm:

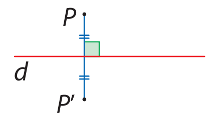
- *Simetricul fiecărui punct al pătratului* față de dreapta MN *este tot un punct al pătratului*, ceea ce justifică faptul că MN este axă de simetrie a pătratului.
- Distanța de la un punct al pătratului la axa MN este egală cu distanța de la simetricul acestuia la axa MN. De exemplu, A și D sunt simetrice față de dreapta MN; distanța de la A la dreapta MN este AM, distanța de la D la MN este DM și $AM = DM$.
- Dreapta MN este mediatoare pentru toate segmentele care au capetele puncte simetrice față de axa MN.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Folosind perpendicularitatea dreptelor și observațiile de mai sus, obținem:

Fie P un punct exterior dreptei d. *Simetricul punctului P față de dreapta d* este punctul P', cu proprietatea că d este mediatoarea segmentului PP'.

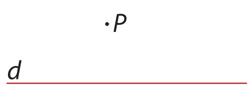
Dreapta d este *axă de simetrie* pentru mulțimea de puncte $\{P, P'\}$.



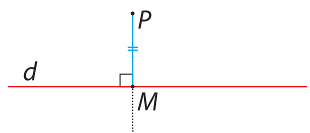
Observație. Dacă P' este simetricul punctului P față de dreapta d, atunci P este simetricul punctului P' față de dreapta d.

Am stabilit că simetricul unui punct P față de dreapta d este punctul P', unde $PP' \perp d$, iar P și P' sunt egal depărtate de dreapta d. Această abordare ne oferă o *tehnică* de reprezentare geometrică rapidă a simetricului unui punct față de o dreaptă.

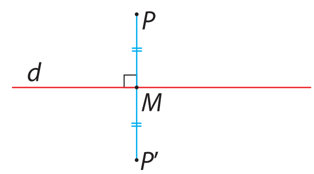
Pasul 1.
Se reprezintă dreapta d și punctul P.



Pasul 2.
Se construiește dreapta $PM \perp d$, $M \in d$.



Pasul 3.
Se marchează punctul P' pe dreapta PM, astfel încât M să fie mijlocul segmentului PP'.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

În practică, constatăm cu ușurință că simetrica unei figuri geometrice față de o dreaptă este o figură geometrică congruentă cu cea inițială, formată din *simetricele punctelor figurii date* față de axa dată.

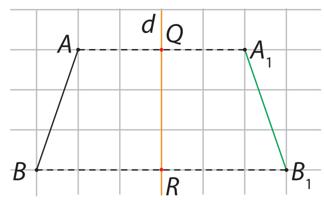
Ne propunem să stabilim ce reprezintă *simetricele unor figuri geometrice* simple față de o dreaptă dată.

Aplicația 1.

Simetricul segmentului AB față de dreapta d este segmentul A_1B_1, unde A_1 este simetricul lui A față de dreapta d, iar B_1 este simetricul lui B față de dreapta d.

a) Realizați pe caiete un desen după modelul celui din imaginea alăturată.

b) Verificați cu ajutorul compasului congruența $AB \equiv A_1B_1$.



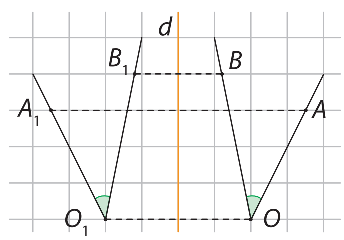
Segmentul A_1B_1 este simetricul segmentului AB față de dreapta d, iar segmentul AB este simetricul segmentului A_1B_1 față de dreapta d. Dreapta d este *axă de simetrie* pentru reuniunea segmentelor AB și A_1B_1.

Aplicația 2.

Simetricul unghiului AOB, oarecare, față de dreapta d, este unghiul $A_1O_1B_1$, unde: A_1 este simetricul lui A față de dreapta d; O_1 este simetricul lui O față de dreapta d și B_1 este simetricul lui B față de dreapta d.

a) Realizați pe caiete un desen după modelul celui din imaginea alăturată.

b) Verificați cu ajutorul raportorului congruența $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle A_1O_1B_1$.



Unghiul $A_1O_1B_1$ este *simetricul* unghiului AOB, față de dreapta d, iar unghiul AOB este *simetricul* unghiului $A_1O_1B_1$, față de dreapta d.

Dreapta d este *axă de simetrie* pentru mulțimea punctelor celor două unghiuri.

Concluzie.

1. Simetricul unui segment față de o dreaptă este un segment congruent cu cel inițial.

2. Simetricul unui unghi față de o dreaptă este un unghi congruent cu cel inițial.

Temă de portofoliu.

1. a) Reprezentați pe o folie transparentă flexibilă un unghi *AOB* și bisectoarea *OC* a acestuia.

b) Probați, prin îndoire și suprapunere, că bisectoarea unghiului este axă de simetrie a unghiului dat.

2. a) Reprezentați pe o folie transparentă flexibilă un segment *AB* și mediatoarea *d* a acestuia.

b) Demonstrați, prin îndoire și suprapunere că mediatoarea unui segment este axă de simetrie pentru acel segment.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. a) Reprezentați, pe dreapta *d*, punctele *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, în această ordine, $AB = BC = EF = 2$ cm, $CD = DE = 3$ cm și dreptele *BM*, *CN*, *DP* perpendiculare pe dreapta *d*.

b) Copiați pe caiete și completați spațiile libere așa încât propozițiile următoare să fie adevărate.

p_1: Punctele *A* și *C* sunt simetrice față de dreapta … .

p_2: Punctul *E* este simetricul punctului … față de dreapta *DP*.

2. Punctul *S* este simetricul punctului *A* față de dreapta *d* și $AS \cap d = \{B\}$.

Dacă $AS = 8$ cm, calculați lungimile segmentelor *AB* și *SB*.

3. Fie *ABCD* un pătrat și punctul *E* simetricul punctului *B* față de dreapta *AD*.

a) Demonstrați că punctele *A*, *B*, *E* sunt coliniare.

b) Demonstrați că *AD* este mediatoarea segmentului *BE*.

4. Reprezentați geometric punctele *A*, *O*, *B*, astfel ca unghiul *AOB* să fie drept, iar $AO = 2{,}5$ cm și $OB = 4$ cm.

Construiți punctul *C*, simetricul punctului *A* față de punctul *O* și *D*, simetricul punctului *B* față de punctul *O*. Demonstrați că:

a) $\sphericalangle AOC = \sphericalangle BOD = 180°$;

b) *OB* este mediatoarea segmentului *AC*;

c) punctul *C* este simetricul punctului *A* față de dreapta *OB*;

d) punctul *B* este simetricul punctului *D* față de dreapta *AC*.

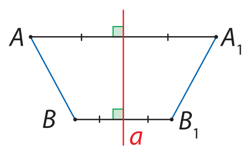
5. Punctele *A*, *B*, *C*, *D* sunt coliniare, punctul *B* este simetricul punctului *A* față de dreapta *d*, iar punctul *D* este simetricul punctului *C* față de dreapta *d*.

a) Realizați un desen care să corespundă datelor problemei.

b) Demonstrați că $AC \equiv BD$, în oricare din cazurile posibile de ordonare a punctelor A, B, C, D.

Minitest

1. În desenul alăturat, dreapta *a* este mediatoarea segmentelor AA_1 și BB_1. Copiați pe caiete și completați spațiile libere așa încât să obțineți propoziții adevărate.



15 p **a)** Dreapta *a* este … pentru figura geometrică reprezentată cu albastru.

15 p **b)** Segmentul A_1B_1 este … segmentului *AB* față de dreapta *a*.

2. Pe segmentul *AB,* cu lungimea de 10 cm, se consideră punctele *C*, *D*, *E* astfel încât $AC = CB$, $AD = 2{,}5$ cm, $BE = 1{,}5$. Se construiește dreapta *d*, perpendiculară pe dreapta *AB,* în punctul *D*.

20 p **a)** Realizați un desen care să corespundă datelor problemei.

20 p **b)** Demonstrați că punctul *C* este simetricul punctului *A* față de dreapta *d*.

20 p **c)** Calculați distanțele de la punctele *B* și *E* la dreapta *d*.

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

5.4. Cercul

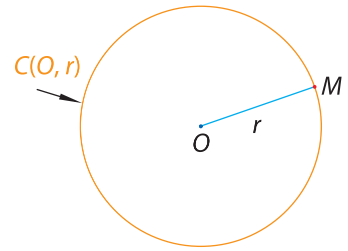
L1 Cercul. Elemente în cerc

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Numeroasele sensuri ale cuvântului „cerc” au la bază forma *perfectă* a figurii geometrice cu acest nume. Identificați, folosind dicționarul, patru sensuri distincte ale cuvântului „cerc”.

Cercul, în sens geometric, este *modelul matematic* al multor obiecte sau activități din viața cotidiană. Numiți patru activități în care se folosesc obiecte în formă de cerc sau în care se folosește cercul ca formă de organizare.

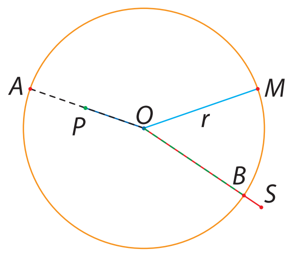
Definiție. Fie O un punct fix, oarecare, în plan și r un număr pozitiv. Se numește *cerc* de centru O și rază r mulțimea punctelor din plan situate la distanța r de punctul O.



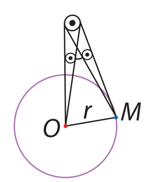
O este centrul cercului.
OM este rază a cercului.
$M \in C(O, r)$ și $OM = r$.

Notăm $C(O, r)$ și citim cercul de centru O și rază r.

Observație. Dacă $M \in C(O, r)$, vom numi rază a cercului atât segmentul OM, cât și lungimea r a acestuia.

În raport cu cercul $C(O, r)$, orice punct din plan este situat: pe *cerc*, în *interiorul* cercului sau în *exteriorul* cercului.		*În limbajul simbolisticii matematice*
• Dacă M este un punct oarecare al cercului $C(O, r)$, atunci $MO = r$. Dacă M este un punct al planului cu proprietatea $MO = r$, atunci M este situat pe cercul $C(O, r)$.	În figura de mai sus:	• Dacă $M \in C(O, r)$, atunci $MO = r$. Dacă $MO = r$, atunci $M \in C(O, r)$.
• Dacă un punct P din plan aparține *interiorului* cercului $C(O, r)$, atunci $PO < r$. Dacă P este un punct în plan cu $PO < r$, atunci P aparține interiorului cercului $C(O, r)$.	• $M \in C(O, r)$; $A \in C(O, r)$; $B \in C(O, r)$ și $OM = OA = OB = r$. • $OP < OA$ și $OA = r$, deci $OP < r$ și $P \in \text{Int}C(O, r)$	• Dacă $P \in \text{Int}C(O, r)$, atunci $PO < r$. Dacă $PO < r$, atunci $P \in \text{Int}C(O, r)$.
• Dacă un punct S din plan aparține *exteriorului* cercului $C(O, r)$, atunci $SO > r$. Dacă S este un punct în plan cu $SO > r$, atunci S aparține exteriorului cercului $C(O, r)$.	• $OS > OB$ și $OB = r$, deci $OS > r$ și $S \in \text{Ext}C(O, r)$.	• Dacă $S \in \text{Ext}C(O, r)$, atunci $SO > r$. Dacă $SO > r$, atunci $S \in \text{Ext}C(O, r)$.

Construcția cercului de rază $r = OM$, cu ajutorul compasului



Pasul 1. Fixăm punctul O, centrul cercului.

Pasul 2. Luăm în deschiderea compasului r unități și fixăm compasul cu vârful ac în punctul O.

Pasul 3. Notăm cu M punctul în care vârful creion atinge pagina.

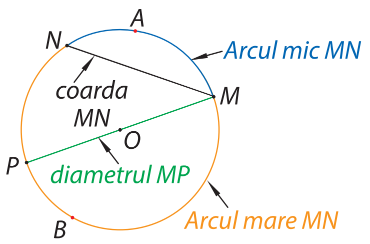
Pasul 4. Păstrând acul fixat în punctul O, rotim vârful creion până ajunge din nou în punctul M.

Am obținut cercul de centru O și rază r. Dacă schimbăm doar centrul, raza rămânând r, obținem un cerc *congruent* cu cel inițial (prin suprapunere, coincid).

Prin urmare, cercurile $C_1(O_1, r_1)$ și $C_2(O_2, r_2)$ sunt congruente dacă $r_1 = r_2$.

Fie M și N două puncte distincte ale cercului $\mathcal{C}(O, r)$.

- Segmentul MN se numește *coardă* a cercului $\mathcal{C}(O, r)$.
- Orice coardă a cercului care conține centrul acestuia se numește *diametru*.
- Dacă MN este diametru, atunci punctele M și N se numesc *puncte diametral opuse*.
- Mulțimea punctelor situate pe cerc, de aceeași parte a coardei MN, la care adăugăm punctele M și N, se numește *arc de cerc* și îl notăm $\overset{\frown}{MN}$.



Oricare două puncte distincte ale unui cerc determină două arce de cerc pe care le diferențiem, de regulă, folosind notații cu trei litere.

În limbajul simbolisticii matematice

- $M \in \mathcal{C}(O, r)$, $N \in \mathcal{C}(O, r)$ și $M \neq N$. Segmentul MN este coardă.
- Segmentul MP este *coardă* și $O \in MP$. Coarda MP este *diametru* al cercului.
- Punctele M și P sunt *diametral opuse*.
- Arcul mic MN se notează $\overset{\frown}{MAN}$. Arcul mare MN se notează $\overset{\frown}{MBN}$.

Arcul format cu punctele cercului, situate de aceeași parte a coardei cu centrul cercului, se numește *arc mare*, iar cel situat de cealaltă parte a coardei se numește *arc mic* al cercului.

Observație. Diametrul este cea mai mare coardă a unui cerc.

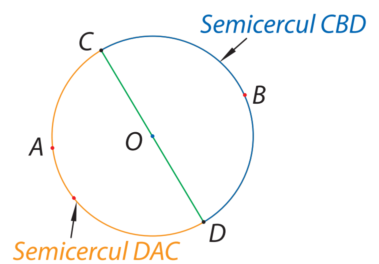
Dacă MN este diametru și r este raza cercului, atunci $MN = 2r$.

Arcele de cerc determinate de un diametru se numesc *semicercuri*.

CD este diametru, deci $\overset{\frown}{DAC}$ și $\overset{\frown}{DBC}$ sunt *semicercuri*.

Stabiliți câte diametre ale cercului $\mathcal{C}(O, r)$ se pot construi.

Desenați un cerc pe o foaie volantă și trasați un diametru al acestui cerc. Îndoiți foaia după dreapta suport a diametrului. Găsiți o justificare a faptului că arcele determinate de un diametru se numesc *semicercuri*.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicație.

Se consideră cercul de centru O și rază $r = 3$ cm. În plan, se dau punctele A, B, C, D, astfel încât $AO = 5$ cm, $BO = 1$ cm, C, O, D sunt coliniare, în această ordine, $CO = 3$ cm și $CD = 6$ cm.

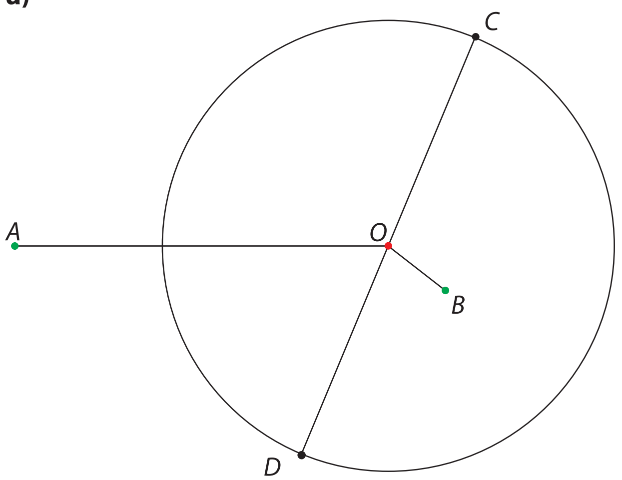
a) Realizați, folosind compasul și rigla gradată, un desen care să corespundă datelor problemei.

b) Copiați pe caiete tabelul, apoi completați în caseta liberă corespunzătoare litera ***A***, dacă afirmația este adevărată, și litera ***F***, dacă propoziția este falsă.

Afirmația	***A/F***
A_1: Punctul A este situat în interiorul cercului.	
A_2: Punctele C și D sunt diametral opuse.	
A_3: Punctul B este centrul cercului.	
A_4: Punctele O și B sunt situate în interiorul cercului.	
A_5: Punctul A este situat în exteriorul cercului.	
A_6: Cercul este o mulțime infinită de puncte.	
A_7: Interiorul cercului este o mulțime finită de puncte.	

Soluție.

a)



b) O este centrul cercului și $OA > 3$, deci $A \in \text{Ext}\mathcal{C}(O, 3)$.

$OC = OD = 3$ cm și $r = 3$ cm, iar O, C, D sunt coliniare, deci CD este diametru, adică C și D sunt diametral opuse.

O este centrul cercului și $B \neq O$, deci B nu este centrul cercului.

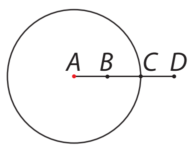
$OB = 1 < 3 = r$, iar $OO = 0 < 3 = r$, deci $OB < r$ și $OO < r$, adică $B \in \text{Int}\mathcal{C}(O, 3)$ și $O \in \text{Int}\mathcal{C}(O, 3)$.

$OA = 5 > 3 = r$, deci $OA > r$, adică $A \in \text{Ext}\mathcal{C}(O, 3)$.

Obținem: $(A_1 \to F)$; $(A_2 \to A)$; $(A_3 \to F)$;
$(A_4 \to A)$; $(A_5 \to A)$; $(A_6 \to A)$;
$(A_7 \to F)$.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Punctele distincte A, B, C, D sunt coliniare și $AB = BC = CD = 2$ cm. Observați desenul următor, copiați textul pe caiete și completați spațiile libere pentru a obține afirmații adevărate.



Cercul reprezentat are centrul …, iar lungimea razei sale este de … cm.
Punctul B este situat în … cercului.
Punctul D este situat în … cercului.
Punctul C aparține … .

2. Realizați un desen, construind succesiv:
- **a)** cercul de centru O și rază 3 cm;
- **b)** raza OA a acestui cerc;
- **c)** diametrul BC al cercului;
- **d)** o coardă DE a cercului.

3. Segmentului AB are lungimea de 12 cm, iar P este un punct al său.
- **a)** Construiți cercurile $\mathcal{C}_1$ de diametru AP, respectiv $\mathcal{C}_2$, de diametru BP.
- **b)** Calculați distanța dintre centrele cercurilor de la subpunctul **a)**.

4. Punctele O, A, B, C, D, E sunt distincte și $OA = 3$ cm, $OB = 30$ mm, $OC = 0{,}03$ dm, $OD = 0{,}3$ m, $OE = 0{,}(3)$ dm, iar F este simetricul punctului A față de O. Desenați cercul $\mathcal{C}$, de centru O și rază 3 cm, apoi precizați:
- **a)** punctele reprezentate pe cercul $\mathcal{C}$;
- **b)** punctele reprezentate în interiorul cercului $\mathcal{C}$;
- **c)** punctele reprezentate în exteriorul cercului $\mathcal{C}$.

5. Desenați un cerc de centru O și rază r, apoi reprezentați punctul A în interiorul cercului, punctele B și C pe cerc, O pe segmentul BC și punctul D în exteriorul cercului. Copiați pe caiete și completați spațiile libere cu unul dintre simbolurile <, =, >, așa încât să obțineți relații adevărate.

a) $AO \ldots r$	**c)** $CO \ldots r$	**e)** $BC \ldots 2 \cdot r$
b) $BO \ldots r$	**d)** $DO \ldots r$	**f)** $AB \ldots BC$.

6. Pe cercul de centru O și rază 5 cm, se consideră punctele distincte M, N și P, cu $O \in MN$.
Copiați tabelul pe caiete, apoi scrieți în caseta liberă litera ***A***, dacă propoziția este adevărată, și litera ***F***, dacă propoziția este falsă.

Propoziția	***A/F***
$ON = 5$ cm.	
$MP < 10$ cm.	
$MN = 10$ cm.	
Perimetrul triunghiului MOP este de cel puțin 20 cm.	

Minitest

Alegeți litera care indică varianta corectă. Doar un răspuns este corect.

20 p **1.** Segmentul care unește centrul cercului cu un punct de pe cerc se numește:
A. coardă; **B.** diametru; **C.** rază; **D.** arc de cerc.

20 p **2.** Segmentul care unește două puncte ale unui cerc se numește:
A. coardă; **B.** rază; **C.** semicerc; **D.** arc de cerc.

20 p **3.** Dacă punctele *A* și *B* sunt diametral opuse pe un cerc cu raza 3,5 cm, atunci *AB* are lungimea:
A. 3,5 cm; **B.** 4,5 cm; **C.** 6 cm; **D.** 7 cm.

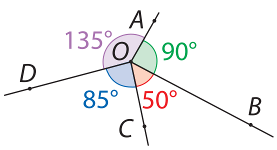
30 p **4.** Dacă cea mai lungă coardă a unui cerc este de 10 cm, atunci raza cercului este egală cu:
A. 20 cm; **B.** 5 cm; **C.** 10 cm; **D.** 40 cm.

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

L2 Unghi la centru. Măsura unghiului la centru

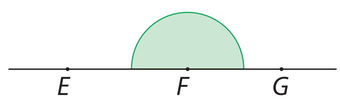
Ne amintim

Suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct este de 360°.



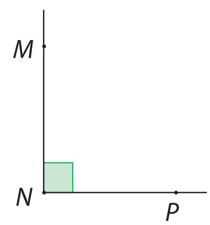
$90° + 50° + 85° + 135° = 360°$

Măsura unui unghi alungit este de 180°.



$\sphericalangle EFG = 180^\circ$

Măsura unui unghi drept este de 90°.



$\sphericalangle MNP = 90^\circ$

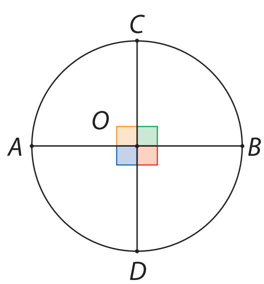
Rezolvăm și observăm

1. a) Construiți pe o foaie volantă un cerc cu raza egală cu raza cercului din care provine semicercul mare al raportorului vostru. Trasați diametrele perpendiculare *AB* și *CD*.

b) Precizați, argumentat, măsurile unghiurilor: *AOB*, *AOC*, *AOD*, *BOC*, *BOD*, *COD*.

c) Folosind raportorul, urmăriți corespondența între măsura unghiurilor de la subpunctul **b)** și gradația înscrisă pe *arcul* raportorului pentru a deduce măsura arcelor de cerc corespunzătoare acestor unghiuri.

d) Îndoiți foaia după unul din diametre și stabiliți dacă $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{CB}$, $\overset{\frown}{BD}$, $\overset{\frown}{DA}$ coincid două câte două, prin suprapunere.



Soluție. **a)** Desenul de mai sus.

b) Din $AB \perp CD$, rezultă că semidreptele *OA*, *OB*, *OC*, *OD* formează în jurul punctului *O* patru unghiuri drepte: $\sphericalangle AOC = \sphericalangle AOD = \sphericalangle BOD = \sphericalangle BOC = 90°$. Pe de altă parte, *A*, *O*, *B* sunt coliniare, în această ordine, și *C*, *O*, *D* sunt coliniare, în această ordine. Atunci, $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD = 180°$.

c) Notăm arcele mici cu două litere și arcele mari cu trei litere, pentru a le distinge.

Atunci, $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DA} = 90^\circ$, $\overset{\frown}{ADC} = \overset{\frown}{BDC} = \overset{\frown}{BCD} = \overset{\frown}{DBA} = 360° - 90° = 270°$.

Apoi, $\overset{\frown}{ACB} = \overset{\frown}{BDA} = \overset{\frown}{CBD} = \overset{\frown}{CAD} = 180^\circ$.

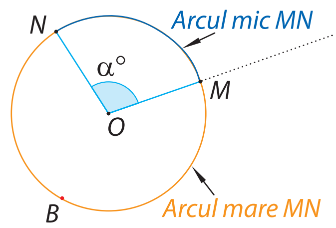
d) Dacă îndoim foaia după *CD*, atunci $\overset{\frown}{AC}$ coincide cu $\overset{\frown}{CB}$, iar $\overset{\frown}{BD}$ coincide cu $\overset{\frown}{DA}$.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Definiție. Un unghi cu vârful în centrul cercului se numește *unghi la centru*.

Arcul mic determinat de punctele de intersecție dintre laturile unui unghi la centru și cerc se numește *arcul subîntins* de unghiul la centru.

Unghiul la centru care subîntinte un arc mic se numește *unghi la centru corespunzător* acestui arc.



Măsura unui *arc mic* al cercului este egală cu măsura *unghiului la centru* corespunzător acestui arc.

Măsura cercului este egală cu suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct, adică 360°.

Măsura unui *arc mare* al cercului este egală cu diferența dintre 360° și măsura *arcului mic* corespunzător.

Dacă $\sphericalangle MON = \alpha^\circ$, atunci $\overset{\frown}{MN} = \alpha^\circ$, iar $\overset{\frown}{MBN} = 360^\circ - \alpha^\circ$.

Dacă $\overset{\frown}{MN} = \alpha^\circ$, atunci $\sphericalangle MON = \alpha^\circ$, iar $\overset{\frown}{MBN} = 360^\circ - \alpha^\circ$.

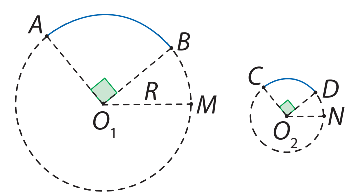
Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Ne amintim că cercurile $C_1(O_1, r_1)$ și $C_2(O_2, r_2)$ sunt congruente dacă $r_1 = r_2$.

Definiție. Într-un cerc, sau *în cercuri congruente, două arce* sunt congruente dacă au aceeași măsură. Pentru arcele congruente $\overset{\frown}{AB}$ și $\overset{\frown}{CD}$ scriem $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CD}$.

Observație:
Nu este suficient ca arcele să aibă aceeași măsură pentru a putea spune că acestea sunt congruente. Este esențial ca acestea să fie arce ale aceluiași cerc sau ale unor cercuri congruente.

În figura alăturată avem $\overset{\frown}{AB} = 90^\circ$ și $\overset{\frown}{CD} = 90^\circ$, deci arcele au aceeași măsură. Totuși, se observă ușor că arcele nu sunt congruente (nu vor coincide prin suprapunere).

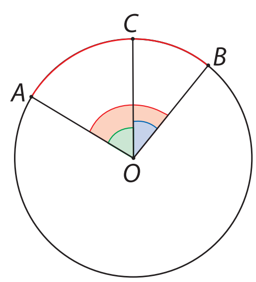


Aplicație. Dacă punctele A, B, C aparţin cercului $C(O, r)$, iar $C \in \overset{\frown}{AB}$, unde $\overset{\frown}{AB}$ este un arc mic, atunci $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CB}$.

Soluție. Identificăm unghiurile la centru AOC, COB, AOB. Observăm că $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle COB$ sunt adiacente cu OC în interiorul $\sphericalangle AOB$, deci

$\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOC + \sphericalangle COB$.

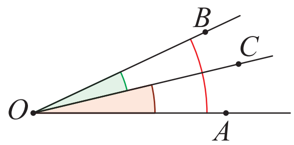
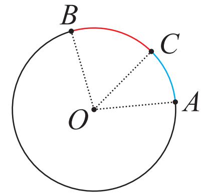
Folosind faptul că măsura unui arc mic de cerc este egală cu măsura unghiului la centru corespunzător, rezultă că $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CB}$.



Temă de portofoliu. Demonstrați afirmația de mai sus și pentru cazul când $\overset{\frown}{AB}$ este un arc mare al cercului identificând cazul în care arcele AC și BC sunt arce mici și cazul în care unul dintre ele este arc mare.

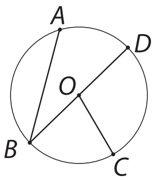
Teoremă: Dacă punctele A, B, C aparțin cercului $\mathcal{C}(O, r)$ și $C \in \overset{\frown}{AB}$, atunci $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CB}$.

În practică, sunt utile următoarele rezultate:

AB este segment și $C \in AB$	$OC \in Int(\sphericalangle AOB)$	A, B, C aparțin aceluiași cerc și $C \in \overset{\frown}{AB}$
		
$AB = AC + CB$	$\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOC + \sphericalangle COB$	$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CB}$

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Punctele A, B, C, D aparțin cercului de centru O.



Folosind desenul, precizați:
a) o rază a cercului;
b) două puncte diametral opuse;
c) o coardă a cercului, care nu este diametru;
d) un unghi la centru;
e) un semicerc;
f) un arc mic al cercului;
g) un arc mare al cercului;
h) un arc de 180°.

2. Într-un cerc de centru O, reprezentați și notați, folosind instrumentele geometrice:
a) un unghi la centru cu măsura 50°;
b) un arc de cerc cu măsura 50°;
c) un arc de cerc cu măsura 90°.

3. **a)** Desenați un cerc, apoi reprezentați arcul de cerc AB cu măsura de 60° și arcul de cerc CD cu măsura de 120°.
b) Trasați coardele corespunzătoare arcelor de la subpunctul **a)**.
c) Determinați, cu ajutorul riglei gradate, lungimile coardelor și precizați care este mai mare.

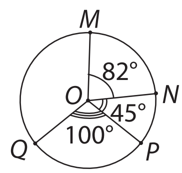
4. Punctele A, B, C sunt situate pe un cerc de centru O astfel încât A, O și C sunt coliniare, iar $BO \perp AC$. Determinați măsurile arcelor $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{ABC}$.

5. Pe cercul de centru A se consideră punctele distincte M, N, P astfel încât $\sphericalangle MAN \equiv \sphericalangle NAP \equiv \sphericalangle PAM$.
a) Determinați măsurile arcelor MN, NP, PM.
b) Dacă MQ este diametru al cercului, determinați măsura arcului mic și a arcului mare PQ.

6. Pe cercul de centru O, se consideră punctele distincte A, B, C, D astfel încât arcele AB, BC, CD, DA să fie congruente.
a) Determinați măsurile celor patru arce.
b) Arătați că AC și BD sunt diametre ale cecului.
c) Demonstrați că $AC \perp BD$.

7. Fie un cerc de centru O și A, B, C puncte ale sale, astfel încât $\sphericalangle AOB = 35°$ și $OC \perp OB$.
a) Dacă B este situat în interiorul unghiului AOC, calculați măsurile arcelor mici AB, BC, AC.
b) Dacă B este situat în exteriorul unghiului AOC, calculați măsurile arcelor mari AB, BC, AC.

8. Punctele M, N, P, Q sunt situate pe un cerc de centru O. Folosind notațiile din desen, determinați:
a) măsura unghiului MOQ;
b) măsura arcului mic MQ și măsura arcului NMQ.



Minitest

Alegeți litera care indică varianta corectă. Doar un răspuns este corect.

30 p **1.** Un cerc are măsura egală cu:

A. 90°; **B.** 180°; **C.** 0°; **D.** 360°.

30 p **2.** Dacă punctele *C* și *D* sunt diametral opuse pe un cerc, atunci măsura arcului *CD* este:

A. 180°; **B.** 90°; **C.** 60°; **D.** 360°.

30 p **3.** Punctele *E* și *F* aparțin unui cerc de centru *O*, iar $\sphericalangle EOF = 90°$. Măsura arcului mare *EF* este:

A. 180°; **B.** 90°; **C.** 270°; **D.** 360°.

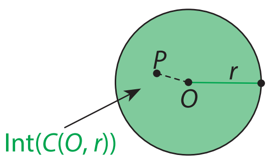
Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

L3 Poziții relative ale unei drepte față de un cerc. Poziții relative a două cercuri

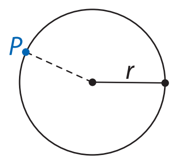
Ne amintim

Fie $C(O, r)$ cercul de centru *O* și rază *r*. Un punct *P*, oarecare din plan, poate fi în interiorul cercului, pe cerc sau în exteriorul cercului.

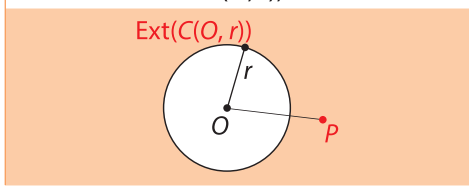
$P \in \text{Int}C(O, r)$, $OP < r$



$P \in C(O, r)$, $OP = r$

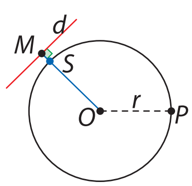
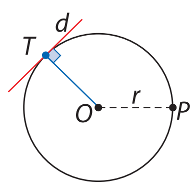
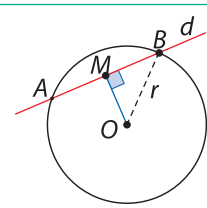


$P \in \text{Ext}C(O, r)$, $OP > r$



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Considerăm cercul $C(O, r)$ și o dreaptă oarecare *d*. Se pune problema determinării numărului de puncte pe care dreapta și cercul le au în comun. Intuitiv, identificăm următoarele trei situații:

Poziția dreptei *d* față de cercul $C(O, r)$	*d* este *exterioară* cercului.	*d* este *tangentă* la cerc. Punctul *T* este *punctul de tangență*.	*d* este *secantă* cercului. *A* și *B* sunt punctele în care *d* taie cercul.
Numărul punctelor comune	Dreapta și cercul nu au niciun punct comun. $C(O, r) \cap d = \varnothing$	Dreapta și cercul au exact *un punct comun*. $C(O, r) \cap d = \{T\}$	Dreapta și cercul au exact *două puncte comune*. $C(O, r) \cap d = \{A, B\}$
Reprezentare geometrică	 $d \subset \text{Ext}C(O, r)$	 $(d \setminus \{T\}) \subset \text{Ext}C(O, r)$	 $d \cap \text{Int}C(O, r) = AB$
Relația între distanța de la *O* la dreapta *d* și raza cercului	$OM \perp d$ și $OM > r$. $M \in d$	$OT \perp d$ și $OT = r$.	$OM \perp d$ și $OM < r$. $M \in d$

Observații.

1. O dreaptă nu poate avea trei puncte distincte, comune cu un cerc. Prin urmare, *oricare trei puncte distincte ale unui cerc sunt necoliniare*.

2. *Tangenta* la un cerc este *perpendiculară pe raza* care conține punctul de tangență.

Aplicație practică: Poziții relative a două cercuri

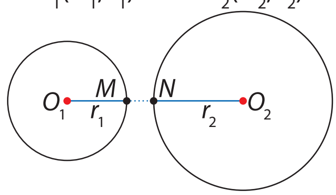
Materiale necesare: două cercuri $C_1(O_1, r_1)$, $C_2(O_2, r_2)$ cu $r_1 < r_2$ și cu razele mai mici de 5 cm, din sârmă sau din alt material cu centrul marcat pe un diametru din același material, o riglă gradată, o foaie A4.

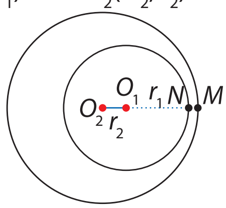
Pasul 1. Fixați O_1 pe foaia A4, apoi așezați și fixați cercul $C_1(O_1, r_1)$ pe foaie.

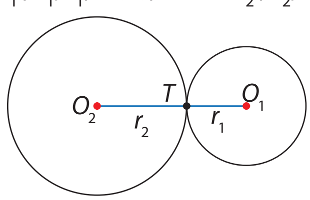
Pasul 2. Plimbați cercul $C_2(O_2, r_3)$ pe planul foii, schimbând distanța O_1O_2 și stabiliți numărul punctelor pe care cele două cercuri le au în comun, în fiecare caz identificat.

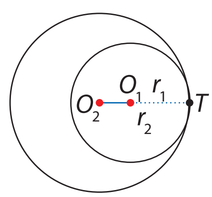
Pasul 3. Realizați pe caiet, folosind compasul, câte un desen pentru fiecare caz identificat.

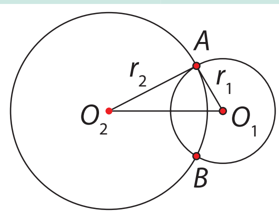
Activitatea anterioară ne ajută să constatăm următoarele:

<table>
<tr><th>Numărul punctelor comune și poziția celor două cercuri</th><th colspan="2">Reprezentare geometrică</th></tr>
<tr><td>0 puncte comune
Cercuri disjuncte
$C_1(O_1, r_1) \cap C_2(O_2, r_2) = \varnothing$</td><td>1. Fiecare cerc este inclus în exteriorul celuilalt.
$C_2(O_2, r_2) \subset ExtC_1(O_1, r_1)$ și
$C_1(O_1, r_1) \subset ExtC_2(O_2, r_2)$


$O_1O_2 > r_1 + r_2$</td><td>2. Cercul cu raza mai mică este inclus în interiorul celuilalt.
$C_1(O_1, r_1) \subset IntC_2(O_2, r_2)$


$0 \le O_1O_2 < r_2 - r_1$
Dacă O_1 și O_2 coincid, cercurile se numesc cercuri concentrice.</td></tr>
<tr><td>1 punct comun
Cercuri tangente
$C_1(O_1, r_1) \cap C_2(O_2, r_2) = \{T\}$</td><td>1. Cercuri tangente exterior, când toate punctele unuia din cercuri, diferite de cel comun, sunt în exteriorul celuilalt.
$(C_2(O_2, r_2) \setminus \{T\}) \subset ExtC_1(O_1, r_1)$ și
$(C_1(O_1, r_1) \setminus \{T\}) \subset ExtC_2(O_2, r_2)$


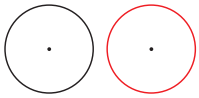
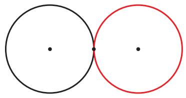
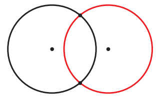
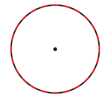
$O_1O_2 = r_1 + r_2$</td><td>2. Cercuri tangente interior, când toate punctele cercului cu raza mai mică, diferite de punctul comun, sunt în interiorul celuilalt.
$(C_1(O_1, r_1) \setminus \{T\}) \subset IntC_2(O_2, r_2)$


$O_1O_2 = r_2 - r_1$</td></tr>
<tr><td>2 puncte comune
Cercuri secante
$C_1(O_1, r_1) \cap C_2(O_2, r_2) = \{A, B\}$</td><td colspan="2">

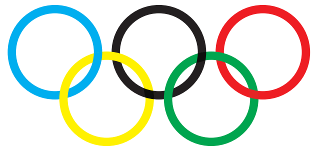
$O_1O_2 > r_2 - r_1$ și $O_1O_2 < r_1 + r_2$</td></tr>
</table>

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Un caz particular interesant este cel al pozițiilor relative pe care le pot avea două cercuri congruente, și anume:

cercuri exterioare congruente	cercuri tangente exterior congruente	cercuri secante congruente	cercuri concentrice congruente (identice)
			

Aplicație. Imaginea alăturată este o copie mai mică a drapelului olimpic. Notăm cele cinci cercuri olimpice cu: A, N, R, G, V, în funcție de culoare.



a) Identificați în imagine perechi de cercuri exterioare și precizați numărul lor.

b) Identificați în imagine perechi de cercuri secante și precizați numărul lor.

c) Stabiliți dacă există cercuri tangente între cele cinci.

Soluție. **a)** Sunt șase perechi de cercuri exterioare: $A \cap N = A \cap R = A \cap V = N \cap R = G \cap V = G \cap R = \varnothing$.

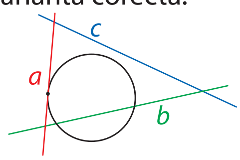
b) Sunt patru perechi de cercuri secante: card$(A \cap G)$ = card$(G \cap N)$ = card$(N \cap V)$ = card$(V \cap R) = 2$.

c) Nu există nicio pereche de cercuri în imagine care să aibă exact un punct comun, deci drapelul olimpic nu conține cercuri tangente.

Puțină istorie. Desenul care reprezintă în mod simbolic olimpismul, drapelul olimpic, realizat de Pierre de Coubertin, a fost finalizat încă din 1913, dar a fost ridicat, în premieră, la Jocurile Olimpice de la Anvers, în 1920. Drapelul olimpic constă în reprezentarea a cinci cercuri congruente, de culori diferite, înlănțuite. Cele cinci culori, la care se adaugă fondul alb, se regăsesc în drapelele țărilor participante la Jocurile Olimpice încă din acei ani.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Observați desenul de mai jos, apoi alegeți litera care indică varianta corectă.



Doar un răspuns este corect.

a) O dreaptă secantă cercului este:
A. a; **B.** b; **C.** c.

b) O dreaptă tangentă cercului este:
A. a; **B.** b; **C.** c.

c) O dreaptă exterioară cercului este:
A. a; **B.** b; **C.** c.

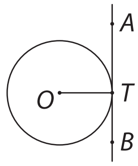
2. Scrieți, folosind simboluri matematice, relația între raza cercului și distanța de la centrul cercului la dreaptă, pentru fiecare caz de la exercițiul 1.

3. Prin punctul P, exterior cercului $\mathcal{C}(O, r)$, reprezentați și notați:
a) dreapta d_1, exterioară cercului;
b) dreapta d_2, tangentă cercului;
c) dreapta d_3, secantă cercului.

4. Se consideră un cerc de centru O, cu diametrul de 8,4 cm. Fixați un punct A pe cerc, construiți dreapta BA tangentă la cerc și determinați:
a) măsura unghiului OAB;
b) distanța de la centrul cercului la dreapta BA.

5. Desenați cercurile secante $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$, cu centrele O_1, O_2 și cu razele r, R, $r < R$.
Demonstrați că:
a) $O_1O_2 > R - r$; **b)** $O_1O_2 < R + r$.
c) Reluați subpunctele **a)** și **b)** pentru cazul numeric $r = 1{,}5$ cm, $R = 3{,}5$ cm.

6. În desenul alăturat, dreapta AB este tangentă, în punctul T, la cercul de centru O.



a) Determinați, cu ajutorul raportorului, măsurile unghiurilor ATO și BTO.

b) Copiați pe caiete și completați spațiile libere așa încât să obțineți afirmații adevărate.

b$_1$) $\sphericalangle ATO = \ldots°$; **b$_2$)** $\sphericalangle BTO = \ldots°$;

b$_3$) Afirmația „$\sphericalangle ATO = \sphericalangle BTO = 90°$" este o propoziție ... .

7. Un cerc are centrul A și raza 3,5 cm. Reprezentați dreptele a, b, c și precizați poziția fiecăreia față de cerc, știind că:

a) distanța de la punctul A la dreapta a este de 5 cm;

b) distanța de la punctul A la dreapta b este de 35 mm;

c) distanța de la punctul A la dreapta c este de 0,2 dm.

8. Desenați două cercuri care să fie:

a) concentrice; **d)** secante;

b) disjuncte; **e)** tangente exterior;

c) tangente interior; **f)** tangente și congruente.

9. Desenați două cercuri, cu razele de 2 cm, respectiv 7 cm. Calculați distanța dintre centrele cercurilor atunci când acestea sunt:

a) tangente interior;

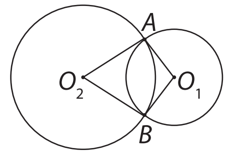
b) tangente exterior.

10. Se consideră două cercuri având centrele O, respectiv Q, și razele de 4 cm, respectiv R cm, R număr natural nenul. Determinați valorile pe care le poate lua R astfel încât cele două cercuri să fie exterioare și $OQ = 9$ cm.

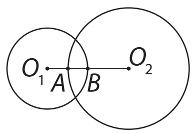
11. Într-un parc de distracții, două trenulețe se deplasează pe trasee în formă de cercuri; unul are diametrul de 72 m, iar celălalt cu diametrul de 48 m. Punctele O_1 și O_2 sunt centrele cercurilor, A și B sunt punctele comune ale cercurilor, iar O_1A, O_1B, O_2A, O_2B reprezintă alei ale parcului.

a) Calculați ce distanță parcurge fratele lui Andrei, dacă acesta face mai multe poze, deplasându-se pe traseul $O_1 - A - O_2 - B - O_1$.

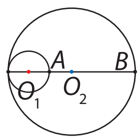
b) Demonstrați că $O_1O_2 < 60$ m.



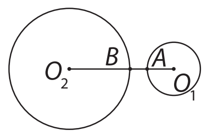
12. Fie cercul C_1 (O_1, r) și cercul $C_2(O_2, R)$. Folosind datele din reprezentările următoare, calculați lungimea segmentului AB pentru fiecare caz.

a) 

$r = 4$ cm, $R = 6$ cm, $O_1O_2 = 8$ cm

b) 

$r = 2$ cm, $R = 6$ cm

c) 

$r = 2$ cm, $R = 7$ cm, $O_1O_2 = 12$ cm

Minitest

Alegeți litera care indică varianta corectă. Doar un răspuns este corect.

30 p **1.** Secanta la un cerc intersectează cercul:

A. într-un singur punct; **C.** în trei puncte distincte;

B. în două puncte distincte; **D.** într-o infinitate de puncte.

30 p **2.** Tangenta la un cerc și raza în punctul de tangență sunt:

A. perpendiculare; **C.** confundate;

B. paralele; **D.** semidrepte opuse.

30 p **3.** C_1 (O_1, r_1) și cercul $C_2(O_2, r_2)$, cu $r_1 = 4$ cm, $r_2 = 9$ cm și $O_1O_2 = 13$ cm, sunt:

A. secante; **C.** tangente exterior;

B. tangente interior; **D.** exterioare.

Notă: Timp de lucru 20 de minute. Se acordă 10 puncte din oficiu.

EVALUARE SUMATIVĂ

I. *Alegeți varianta corectă de răspuns. Doar un răspuns este corect.*

5 p **1.** În interiorul unghiului $\sphericalangle AOB = 130^\circ$, se consideră punctele C și D cu $\sphericalangle AOC = \sphericalangle BOD = 83^\circ$. Măsura unghiului COD este:

A. 30°; **B.** 36°; **C.** 34°; **D.** 32°.

5 p **2.** AOB, BOC, COA sunt unghiuri în jurul punctului O, $\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC = 135^\circ$. Atunci:

A. $AO \perp OB$; **B.** $BO \perp OC$; **C.** $AO \perp OC$; **D.** $CO \parallel AB$.

5 p **3.** De o parte și de alta a dreptei AB, se iau punctele C și D, astfel încât $CA \perp AB$, $DB \perp AB$. Este adevărată relația:

A. $AC \parallel BD$; **B.** $AC \perp BD$; **C.** $AB \parallel CD$; **D.** $AB \perp CD$.

5 p **4.** Două drepte paralele formează cu o secantă unghiuri corespondente cu măsurile $(3 \cdot x)^\circ$ și 102°. Numărul x este:

A. 24; **B.** 32; **C.** 42; **D.** 34.

5 p **5.** Punctul A este simetricul punctului B față de dreapta g și $AB = 7{,}2$ cm. Distanța de la punctul A la dreapta g este:

A. 2,7 cm; **B.** 3,6 cm; **C.** 4,8 cm; **D.** 14,4 cm.

5 p **6.** Fie segmentul $AB = 16$ cm și numerele $r = 6{,}9$ cm, $R = 9{,}6$ cm. Cercurile $C(A, r)$ și $C(B, R)$ sunt:

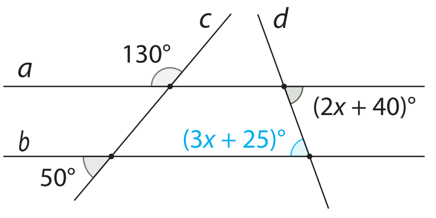
A. secante; **B.** exterioare; **C.** tangente interior; **D.** tangente exterior.

II. *Scrieți rezolvările complete.*

1. Observați configurația alăturată. Folosind datele prezentate, răspundeți cerințelor:

10 p **a)** stabiliți dacă dreptele a și b sunt paralele;

10 p **b)** determinați valoarea numărului x.



2. Unghiurile AOB și BOC sunt adiacente, iar OM respectiv ON sunt bisectoarele lor. Se știe că $\sphericalangle AOB = 30^\circ + \sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle MON = 75^\circ$.

15 p **a)** Calculați măsurile unghiurilor AOB și BOC;

10 p **b)** Demonstrați că bisectoarea unghiului CON este perpendiculară pe dreapta OM.

3. Se consideră un cerc de centru O și rază $r = 4$ cm și o dreaptă a. Distanța de la punctul O, centrul cercului, la dreapta a este d cm, $d \in \{2, 4, 6, 8\}$. Alegeți d astfel încât dreapta a să fie:

5 p **a)** secantă cercului;

5 p **b)** tangentă cercului;

5 p **c)** exterioară cercului

Notă: Timp de lucru 50 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

6. TRIUNGHIUL

6.1 Triunghiul. Construcția unui triunghi

L1 Triunghiul. Clasificare. Perimetru

Competențe specifice: 1.6; 2.6; 3.6; 4.6; 5.6; 6.6

Ne amintim

Oricare ar fi punctele distincte A și B, numim *segmentul AB* (sau *segmentul BA*) mulțimea tuturor punctelor M situate pe dreapta AB, între A și B. Punctele A și B sunt capetele segmentului AB.
Perimetrul unei figuri geometrice este suma lungimilor laturilor sale.
Interiorul unui unghi ABC este mulțimea tuturor punctelor care aparțin intersecției dintre semiplanul delimitat de AB, care conține punctul C și semiplanul delimitat de BC, care conține punctul A.

Rezolvăm și observăm

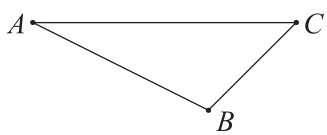
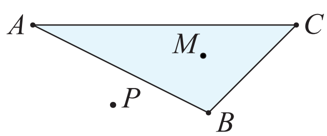
Triunghiul este laitmotivul multor obiecte din viața noastră. De la vârste fragede, recunoaștem obiecte în formă de triunghi, identificăm elemente ale acestora (vârfuri, laturi, chiar și unghiuri).

Exemplu.

a) Precizați numărul pieselor triunghiulare folosite pentru realizarea puzzle-ului din prima imagine.

b) Identificați triunghiuri în a doua imagine.

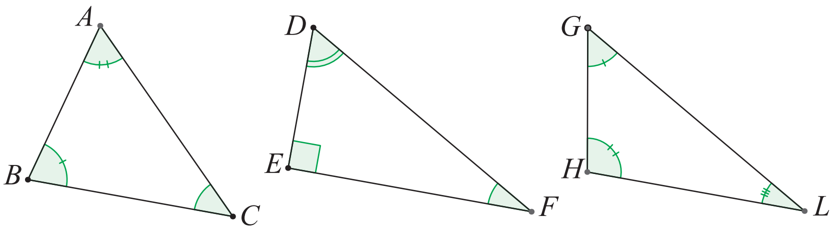
Fiind date punctele necoliniare A, B, C, se pot forma segmentele AB, AC, BC și triunghiul ABC.

Definiție și notație	*Reprezentare geometrică*	*Elementele triunghiului și numărul acestora*
Mulțimea tuturor punctelor segmentelor AB, BC și CA, împreună cu capetele acestora formează triunghiul ABC. Notăm ΔABC sau ΔACB sau ΔBAC *și citim triunghiul ABC* sau triunghiul ACB sau triunghiul BCA.		3 *vârfuri*: punctele A, B, C; 3 *laturi*: segmentele AB, AC, BC; 3 *unghiuri*: $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle ACB$ sau $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$.
Reformulare, limbajul simbolisticii matematice:	$\Delta ABC = AB \cup BC \cup AC \cup \{A, B, C\}$.	
Mulțimea punctelor care aparțin interioarelor tuturor unghiurilor triunghiului ABC se numește *interiorul triunghiului* și se notează $Int(\Delta ABC)$.		$M \in \text{Int}(\sphericalangle A)$, $M \in \text{Int}(\sphericalangle B)$ și $M \in \text{Int}(\sphericalangle C)$, deci $M \in \text{Int}(\Delta ABC)$. $P \in \text{Ext}(\Delta ABC)$.
Punctele care nu aparțin triunghiului și nici interiorului său formează exteriorul triunghiului.	$\text{Int}(\Delta ABC) = \text{Int}(\sphericalangle A) \cap \text{Int}(\sphericalangle B) \cap \text{Int}(\sphericalangle C)$ Dacă $P \notin \Delta ABC$ și $P \notin \text{Int}(\Delta ABC)$, atunci $P \in \text{Ext}(\Delta ABC)$.	

Perimetrul triunghiului
Dacă lungimile laturilor triunghiului ABC sunt $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, atunci *perimetrul triunghiului ABC* este suma $a + b + c$. Scriem $P_{\Delta ABC} = a + b + c$.

Observație. În practică, întâlnim probleme în care avem nevoie de *semiperimetrul* unui triunghi, adică de numărul $p_{\Delta ABC} = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Problema **1.** Măsurați cu ajutorul raportorului unghiurile triunghiurilor *ABC*, *DEF*, *GHL*, apoi completați măsurile obținute în caseta corespunzătoare.



ΔABC	ΔDEF	ΔGHL
$\sphericalangle A = 60°$	$\sphericalangle D = 60°$	$\sphericalangle G = 50°$
$\sphericalangle B = 75°$	$\sphericalangle E = 90°$	$\sphericalangle H = 100°$
$\sphericalangle C = 45°$	$\sphericalangle F = 30°$	$\sphericalangle L = 30°$

Reținem!

Clasificarea triunghiurilor în funcție de măsurile unghiurilor

În funcție de măsurile unghiurilor, un triunghi poate fi:
- *ascuțitunghic*, dacă *toate* cele trei unghiuri ale sale sunt *ascuțite*;
- *dreptunghic*, dacă *unul* dintre unghiurile sale este unghi *drept*;
- *obtuzunghic*, dacă *unul* dintre unghiurile sale este unghi *obtuz*.

În limbajul simbolisticii matematice

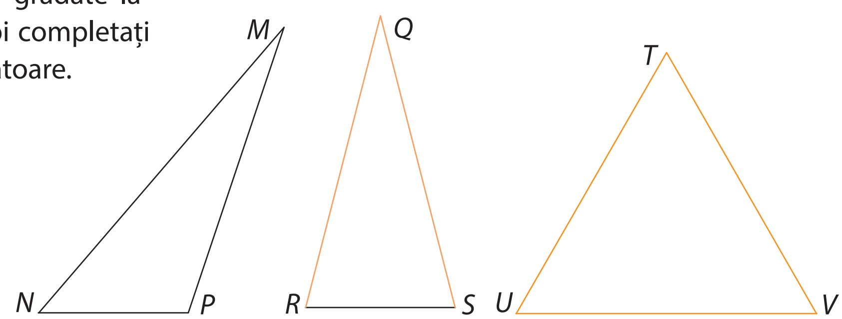
În funcție de măsurile unghiurilor, ΔABC poate fi:
- *ascuțitunghic*, dacă $\sphericalangle A < 90^\circ$, $\sphericalangle B < 90^\circ$ și $\sphericalangle C < 90^\circ$;
- *dreptunghic*, dacă $\sphericalangle A = 90^\circ$, sau $\sphericalangle B = 90^\circ$ sau $\sphericalangle C = 90^\circ$;
- *obtuzunghic*, dacă $\sphericalangle A > 90^\circ$, sau $\sphericalangle B > 90^\circ$ sau $\sphericalangle C > 90^\circ$.

Observație. Într-un triunghi dreptunghic, latura opusă unghiului drept se numește *ipotenuză*, iar laturile care formează unghiul drept se numesc *catete* ale triunghiului.

Dacă triunghiul *DEF* este dreptunghic și $\sphericalangle E = 90°$, atunci latura *DF* este ipotenuza, iar laturile *ED* și *EF* sunt catete.

Problema **2.** Măsurați cu ajutorul riglei gradate laturile triunghiurilor *MNP*, *QRS*, *TUV*, apoi completați lungimile obținute în caseta corespunzătoare.

ΔMNP	ΔQRS	ΔTUV
$NP = 2$ cm	$QR = 4$ cm	$TU = 4$ cm
$PM = 4$ cm	$RS = 2$ cm	$UV = 4$ cm
$MN = 5$ cm	$QS = 4$ cm	$TV = 4$ cm



Reținem!

Clasificarea triunghiurilor în funcție de lungimile laturilor

În funcție de lungimile laturilor, un triunghi poate fi:
- *oarecare* sau *scalen*, dacă lungimile laturilor sale sunt diferite două câte două;
- *isoscel*, dacă două dintre laturilor sale sunt congruente;
- *echilateral*, dacă toate cele trei laturi ale sale sunt congruente.

În limbajul simbolisticii matematice

În funcție de lungimile laturilor, ΔABC poate fi:
- *oarecare* sau *scalen*, dacă $AB \neq BC$, $BC \neq AC$ și $AC \neq BC$.
- *isoscel*, dacă $AB \equiv BC$ sau $BC \equiv AC$ sau $AC \equiv AB$.
- *echilateral*, $AB \equiv BC \equiv AC$.

Observații **1.** Dacă ΔABC este isoscel, cu $AB \equiv BC$, atunci latura *AC* se numește *bază* a triunghiului.
2. Orice triunghi echilateral este isoscel.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

În urma măsurătorilor de la problemele 1 și 2, după ce am completat tabelul, constatăm că:

- În ΔABC, $\sphericalangle A = 60°$, $\sphericalangle B = 75°$ și $\sphericalangle C = 45°$, deci ΔABC este triunghi ascuțitunghic.
- În ΔDEF, $\sphericalangle E = 90°$, deci ΔDEF este triunghi dreptunghic.
- În ΔGHL, $\sphericalangle H = 100°$, deci ΔGHL este triunghi obtuzunghic.
- În ΔMNP, $NP = 2$ cm, $PM = 4$ cm, $MN = 5$ cm, adică $MN \neq NP$, $NP \neq MP$ și $MN \neq MP$, deci ΔMNP este triunghi scalen.
- În ΔQRS, $QR = 4$ cm, $RS = 2$ cm, $QS = 4$ cm, adică $QR = QS$, deci ΔQRS este triunghi isoscel, cu baza RS.
- În ΔTUV, $TU = 4$ cm, $UV = 4$ cm, $TV = 4$ cm, adică $TU = UV = TV$, deci ΔTUV este triunghi echilateral.

Perimetrele respectiv semiperimetrele triunghiurilor *MNP, QRS, TUV* sunt:

$P_{\Delta MNP} = 2\text{ cm} + 4\text{ cm} + 5\text{ cm} = 11\text{ cm}$, $P_{\Delta QRS} = 4\text{ cm} + 4\text{ cm} + 2\text{ cm} = 10\text{ cm}$, $P_{\Delta TUV} = 4\text{ cm} + 4\text{ cm} + 4\text{ cm} = 12\text{ cm}$.

$$p_{\Delta MNP} = \frac{P_{\Delta MNP}}{2} = 5{,}5\text{ cm};\ p_{\Delta QRS} = \frac{P_{\Delta QRS}}{2} = 5\text{ cm};\ p_{\Delta TUV} = \frac{P_{\Delta TUV}}{2} = 6\text{ cm}.$$

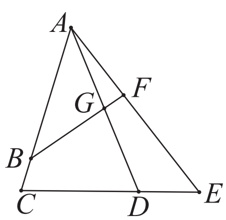
Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Se consideră punctele distincte *A, B, C, D*. Reprezentați geometric și notați triunghiurile care se pot forma, în fiecare din cazurile:

a) punctele *A, B, C* sunt coliniare iar $D \notin AB$;

b) oricare trei dintre punctele *A, B, C, D* sunt necoliniare.

2. Folosind notațiile date, pe baza observării atente a configurației alăturate:



a) precizați numărul triunghiurilor reprezentate;

b) enumerați triunghiurile pentru care segmentul *AB* este latură;

c) enumerați triunghiurile pentru care unul dintre unghiuri este $\sphericalangle DAF$.

3. Reprezentați triunghiul *DEF* și enumerați:

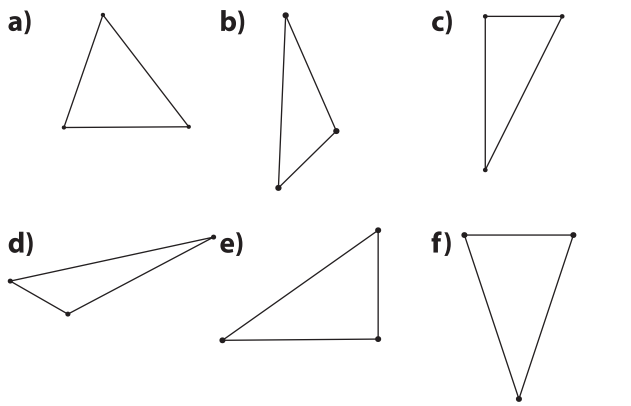
a) toate modalitățile de notare a triunghiului;

b) vârfurile, laturile și unghiurile triunghiului;

c) unghiurile alăturate laturii *EF*;

d) latura opusă unghiului *DEF*.

4. Observați triunghiurile reprezentate pe coloana alăturată, eventual măsurați unghiurile, apoi alegeți litera care indică răspunsul corect. Doar un răspuns este corect.



4.1. Sunt reprezentate triunghiuri ascuțitunghice în figurile:

A. a), c) și d); **B.** b) și f); **C.** a) și f); **D.** c) și e).

4.2. Sunt reprezentate triunghiuri obtuzunghice în figurile:

A. c) și e); **B.** b) și d); **C.** a), b) și f); **D.** b) și e).

4.3. Sunt reprezentate triunghiuri dreptunghice în figurile:

A. c) și d); **B.** a), c) și e); **C.** a) și c); **D.** c) și e).

5. Reprezentați geometric câte două triunghiuri pentru fiecare din cazurile:

a) au un vârf comun, notat cu M;

b) au o latura comună, segmentul NP;

c) interiorul unuia este inclus în interiorul celuilalt;

d) au unghiul comun ABC;

e) au interioarele disjuncte.

6. Precizați natura triunghiului ABC (isoscel, echilateral, scalen, ascuțitunghic, dreptunghic, obtuzunghic), în următoarele cazuri:

a) $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $AC = 3$ cm;

b) $AB = 5$ cm, $BC = 0{,}5$ dm, $AC = 50$ mm;

c) $AB = 6$ cm, $BC = 6{,}6$ cm, $AC = 6{,}(6)$ cm;

d) $\sphericalangle BAC = 90°$;

e) $\sphericalangle A = 33°$, $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 122°$, $\sphericalangle C = 58°$;

f) $\sphericalangle ACB = 6000'$.

7. Calculați perimetrul triunghiului MNP știind că:

a) $MN = 8$ cm, $NP = 5$ cm, $NP = 10$ cm;

b) $MN = 20$ cm, $NP = 2{,}5$ dm, $NP = 0{,}15$ m;

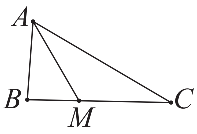
c) $MN = NP = NP = 0{,}01$ km;

d) semiperimetrul triunghiului este 40 cm.

8. Laturile congruente ale unui triunghi isoscel au lungimea 14 cm, iar perimetrul triunghiului este 35 cm. Calculați lungimea celei de-a treia laturi a triunghiului.

9. Semiperimetrul unui triunghi echilateral este 21 cm. Calculați lungimea unei laturi a triunghiului.

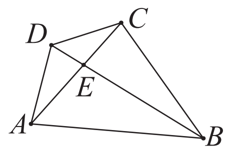
10. Punctul M este situat pe latura BC a triunghiului ABC. Se știe că perimetrul triunghiului ABM este 40 cm, perimetrul triunghiului ACM este 54 cm și perimetrul triunghiului ABC este 60 cm.



Calculați lungimea segmentului AM.

Minitest

1. În configurația alăturată, punctele A, E, C respectiv B, E, D sunt coliniare.



15 p **a)** Scrieți toate triunghiurile reprezentate.

15 p **b)** Scrieți triunghiurile reprezentate care au ca latură segmentul BC.

15 p **c)** Scrieți triunghiurile reprezentate care au unul dintre unghiuri ABD.

30 p **2.** Un triunghi isoscel are perimetrul de 20 cm și una dintre laturi de 9 cm. Calculați lungimile celorlalte laturi ale triunghiului. Identificați toate cazurile posibile.

15 p **3.** Stabiliți natura triunghiul FGH dacă $\sphericalangle F = 68°$, $\sphericalangle F + \sphericalangle G = 158°$, $\sphericalangle G + \sphericalangle H = 112°$.

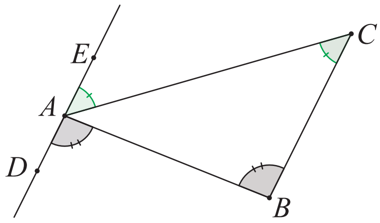
Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

L2 Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi. Unghi exterior unui triunghi

Ne amintim

Două drepte paralele formează cu o secantă unghiuri *alterne interne congruente*, unghiuri *alterne externe congruente*, unghiuri *corespondente congruente*, unghiuri *interne de aceeași parte a secantei suplementare*, unghiuri *externe de aceeași parte a secantei suplementare*.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm



Problema 1. Considerăm triunghiul ABC și DE paralela prin A la BC, unde D și E sunt situate de o parte și de alta a punctului A, ca în imaginea alăturată.

a) Demonstrați că unghiurile DAB și ABC sunt congruente.
b) Demonstrați că unghiurile EAC și ACB sunt congruente.
c) Folosind congruențele demonstrate la subpunctele a) și b), deduceți suma măsurilor unghiurilor BAC, ABC, BCA.

Demonstrație.

a) Dreptele paralele DE și BC formează cu secanta AB unghiuri alterne interne congruente, deci $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle ABC$.
b) Aceleași drepte paralele formează cu secanta AC unghiuri alterne interne congruente, deci $\sphericalangle EAC \equiv \sphericalangle BCA$.
c) Punctele E, A, D sunt coliniare, adică $\sphericalangle DAE = 180°$. Unghiurile EAC și CAB și, de asemenea, unghiurile CAB și DAB sunt adiacente, de unde, $\sphericalangle EAC + \sphericalangle CAB + \sphericalangle DAB = \sphericalangle DAE = 180°$.
Din a) și b), $\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA = \sphericalangle DAB + \sphericalangle CAB + \sphericalangle EAC$. Obținem $\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA = 180°$ sau $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$, unde $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ sunt măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

Prin aplicația de mai sus, am demonstrat următorul rezultat important:

Teoremă
Suma măsurilor unghiurilor oricărui triunghi este $180°$.

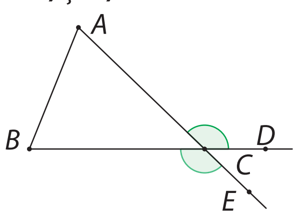
În limbajul simbolisticii matematice
În triunghiul ABC, $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$.

Problema 2. Fie ABC un triunghi.

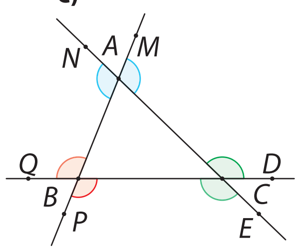
a) Reprezentați semidreapta CD, opusă semidreptei CB și semidreapta CE, opusă semidreptei CA.
b) Marcați unghiurile adiacente și suplementare cu unghiul ACB (unghiul C al triunghiului).
c) Repetați a) și b) pentru unghiurile A și B ale triunghiului ABC. Notați semidreptele obținute astfel: AM opusă cu AB, AN opusă cu AC respectiv BP opusă cu BA și BQ opusă cu BC.
d) Stabiliți relația între unghiurile marcate, justificând răspunsul.

Rezolvare

a) și **b)**



c)



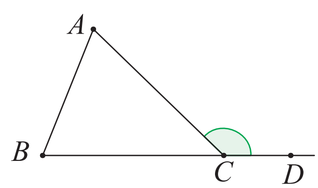
d) B, C, D sunt coliniare, A, C, E sunt coliniare, adică unghiurile ACD și BCE sunt opuse la vârf, deci $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle BCE$.
Unghiurile marcate se numesc *unghiuri exterioare* triunghiului ABC. Au loc congruențele: $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle BCE$, $\sphericalangle CBP \equiv \sphericalangle ABQ$, $\sphericalangle BAN \equiv \sphericalangle CAM$.

Definiție. Un unghi *adiacent* și *suplementar* cu un unghi al triunghiului se numește *unghi exterior* al triunghiului.

Reținem!

Fiecare triunghi are *trei perechi de unghiuri exterioare*. Unghiurile exterioare corespunzătoare aceluiași vârf sunt congruente.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni



Aplicația 1. În configurația alăturată, este reprezentat triunghiul ABC. Punctul D este situat pe dreapta BC astfel încât C este între B și D. Comparați măsura unghiului ACD, cu suma $\sphericalangle A + \sphericalangle B$.

Rezolvare. Unghiurile BCA și ACD sunt adiacente suplementare, deci $\sphericalangle BCA + \sphericalangle ACD = 180°$.

Dar, suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este 180°, adică $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle BCA = 180°$.
Rezultă $\sphericalangle ACD = \sphericalangle A + \sphericalangle B$.

Prin aplicația de mai sus am demonstrat următorul rezultat important:

Teorema unghiului exterior

Măsura unui unghi exterior al unui triunghi este egală cu suma măsurilor unghiurilor triunghiului neadiacente cu acesta.

În limbajul simbolisticii matematice

Dacă *ACD* este unghi exterior triunghiului *ABC*, atunci $\sphericalangle ACD = \sphericalangle A + \sphericalangle B$.

Aplicația 2. Orice triunghi are cel puțin două unghiuri ascuțite.

Demonstrație. Fie ΔABC. Presupunem că triunghiul are mai puțin de două unghiuri ascuțite. Atunci, cel puțin două unghiuri sunt obtuze sau drepte. Fie $\sphericalangle A \geq 90°$ și $\sphericalangle B \geq 90°$. Atunci, $\sphericalangle A + \sphericalangle B \geq 180°$ rezultat care contrazice afirmația demonstrată $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$ cu $\sphericalangle C > 0°$. Rezultă că presupunerea este falsă, deci afirmația „cel puțin două unghiuri ale unui triunghi sunt ascuțite" este adevărată.

Aplicația 3. Unghiurile ascuțite ale unui triunghi dreptunghic sunt complementare.
Demonstrație. Fie ΔABC, dreptunghic, cu $\sphericalangle A = 90°$. Atunci, cum $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$, rezultă $\sphericalangle B + \sphericalangle C = 180° - 90° = 90°$, ceea ce demonstrază că $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle C$ sunt complementare.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Notăm $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ măsurile unghiurilor triunghiului *ABC*. Pentru fiecare dintre situațiile următoare, determinați măsurile unghiurilor necunoscute:
a) $\sphericalangle A = 50°$, $\sphericalangle B = 60°$;
b) $\sphericalangle B = 67°$, $\sphericalangle C = 76°$;
c) $\sphericalangle B = 100°$, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$;
d) $\sphericalangle C = 34°20'$, $\sphericalangle B = 2 \cdot \sphericalangle C$;
e) $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$;
f) $\sphericalangle A = 2 \cdot \sphericalangle B = 6 \cdot \sphericalangle C$.

2. Precizați natura fiecărui triunghi de la exercițiul 1 (ascuțitunghic, dreptunghic, obtuzunghic).

3. Sandu desenează triunghiul *DEF* în care măsura unghiului *D* este 48°. Alin spune că celelalte două unghiuri ar putea avea măsurile 70° și 72°. Paul spune că celelalte două unghiuri ar putea avea măsurile 64° și 68°.
Precizați, argumentat, care din ei are dreptate.

4. Fie triunghiul *MNP*. Completați în casetele libere măsurile corespunzătoare unghiurilor:

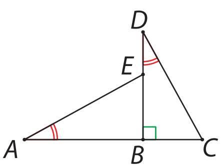
$\sphericalangle M$	$\sphericalangle N$	$\sphericalangle P$
75°	46°	
	90°	45°
	$\sphericalangle M + 12^\circ$	$\sphericalangle N + 24^\circ$

5. Copiați pe caiete tabelul și completați în caseta liberă litera ***A***, dacă afirmația este adevărată și litera ***F***, dacă afirmația este falsă.

Afirmația	***A/F***
Dacă $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 90°$, atunci $\sphericalangle C = 90°$.	
Dacă $\sphericalangle B + \sphericalangle C > 90°$, atunci $\sphericalangle A < 90°$.	
Dacă $\sphericalangle C + \sphericalangle A < 90°$, atunci $\sphericalangle B < 90°$.	
Dacă $\sphericalangle A \geq 60°$, $\sphericalangle B \geq 60°$, $\sphericalangle C \geq 60°$, atunci $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C$.	

6. Stabiliți dacă triunghiul *ABC* este ascuțitunghic, dreptunghic sau obtuzunghic în fiecare din situațiile:
a) $\sphericalangle A = 45^\circ$, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$;
b) $\sphericalangle B = 25^\circ$, $\sphericalangle C = 62^\circ$;
c) $\sphericalangle C = 30^\circ$, $\sphericalangle A = 24^\circ + \sphericalangle B$.

7. În figura alăturată $\sphericalangle ABE = \sphericalangle CBD = 90°$, punctele *B*, *E*, *D* sunt coliniare și $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle D$.



a) Demonstrați că $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle AEB$.
b) Dacă $\sphericalangle C = 60^\circ$, aflați măsura unghiului $\sphericalangle A$.

8. Fie triunghiul *ABC* cu $\sphericalangle A = 56°$, $\sphericalangle B = 78°$. Calculați măsurile unghiurilor exterioare ale triunghiului.

9. Determinați măsurile unghiurilor unui triunghi știind că acestea sunt exprimate în grade sexagesimale, prin trei numere naturale diferite, divizibile cu 18.

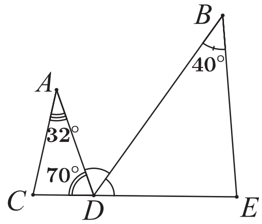
10. Unghiurile AOB și COD sunt opuse la vârf, $O \in AD$, $\sphericalangle AOB = 50^\circ$, $\sphericalangle OCD = 80^\circ$ și $AB \parallel CD$.

a) Realizați un desen care să corespundă enunțului.

b) Determinați măsura unghiului ADC.

c) Demonstrați că $\sphericalangle AOC = \sphericalangle BAO + \sphericalangle ABO$.

11. În configurația alăturată, B este un punct situat pe bisectoarea $\sphericalangle ADE$, exterior ΔACD. Se știe că $\sphericalangle DBE = 40^\circ$, $\sphericalangle CAD = 32^\circ$ și $\sphericalangle ADC = 70^\circ$.



a) Calculați măsurile unghiurilor ACD și BEC.

b) Precizați, argumentat, dacă dreptele AD și BE sunt paralele sau concurente.

12. Două dintre unghiurile exterioare ale unui triunghi au măsurile 99° și 137°. Calculați măsurile unghiurilor triunghiului.

13. Determinați măsurile unghiurilor triunghiului DEF, știind că $\sphericalangle D = \sphericalangle E$, iar unghiul exterior cu vârful în punctul F are măsura 100°.

14. Semidreapta BD este bisectoarea unghiului ABC, iar paralela prin punctul A la dreapta BD intersectează dreapta BC în punctul E.

a) Realizați un desen care să corespundă datelor problemei.

b) Demonstrați că $\sphericalangle BAE \equiv \sphericalangle AEB$.

c) Pentru $\sphericalangle BAE = 78^\circ$, calculați măsurile unghiurilor triunghiului ABE.

15. Pe latura AB a triunghiului ABC, se consideră punctul P așa încât $\sphericalangle BCP = 2 \cdot \sphericalangle ACP$, $\sphericalangle APC = 116^\circ$ și $\sphericalangle B = 56^\circ$.

a) Calculați măsurile unghiurilor BCP și CAP.

b) Demonstrați că perpendiculara în punctul B pe BC este paralelă cu dreapta AC.

Minitest

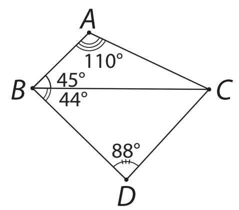
1. Punctele M și N sunt situate pe latura BC a ΔABC, $\sphericalangle BAC = 100^\circ$, $\sphericalangle AMB = 90^\circ$ și $\sphericalangle MAN = \sphericalangle CAN = 20^\circ$. Copiați pe caiet și completați spațiile libere astfel încât să obțineți afirmații adevărate.

20 p **a)** Măsura unghiului ABC este … °.

20 p **b)** Un unghi exterior triunghiului ABN este … .

20 p **c)** Calculând măsura unghiului ANC se obține … °.

30 p **2.** Segmentul BC este latură comună a triunghiurile ABC și DBC. Cu notațiile din desen calculați măsura unghiului ACD.



Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

L3 Construcția triunghiurilor

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Fiind dat un triunghi ABC, putem măsura, cu ajutorul instrumentelor geometrice, lungimile celor trei laturi și măsurile celor trei unghiuri.

Ne propunem să aflăm de câte elemente, dintre cele șase, avem nevoie pentru a construi un triunghi.

Știm că suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este 180°, deci este suficient să cunoaștem două unghiuri pentru a-l ști și pe al treilea.

Problema 1. **a)** Folosind faptul că cercul conține toate punctele situate la o distanță constantă de un punct fix, verificați dacă există un triunghi *MNP* cu laturile de $MN = 1$ cm, $NP = 2$ cm, $MP = 4$ cm.

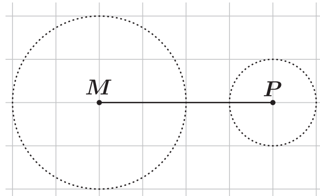
b) Verificați dacă există un triunghi *QRS* cu laturile de $QR = 1$ cm, $RS = 2$ cm, $QS = 3$ cm.

c) Verificați dacă există un triunghi *DEF* cu laturile de $DE = 3$ cm, $DF = 2$ cm, $EF = 1{,}5$ cm.

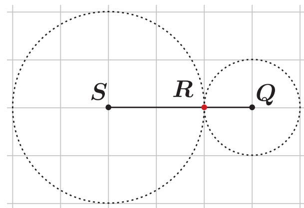
d) Calculați sumele $DE + EF$, $DF + EF$, $DE + DF$.

e) Comparați $DE + EF$ cu DF, comparați $DF + EF$ cu DE, apoi comparați $DE + DF$ cu EF.

Rezolvare. **a)** Construim segmentul $MP = 4$ cm. Dacă există triunghiul *MNP*, atunci *N* este la 1 cm de *M* și la 2 cm de *P*. Prin urmare, *N* s-ar afla atât pe cercul de centru *M* și rază 2 cm, cât și pe cercul de centru *P* și rază 1 cm. Construim cele două cercuri și observăm că acestea nu au puncte comune.
În concluzie, *nu există* în plan un punct situat pe ambele cercuri, deci *nu există* un triunghi în care $MN + NP < MP$.



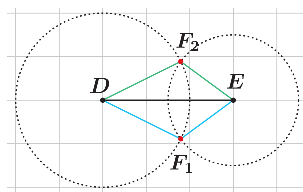
b) Construim segmentul $SQ = 3$ cm. Construind cercul de centru *S* și rază 2 și cercul de centru *Q* și rază 1, acestea se intersectează în punctul *R*, situat pe dreapta *SQ*.
Adică *nu există* un triunghi în care $SR + RQ = SQ$.
$QR = 1$ cm, $RS = 2$ cm, $QS = 3$ cm, adică $QS = QR + RS$, deci punctele *Q*, *R*, *S* sunt coliniare, deci nu pot fi vârfurile unui triunghi.



c) ***Pasul 1.*** Construim segmentul $DE = 3$ cm și cercurile $C_1(D,\ 2\text{ cm})$ și $C_2(E,\ 1{,}5\text{ cm})$

Pasul 2. Notăm cu F_1 și F_2 punctele în care se intersectează cele două cercuri.

Pasul 3. Trasăm laturile triunghiului DEF_1 sau DEF_2.
Oricare dintre triunghiurile DEF_1 și DEF_2 are laturile cu lungimile cerute.
În concluzie, se pot construi triunghiurile DEF_1 și DEF_2 cu condițiile date.



d) $DE + EF = 4{,}5$ cm; $DF + EF = 3{,}5$ cm; $DE + DF = 5$ cm.

e) Folosind calculele de la la d), rezultă $DE + EF > DF$; $DF + EF > DE$; $DE + DF > EF$.

Teoremă (inegalitatea triunghiului) Într-un triunghi, suma lungimilor oricăror două laturi este mai mare decât lungimea celei de-a treia laturi.

Dacă există triunghiul *ABC*, atunci $AB + BC > AC$; $AB + AC > BC$; $AC + BC > AB$.

Dacă *a*, *b*, *c* sunt numere pozitive astfel încât $a + b > c$; $a + c > b$; $b + c > a$, atunci există un triunghi pentru care lungimile laturilor sunt *a*, *b*, *c*, exprimate în aceeași unitate de lungime.

Observație. Pentru verificarea existenței triunghiului care are lungimile laturilor exprimate în aceeași unitate de măsură, prin numerele pozitive $a < b < c$, este suficient să verificăm dacă $a + b > c$.

Problema 2. **a)** Construiți triunghiul *ABC* cu $BC = 3$ cm, $\sphericalangle ABC = 60^\circ$ și $\sphericalangle ACB = 50^\circ$.

b) Construiți triunghiul *MNP* cu $MN = 3$ cm, $\sphericalangle NMP = 30^\circ$ și $MP = 2$ cm.

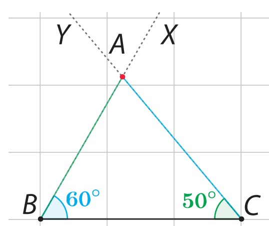
Rezolvare.

a) ***Pasul 1.*** Construim segmentul $BC = 3$ cm.

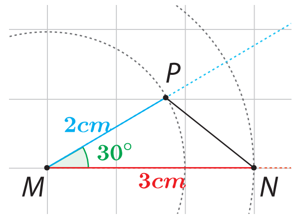
Pasul 2. De aceeași parte a dreptei *BC*, construim semidreptele *BX* și *CY* astfel încât $\sphericalangle CBX = 60^\circ$ și $\sphericalangle BCY = 50^\circ$.

Pasul 3. Notăm cu *A* punctul în care se intersectează semidreptele *BX* și *CY*. Acest punct există pentru că suma măsurilor unghiurilor *CBX* și *BCY* este mai mică decât 180°.

Pasul 4. Trasăm laturile *AB* și *AC*.



b) ***Pasul 1.*** Fixăm punctul M și construim un unghi cu vârful M și cu măsura de $30°$.
Pasul 2. Pe o latură a unghiului, fixăm punctul N astfel încât $MN = 3$ cm, iar pe cealaltă latură fixăm punctul P astfel încât $MP = 2$ cm. Am reprezentat laturile MN și MP.
Pasul 3. Trasăm segmentul NP, care va fi a treia latură a triunghiului.



Rezolvând problemele 1 și 2, am descoperit *trei situații distincte* în care se poate construi un triunghi, cunoscând doar trei dintre cele șase elemente ale sale.

Reținem!

Se poate construi un triunghi în unul dintre următoarele trei cazuri:

1. Se cunosc lungimile tuturor celor trei laturi, care respectă inegalitatea triunghiului. (cazul **LLL**)
2. Se cunosc lungimile a două laturi și măsura unghiului format de acestea. (cazul **LUL**)
3. Se cunosc măsurile a două unghiuri cu suma măsurilor mai mică de $180°$ și lungimea laturii determinate de vârfurile lor. (cazul **ULU**)

Observații. **1.** Pentru cazul LLL, este esențială inegalitatea triunghiului.
2. Dacă se cunosc măsurile a două unghiuri și lungimea unei laturi, existența triunghiului este asigurată, prin cazul ULU, de condiția ca suma lor să fie mai mică de $180°$, măsura celui de-al treilea unghi fiind suplementul sumei celor două.

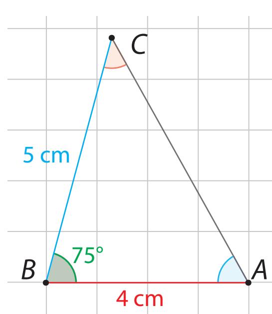
Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Problemă rezolvată 1. Andrei și Cristian locuiesc în același oraș și învață la aceeași școală. Distanța dintre casa lui Andrei și școală este 1500 m, iar distanța dintre casa lui Cristian și școală este 1100 m. Andrei spune că locuiește la cel mult 400 de metri distanță de Cristian.

a) Precizați, argumentat, dacă este posibil ca distanța dintre casele celor doi colegi să fie la distanță mai mică de 400 m.
b) Precizați în ce caz Andrei locuiește la 400 m de locuința lui Cristian.

Soluție.
a) Fie A, C, S, punctele corespunzătoare caselor celor doi colegi, respectiv sediului școlii, pe harta localității. Atunci, $AS = 1500$ m și $CS = 1100$ m. Dacă A, C, S sunt necoliniare, atunci $AC + CS > AS$, adică $AC + 1100 > 1500$, deci $AC > 400$. Cei doi locuiesc la o distanță mai mare decât 400 m, adică Andrei nu locuiește la cel mult 400 m distanță.
b) Dacă punctele A, C, S sunt coliniare, atunci sunt posibile trei cazuri de ordonare, dintre care este relevant pentru problemă doar cazul în care C este situat între A și S, adică $AC + CS = AS$, deci $AC = 400$ m.

Problemă rezolvată 2.
a) Construiți un triunghi ABC cu $AB = 4$ cm, $\sphericalangle ABC = 75°$, $BC = 5$ cm.
b) Măsurați celelalte trei elemente ale triunghiului construit.
c) Scrieți unghiurile triunghiului în ordinea descrescătoare a măsurilor lor.
d) Scrieți laturile triunghiului în ordinea descrescătoare a lungimilor acestora.



Rezolvare **a)** Se construiește un unghi B de $75°$. Pe laturile unghiului, se marchează punctele A și C astfel încât $AB = 4$ cm și $BC = 5$ cm. Se trasează latura AC.
b) Măsurăm cu raportorul unghiurile A și C, apoi măsurăm cu rigla gradată latura AC. Obținem: $\sphericalangle BAC$ este de aproximativ $61°$, $\sphericalangle ACB$ este de aproximativ $44°$, iar AC este aproximativ 5,5 cm.
c) $\sphericalangle B > \sphericalangle A > \sphericalangle C$.
d) $AC > BC > AB$.

Concluzie. În orice triunghi, unghiului mai mare i se opune latura mai mare, iar unghiului mai mic i se opune latura mai mică.
În orice triunghi, laturii mai mari i se opune unghiul mai mare, iar laturii mai mici i se opune unghiul mai mic.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Reprezentați punctele A, B, C, necoliniare, astfel încât $AB = 3$ cm, $\sphericalangle ABC = 50^\circ$, $BC = 4$ cm.
2. Construiți, folosind instrumentele geometrice, triunghiul ABC în care:
   a) $AB = 4$ cm, $\sphericalangle ABC = 75^\circ$, $BC = 5$ cm;
   b) $\sphericalangle ABC = 50^\circ$, $BC = 6$ cm, $\sphericalangle ACB = 60^\circ$;
   c) $AB = 7$ cm, $BC = 9$ cm, $AC = 12$ cm.
3. Fie segmentele $DE = 5$ cm și $EF = 8$ cm. Reprezentați triunghiul DEF pentru $\sphericalangle DEF \in \{30^\circ, 90^\circ, 120^\circ\}$.
4. Segmentul MN are lungimea 6 cm. Construiți triunghiul MNP, știind că $\sphericalangle MNP = 80^\circ$ și $\sphericalangle NMP = 65^\circ$.
5. Un triunghi isoscel are o latură cu lungimea 4 cm și altă latură cu lungimea 7 cm. Construiți triunghiul, analizând toate cazurile posibile.
6. Construiți un triunghi echilateral care să aibă perimetrul 0,24 m.
7. Două unghiuri au măsurile 87°, respectiv 63°. Calculați măsura unui al treilea unghi, astfel încât să existe un triunghi ale cărui unghiuri au aceste măsuri.
8. Construiți un triunghi având măsurile unghiurilor 40°, 75°și 65°. Decideți dacă acesta este unic.
9. Precizați în care dintre situațiile următoare nu se poate construi triunghiul ABC și justificați alegerea făcută.
   a) $\sphericalangle A = 120^\circ$, $AB = 5$ cm, $\sphericalangle B = 60^\circ$;
   b) $\sphericalangle B = 88^\circ$, $BC = 7$ cm, $\sphericalangle C = 77^\circ$;
   c) $AB = 11$ cm, $BC = 11$ cm, $AC = 22$ cm;
   d) $AB = BC = 0{,}5$ dm, $AC = 9$ cm.
10. Considerăm segmentele $AB = 5$ cm, $CD = 7$ cm, $EF = n$ cm, $n \in \mathbb{N}$.
    Determinați cea mai mică și cea mai mare valoare pe care o poate lua n astfel încât să se poată construi un triunghi cu aceste segmente.
11. Construiți un triunghi isoscel cu baza BC, în care $\sphericalangle A = 90^\circ$ și $AB = 4{,}5$ cm.
12. **a)** Fie triunghiul MNP cu laturile $MN = 6$ cm, $NP = 10$ cm, $MP = 8$ cm. Scrieți unghiurile triunghiului în ordinea crescătoare a măsurilor lor.
    b) Fie triunghiul DEF în care $\sphericalangle D = 72^\circ$, $\sphericalangle E = 48^\circ$. Scrieți laturile triunghiului în ordinea descrescătoare a lungimilor lor.

Minitest

20 p 1. Construiți triunghiul ABC în care $AB = 3$ cm, $\sphericalangle A = 105^\circ$, $AC = 5$ cm.

30 p 2. Construiți triunghiul isoscel DEF în care $DE = 4$ cm și $EF = 10$ cm.

40 p 3. În triunghiul ABC se cunosc $\sphericalangle A = 50^\circ$, $\sphericalangle B = 88^\circ$, $AB = 15$ cm. Completați în caseta liberă ***A***, dacă propoziția este adevărată și ***F***, dacă propoziția este falsă.

Propoziția	*A/F*
$\sphericalangle C = 31^\circ$	
$AC > BC$	

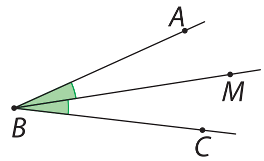
Propoziția	*A/F*
$AC < 15$ cm	
$P_{ABC} > 45$ cm	

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

6.2 Linii importante în triunghi

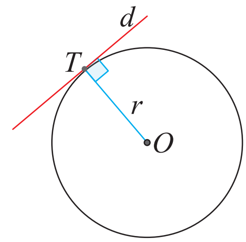
L1 Bisectoarele unghiurilor unui triunghi. Concurența bisectoarelor

Ne amintim



Dacă $\sphericalangle ABC$ este unghi propriu și $M \in Int(\sphericalangle ABC)$ astfel încât $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle MBC$, atunci semidreapta BM este bisectoarea unghiului ABC.

Dacă $\sphericalangle ABC$ este unghi propriu și BM este bisectoarea unghiului ABC, atunci $M \in Int(\sphericalangle ABC)$ și $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle MBC$.



Dreapta d este *tangentă* la cercul $\mathcal{C}(O, r)$ în punctul T dacă $d \cap \mathcal{C}(O, r) = \{T\}$.
Dacă d este tangentă la cerc în punctul T, atunci $OT \perp d$.

Distanța de la centrul cercului la o dreaptă tangentă la cerc este egală cu *raza cercului*.

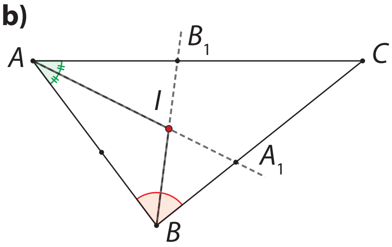
Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Aplicația 1. Reprezentați un triunghi ABC.

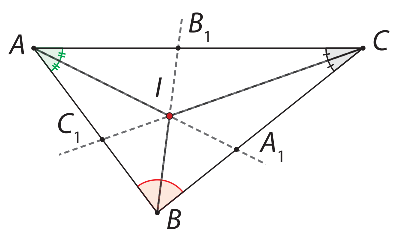
a) Construiți bisectoarea AA_1 a unghiului BAC, $A_1 \in BC$ și bisectoarea BB_1 a unghiului ABC, $B_1 \in AC$.
b) Notați cu I punctul în care AA_1 și BB_1 se intersectează.
c) Construiți semidreapta CI și notați cu C_1 punctul în care aceasta intersectează latura AB.
d) Măsurați unghiurile ACI și BCI și stabiliți relația între măsurile lor.

Soluție.

a) și **b)**



c)



d) Prin măsurare, intuim că dacă AA_1 și BB_1 sunt bisectoarele unghiurilor A respectiv B, ale triunghiului ABC, atunci $\sphericalangle ACI = \sphericalangle BCI$, adică semidreapta CI este bisectoarea unghiului C.

Reținem!

Oricare ar fi triunghiul ABC, *bisectoarele* unghiurilor sale *sunt concurente* într-un punct, notat, de regulă, cu I.

Dacă AA_1, BB_1, CC_1 sunt bisectoarele unghiurilor A, B respectiv C, ale triunghiului ABC, atunci există I, astfel încât $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = \{I\}$.

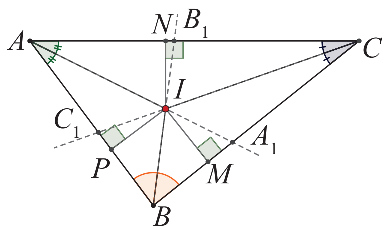
Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicația 2. **a)** Reprezentați un triunghi ABC, apoi bisectoarele AA_1, BB_1, CC_1. Notați cu I punctul în care se intersectează bisectoarele.

b) Construiți $IM \perp BC$, $IN \perp AC$, $IP \perp AB$, $M \in BC$, $N \in AC$, $P \in AB$.
c) Măsurați segmentele IM, IN, IP și decideți dacă punctul I este situat la aceeași distanță de cele trei laturi ale triunghiului ABC.
d) Construiți cercul cu centrul I și cu raza IM.

Soluție.

a) și **b)**

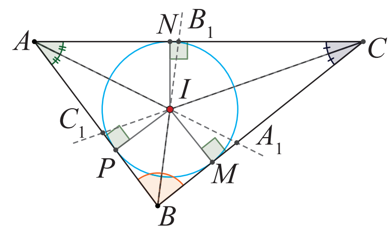


c) Măsurând segmentele obținem: $IM = IN = IP$, deci punctele M, N, P sunt egal depărtate de I.

Atunci, cercul C(I, IM) conține punctele N și P.

Laturile triunghiului ABC sunt *tangente* la cercul C(I, IM).

d)



Reținem!

În orice triunghi ABC, punctul de intersecție a bisectoarelor, notat cu I, este egal depărtat de laturile acestuia. Cercul C(I, r), unde r este distanța de la punctul I la o latură a triunghiului, se numește *cercul înscris* în triunghiul ABC.
Cele trei laturi ale triunghiului sunt tangente la cercul C(I, r).

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Reprezentați triunghiul ABC, apoi trasați bisectoarele unghiurilor acestuia, știind că ABC este:
- **a)** triunghi ascuțitunghic;
- **b)** triunghi dreptunghic;
- **c)** triunghi obtuzunghic.

2. Reprezentați triunghiul DEF, apoi trasați bisectoarele unghiurilor acestuia, știind că DEF este:
- **a)** triunghi isoscel;
- **b)** triunghi echilateral;
- **c)** triunghi oarecare.

3. Fie MNP un triunghi și MS bisectoarea unghiului NMP, $S \in NP$.
- **a)** Dacă $\sphericalangle NMP = 100°$, calculați măsurile unghiurilor NMS și PMS.
- **b)** Dacă $\sphericalangle SMN = 40°30'$, calculați măsurile unghiurilor SMP și NMP.

4. Fie triunghiul ABC și I un punct situat în interiorul triunghiului.
Copiați pe caiete și completați spațiile libere astfel încât să obțineți afirmații adevărate:
- **a)** Dacă AI este bisectoarea unghiului BAC, BI este bisectoarea unghiului ABC, atunci CI este … .
- **b)** Dacă $\sphericalangle BAI \equiv \sphericalangle CAI$ și $\sphericalangle ABC = 2 \cdot \sphericalangle ABI$, atunci , $\sphericalangle ACI \ldots \sphericalangle BCI$.

5. Se consideră triunghiul DEF în care $\sphericalangle D = 68°$, $\sphericalangle E = 86°$ și FM bisectoarea unghiului DFE, $M \in DE$.
- **a)** Calculați măsurile unghiurilor DFE, DFM și EFM.
- **b)** Arătați că triunghiul DMF este obtuzunghic.

6. Pe latura BC a triunghiului ABC se ia punctul D astfel încât $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$. Știind că $\sphericalangle BAD = 44°$, $\sphericalangle ADC = 117°$, determinați măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

7. Triunghiurile ABC și DBC au vârfurile A, D situate de o parte și de alta a dreptei BC. Știind că $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$, $\sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle DCB$ și că AD este bisectoarea unghiului BAC, demonstrați că DA este bisectoarea unghiului BDC.

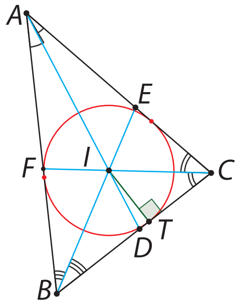
8. Fie I punctul de intersecție a bisectoarelor unghiurilor triunghiului MNP.
- **a)** Dacă $\sphericalangle IMP = 31°$, $\sphericalangle INM = 29°$, calculați măsurile unghiurilor triunghiului MNP.
- **b)** Dacă $\sphericalangle MNP = 80°$, $\sphericalangle IMP = 34°$, calculați măsurile unghiurilor MPN și MIP

9. Triunghiul ABC este dreptunghic cu $\sphericalangle BAC = 90°$. Calculați măsura unghiului obtuz format de bisectoarele unghiurilor ABC și ACB.

10. **a)** Construiți triunghiul ABC în care $\sphericalangle A = 30°$, $\sphericalangle B = 60°$, $AB = 8$ cm.
b) Construiți bisectoarele unghiurilor triunghiului ABC, marcați centrul cercului înscris în triunghi și trasați acest cerc.

Minitest

5 × 6 p **1.** Observați configurația următoare, știind că unghiurile marcate la fel sunt congruente, apoi scrieți în caseta liberă litera ***A***, dacă propoziția este adevărată și litera ***F***, dacă propoziția este falsă.

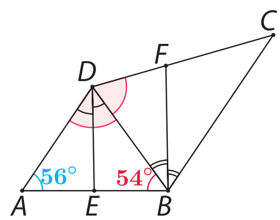


	Propoziția	***A/F***
a)	*AD* este bisectoarea unghiului *BAC* al triunghiului *ABC*.	
b)	*I* este centrul cercului înscris în triunghiul *ABC*.	
c)	Bisectoarea unghiului *ABC* conține punctul *I*.	
d)	Bisectoarele unghiurilor triunghiului *ABC* nu sunt concurente.	
e)	*IT* este rază a cercului înscris în triunghiul *ABC*.	
f)	$\sphericalangle BAC = 2 \cdot \sphericalangle BIC$.	

2. În desenul alăturat, este reprezentată schița unui teren *ABCD*. Semidreapta *DE* este bisectoarea unghiului *ADB*, semidreapta *BF* este bisectoarea unghiului *CBD*, $\sphericalangle DAB = 56°$, $\sphericalangle ABD = 54°$. Unghiurile *ADB* și *BDC* sunt congruente, iar dreptele *DE și BF* sunt paralele.

30 p **a)** Determinați măsurile unghiurilor *ADB*, *BDE* și *BCD*.

30 p **b)** Precizați, argumentat dacă *BD* este bisectoarea unghiului *ABC*.



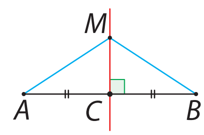
Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

L2 Mediatoarele laturilor unui triunghi. Concurența mediatoarelor

Ne amintim

Definiție. Se numește *mediatoarea* segmentului *AB*, dreapta perpendiculară pe *AB*, care conține mijlocul acestuia.

Am dedus, prin măsurare, că *mediatoarea* unui segment este mulțimea punctelor din plan *egal depărtate* de capetele segmentului.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicația 1. Reprezentați un triunghi *oarecare ABC*.

a) Construiți mediatoarea d_1 a laturii *BC* și mediatoarea d_2 a laturii *AC*. Notați $\{M\} = d_1 \cap BC$ și $\{N\} = d_2 \cap AC$.

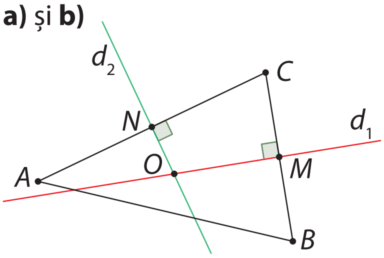
b) Notați cu *O* punctul în care d_1 și d_2 se intersectează.

c) Construiți dreapta d_3, perpendiculară din *O* pe latura *AB*, și notați $\{P\} = d_3 \cap AB$.

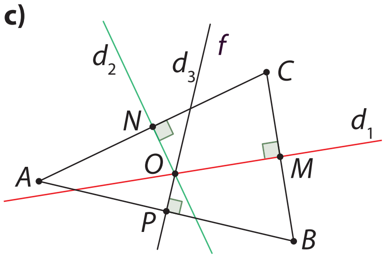
d) Măsurați segmentele *PA* și *PB* și decideți dacă d_3 este mediatoarea laturii *AB*.

Soluție.

a) și **b)**



c)



d) Mediatoarele d_1 și d_2 ale laturilor *BC* respectiv *AC* sunt drepte concurente, în *O* (paralelismul lor ar implica coliniaritatea punctelor *A*, *B* și *C*).

Verificăm prin măsurare că perpendiculara din *O* pe *AB* conține mijlocul segmentului *AB*, deci d_3 este *mediatoarea* laturii *AB*.

Reținem!

Oricare ar fi triunghiul *ABC*, *mediatoarele* laturilor sale *sunt concurente* într-un punct, notat, de regulă, cu *O*.	Dacă d_1, d_2, d_3 sunt mediatoarele laturilor *BC*, *AC*, *AB* ale triunghiului *ABC*, atunci există *O*, astfel încât $d_1 \cap d_2 \cap d_3 = \{O\}$.

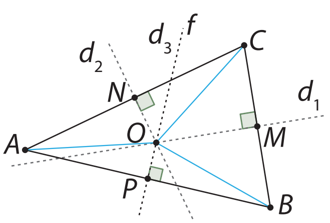
Aplicația 2. **a)** Reprezentați un triunghi *ascuțitunghic ABC*, apoi mediatoarele d_1, d_2, d_3 ale laturilor acestuia. Notați cu *O* punctul în care se intersectează mediatoarele.

b) Măsurați distanțele *OA*, *OB*, *OC* și decideți dacă punctul *O* este situat la aceeași distanță de cele trei vârfuri ale triunghiului *ABC*.

c) Construiți cercul cu centrul *O* și cu raza *OA*, numit *cercul circumscris* triunghiului *ABC*. Uzual, notăm cu *R* lungimea razei cercului circumscris unui triunghi .

d) Stabiliți, intuitiv, dacă punctul *O*, *centrul cercului circumscris*, este situat în interiorul triunghiului *ABC*.

Soluție. **a)**



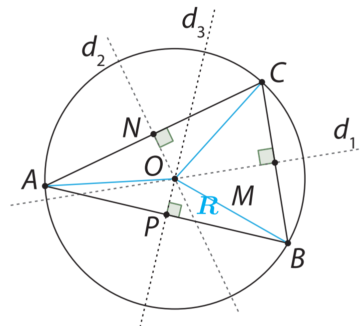
b)

OA = *OB* = *OC*, deci punctele *A*, *B*, *C* sunt egal depărtate de *O*.

Atunci, cercul C(*O*, *OA*) conține punctele *B* și *C*.

Laturile triunghiului *ABC* sunt *coarde* ale cercului C(*O*, *OA*).

c)



d) *Centrul cercului circumscris* triunghiului ascuțitunghic *ABC* este situat în interiorul triunghiului: $O \in \text{Int}(\Delta ABC)$.

Reținem!

În orice triunghi *ABC*, punctul de intersecție a mediatoarelor, notat cu *O*, este egal depărtat de vârfurile acestuia.
Cercul C(*O*, *R*), unde *R* = *OA* = *OB* = *OC*, se numește *cercul circumscris* triunghiului *ABC*.
Cele trei laturi ale triunghiului sunt coarde ale cercului circumscris.

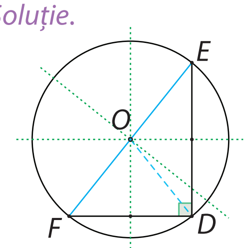
Aplicația 3.

a) Construiți mediatoarele laturilor triunghiului dreptunghic *DEF*, $\sphericalangle D = 90^\circ$.

b) Stabiliți intuitiv poziția punctului *O*, de concurență a mediatoarele laturilor. Deduceți că *O* este mijlocul laturii *EF*, adică mijlocul ipotenuzei.

c) Construiți *cercul circumscris* triunghiului *DEF*.

Soluție.



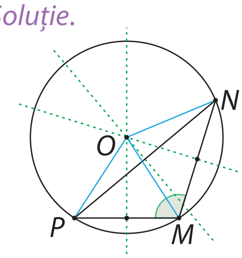
Aplicația 4.

a) Construiți mediatoarele laturilor triunghiului obtuzunghic *MNP*, $\sphericalangle M > 90^{\circ}$.

b) Stabiliți intuitiv poziția punctului *O*, de concurență a mediatoarele laturilor. Deduceți că *O* este situat în *exteriorul* triunghiului *MNP*.

c) Construiți *cercul circumscris* triunghiului *MNP*.

Soluție.



Concluzie.

1. Dacă *ABC* este triunghi *ascuțitunghic*, atunci centrul cercului circumscris triunghiului *ABC* este situat în *interiorul* triunghiului.
2. Dacă *ABC* este triunghi *dreptunghic*, atunci centrul cercului circumscris triunghiului *ABC* coincide cu *mijlocul ipotenuzei* triunghiului.
3. Dacă *ABC* este triunghi *obtuzunghic*, atunci centrul cercului circumscris triunghiului *ABC* este situat în *exteriorul* triunghiului.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. **a)** Reprezentați segmentul *AB* de 4 cm și construiți cu rigla și echerul mediatoarea segmentului.

b) Reprezentați segmentul *CD* și construiți cu rigla gradată și compasul mediatoarea segmentului.

2. Trasați mediatoarele laturilor triunghiului *ABC*, în fiecare dintre situațiile:

a) triunghiul este ascuțitunghic;

b) triunghiul este dreptunghic;

c) triunghiul este obtuzunghic.

3. Trasați mediatoarele laturilor unui triunghi *DEF* atunci când acesta este:

a) triunghi isoscel;

b) triunghi echilateral;

c) triunghi oarecare.

4. Construiți triunghiul *ABC*, mediatoarele laturilor triunghiului și cercul circumscris acestuia, pentru fiecare dintre situațiile:

a) $AB = 5$ cm, $AC = 4$ cm, $\sphericalangle A = 60°$;

b) $BC = 6$ cm, $\sphericalangle B = 50°$, $\sphericalangle C = 100°$;

c) $AB = BC = AC = 10$ cm.

5. În triunghiul *DEF*, $DE = 5$ cm, *DM* este mediatoarea laturii *EF*, $M \in EF$, $FM = 3$ cm.

a) Măsurați lungimea laturii *DF*.

b) Calculați perimetrul triunghiului *DEF*.

6. Fie triunghiul dreptunghic *ABC*, $\sphericalangle A = 90°$ și fie punctul *P*, simetricul punctului *B* față de dreapta *AC*. Verificați dacă dreapta *AC* este mediatoarea laturii *BP* a triunghiului *BCP*.

7. În triunghiul *ABC*, mediatoarele laturilor *AB* și *BC* se intersectează în punctul *O*, iar triunghiul *BOC* este echilateral, cu perimetrul 30 cm. Determinați lungimea segmentului *AO*.

8. Construiți triunghiul *ABC* în care $AB = 5$ cm, iar punctul *C* este situat pe mediatoarea segmentului *AB*, la distanța 6 cm față de dreapta *AB*.

9. Mediatoarea laturii *MN* a triunghiului *MNP* intersectează latura *MP* în punctul *A* și dreapta *NP* în punctul *B*.

a) Verificați prin măsurare dacă triunghiurile *AMN* și *BMN* sunt isoscele.

b) Dacă $P_{AMN} = 24$ cm și $P_{BMN} = 28$ cm, demonstrați că $AB > 2$ cm.

Minitest

1. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate.

10 p p_1: Orice punct situat pe mediatoarea unui segment este … de capetele segmentului.

10 p p_2: Mediatoarele laturilor unui triunghi sunt … .

10 p p_3: Punctul de intersecție a mediatoarelor laturilor unui triunghi se numește … și este … de vârfurile triunghiului.

10 p p_4: Cercul care conține vârfurile unui triunghi se numește … .

2. Fie xOy un unghi și punctele A, B cu $A \in Ox$, $B \in Oy$.
Mediatoarele segmentelor OA și OB se intersectează în punctul C. Justificați următoarele afirmații.

25 p **a)** Triunghiul ACO este isoscel.

25 p **b)** Punctul C este centrul cercului circumscris triunghiului ABO.

Notă: Timp de lucru 20 de minute. Se acordă 10 puncte din oficiu.

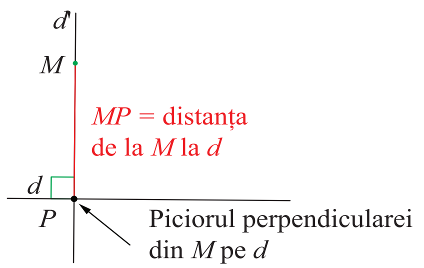
L3 Înălțimile unui triunghi. Concurență

Ne amintim

Două drepte sunt *perpendiculare* dacă acestea formează un *unghi drept*.

Dacă M este un punct exterior dreptei d, se numește *distanța* de la punctul M la dreapta d lungimea segmentului MP, unde P este piciorul perpendicularei din M pe d.

Dacă $M \in d$, distanța de la M la d este 0.



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Căsuța din imaginea alăturată are fațada în plan vertical în formă de triunghi.

Dacă dorim să știm ce înălțime are casa, putem măsura distanța de la vârful triunghiului la baza sa, adică să aflăm *înălțimea triunghiului*.

Definiție. Se numește *înălțime* a unui triunghi ABC numărul pozitiv egal cu distanța de la unul dintre vârfurile triunghiului la latura opusă.

Folosind definiția distanței de la un punct la o dreaptă, putem reformula enunțul de mai sus, astfel:

Se numește *înălțime* a unui triunghi *lungimea segmentului* determinat de un vârf al triunghiului cu piciorul perpendicularei din acel vârf pe latura opusă.

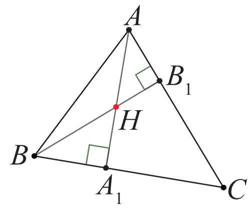
Observație. Vom folosi termenul de *înălțime* a triunghiului atât pentru a numi *segmentul* determinat de un vârf al triunghiului cu piciorul perpendicularei din acel vârf pe latura opusă cât și pentru lungimea acestui segment. Contextul în care lucrăm sugerează dacă este vorba de segmentul numit *înălțime* sau de numărul pozitiv corespunzător lungimii acestui segment.

În imaginea prezentată, $AA_1 \perp BC$, deci o înălțime a triunghiului este *segmentul* AA_1, dar și *lungimea segmentului* AA_1, adică distanța de la vârful A, la latura BC, opusă acestuia.

Pentru a construi înălțimile unui triunghi, folosim una din tehnicile de construcție a perpendicularei printr-un punct al planului pe o dreaptă dată, fie cu ajutorul echerului, fie cu compasul și rigla negradată.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicația 1.

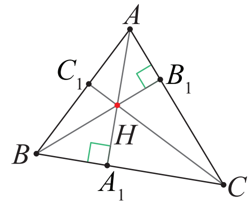


Se consideră triunghiul oarecare *ABC*.

a) Construiți, folosind unghiul drept al echerului, $AA_1 \perp BC$, $A_1 \in BC$, apoi $BB_1 \perp AC$, $B_1 \in AC$. Notați cu *H* punctul în care dreptele AA_1 și BB_1 se intersectează.

b) Construiți dreapta *CH* și notați cu C_1 punctul în care aceasta intersectează latura *AB*.

c) Măsurați unghiul CC_1A sau CC_1B și stabiliți dacă $CC_1 \perp AB$.



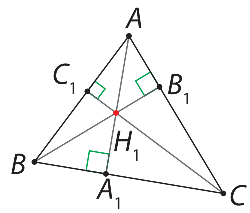
Soluție. **c)** $\sphericalangle CC_1A = \sphericalangle BC_1C = 90^\circ$, deci $CC_1 \perp AB$, adică CC_1 este înălțime a triunghiului.

Reținem!

Oricare ar fi triunghiul *ABC*, dreptele suport ale *înălțimilor* sale *sunt concurente* într-un punct numit *ortocentru* al triunghiului și notat, de regulă, cu *H*.
Dacă AA_1, BB_1, CC_1 sunt înălțimile triunghiului, atunci există *H*, astfel încât $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = \{H\}$.

Folosind reprezentarea geometrică a înălțimilor triunghiului *ascuțitunghic ABC* și notând ortocentrul triunghiului cu H_1, deduceți intuitiv că *ortocentrul* aparține interiorului triunghiului *ABC*, adică:

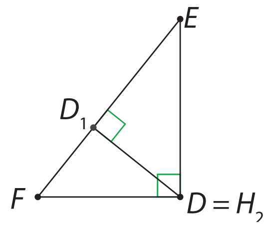
Dacă ΔABC este ascuțitunghic, iar H_1 este ortocentrul triunghiului, atunci $H_1 \in \text{Int}(\Delta ABC)$.



Aplicația 2.

a) Construiți înălțimile triunghiului *dreptunghic DEF*, $\sphericalangle D = 90^\circ$. Notați cu H_2 ortocentrul triunghiului.

b) Stabiliți intuitiv poziția punctului H_2. Deduceți că *ortocentrul* coincide cu vârful unghiului drept al triunghiului *DEF*.



Soluție.

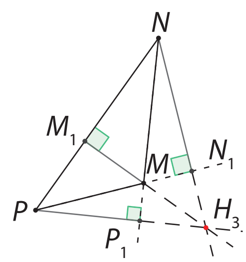
a) În triunghiul *DEF, ED* este înălțimea din *E, FD* este înălțimea din *F*. Dacă DD_1 este înălțimea din *D,* atunci $DD_1 \cap ED \cap FD = \{H_2\} = \{D\}$.

b) H_2 coincide cu *D*.

Aplicația 3.

a) Construiți înălțimile triunghiului *obtuzunghic MNP*, $\sphericalangle M > 90^\circ$. Notați cu H_3 ortocentrul triunghiului.

b) Stabiliți intuitiv poziția punctului H_3. Deduceți că *ortocentrul* se găsește în exteriorul triunghiului.



Soluție.

a) În triunghiul *MNP*, înălțimile din *N*, *P* și *M* sunt segmentele: NN_1, PP_1 respectiv MM_1, iar dreptele lor suport se intersectează în H_3. $MM_1 \cap NN_1 \cap PP_1 = \{H_3\}$.

b) Observăm că $H_3 \in \text{Ext}(\Delta ABC)$.

Reținem!

1. Într-un triunghi *ascuțitunghic*, ortocentrul este situat în *interiorul* triunghiului.
2. Într-un triunghi *dreptunghic*, ortocentrul coincide cu vârful unghiului drept al triunghiului.
3. Într-un triunghi *obtuzunghic*, ortocentrul este situat în *exteriorul* triunghiului.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Reprezentați câte un triunghi și trasați înălțimile, folosind instrumentele geometrice, în fiecare dintre cazurile:
a) Triunghiul este ascuțitunghic.
b) Triunghiul este dreptunghic.
c) Triunghiul este obtuzunghic.

2. Copiați pe caiete și completați spațiile libere astfel încât afirmațiile să fie adevărate.
p_1: Ortocentrul unui triunghi ascuțitunghic este situat în … triunghiului.
p_2: Ortocentrul unui triunghi dreptunghic coincide cu … .
p_3: Ortocentrul unui triunghi obtuzunghic este situat în … triunghiului.

3. **a)** Construiți triunghiul ABC în care $AB = 6$ cm, $\sphericalangle ABC = 55°$, $BC = 7$ cm.
b) Construiți înălțimile AM, BN și CP ale triunghiului ABC, cu ajutorul echerului și notați ortocentrul cu H.
c) Copiați pe caiete tabelul și scrieți în caseta liberă litera ***A***, dacă propoziția este adevărată, și litera ***F***, dacă propoziția este falsă.

Propoziția	***A/F***
Punctul M este piciorul perpendicularei din vârful A pe latura BC.	
$AN \perp BC$.	
$\sphericalangle CPA = 90°$.	
$AM \cap BN \cap CP = \{H\}$.	

4. Pe latura EF a triunghiului DEF, cu $\sphericalangle DEF = 65°$, se consideră punctul L astfel încât $\sphericalangle EDL = 25°$. Demonstrați că segmentul DL este înălțime a triunghiului DEF.

5. Construiți un triunghi obtuzunghic ABC în care $\sphericalangle BAC > 90°$. Reprezentați înălțimile BM și CN ale triunghiului și notați cu H punctul de intersecție a acestora. Demonstrați că:
a) $AH \perp BC$;
b) $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle ACN$.

6. Triunghiul MNP este dreptunghic, $\sphericalangle MNP = 90°$ și A este un punct pe latura MN. Perpendiculara din A pe dreapta MP intersectează NP în punctul B. Demonstrați că A este ortocentrul triunghiului BMP.

7. Fie triunghiul ABC cu $\sphericalangle BAC = 90°$ și AD înălțime a triunghiului.
a) Demonstrați că unghiurile ABD și CAD sunt congruente.
b) Pentru $\sphericalangle CAD = 28°$, aflați măsurile unghiurilor triunghiului ABD.

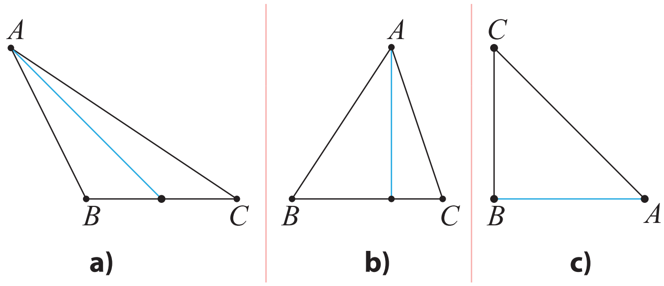
8. Reprezentați un triunghi DEF cu $\sphericalangle D = 57°$ și $\sphericalangle E = 75°$.
a) Calculați măsurile unghiurilor formate de laturile triunghiului cu înălțimea DM.
b) Determinați măsura unghiului ascuțit format de înălțimile EN și FP.

9. În triunghiul obtuzunghic ABC: $\sphericalangle ACB = 120°$, AD este înălțime a triunghiului și $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle CAD$.
a) Realizați un desen conform datelor problemei.
b) Demonstrați că triunghiul ABC este isoscel.

10. Se consideră triunghiul ABC în care $\sphericalangle B = 45°$, $\sphericalangle C = 60°$ și AD este înălțime a triunghiului.
a) Calculați măsurile unghiurilor BAD și CAD
b) Construiți triunghiul ABC, știind că $AD = 5$ cm. Descrieți toate etapele pe care le parcurgeți pentru realizarea construcției.

Minitest

30 p **1.** Segmentul colorat cu albastru nu este înălțime a triunghiului ABC în desenul:
A. a); **B.** b); **C.** c); **D.** b) și c)



60 p **2.** În triunghiul ABC, $\sphericalangle ABC = 50°$, $\sphericalangle ACB = 70°$, AD este înălțime a triunghiului, $E \in BC$ și AE este bisectoarea unghiului BAC, $E \in BC$. Determinați măsura unghiului DAE.

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

L4 Medianele unui triunghi. Concurență

Ne amintim

Mijlocul segmentului AB este punctul M, situat pe segmentul AB, la distanță egală de capete. ($AM = MB$).

Dacă M este situat pe segmentul AB și $MA \equiv MB$, atunci M este mijlocul acestuia.

Dacă $AB = 20$ cm și M este mijlocul segmentului AB, atunci $AM = MB = 10$ cm.

Dacă $AB = 20$ cm și $AM = MB = 10$ cm, atunci M este mijlocul segmentului AB.

Dacă M este *mijlocul* segmentului AB, atunci A și B sunt *simetrice* față de M.

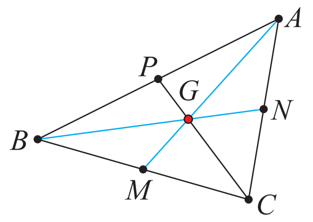
Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Definiție. Se numește *mediană* a unui triunghi segmentul determinat de un vârf al triunghiului și mijlocul laturii opuse.

Aplicația 1. **a)** Reprezentați un triunghi ABC și trasați medianele AM și BN. Notați cu G intersecția acestora.

b) Trasați semidreapta CG și notați cu P intersecția acesteia cu latura AB.

c) *Măsurați cu rigla gradată segmentele PA și PB și stabiliți* dacă CP este mediană a triunghiului.



Soluție. **c)** $PA = PB$, deci CP este mediană a triunghiului.

Reținem!

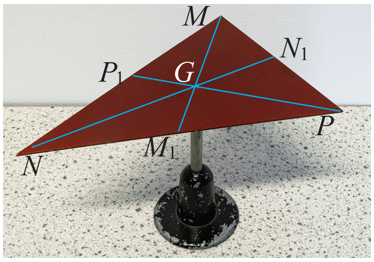
În orice triunghi, medianele sunt concurente într-un punct, numit *centru de greutate* al triunghiului și care se notează, de regulă, cu G.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicația 2.

a) Decupați din carton o suprafață triunghiulară MNP. Reprezentați medianele MM_1, NN_1, PP_1, ale triunghiului și notați cu G centrul de greutate al acestuia.

b) Încercați să mențineți suprafața decupată în poziție orizontală, sprijinind-o doar pe punctul G, ca în imaginea alăturată.



Intuitiv, *centrul de greutate* al unei suprafețe este punctul în care poate fi sprijinită suprafața astfel încât să rămână în echilibru, în poziție orizontală.

În practică, cunoașterea poziției centrului de greutate a unei suprafețe omogene este esențială pentru stabilirea echilibrului acesteia.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Reprezentați câte un triunghi și trasați medianele, folosind instrumentele geometrice, în fiecare dintre cazurile:

a) Triunghiul este ascuțitunghic.

b) Triunghiul este dreptunghic.

c) Triunghiul este obtuzunghic.

2. Fie triunghiul ABC, AD, BE mediane ale triunghiului și $AD \cap BE = \{G\}$. Copiați pe caiete și completați spațiile libere astfel încât afirmațiile să fie adevărate.

p_1: Punctul D este … laturii BC.

p_2: Dacă $AC = n \cdot AE$, atunci n este egal cu … .

p_3: Punctul G se numește … al triunghiului ABC.

3. Reprezentați triunghiul *ABC*, medianele sale *AD, BE, CF* și notați cu *G* centrul de greutate al triunghiului.

a) Măsurați cu rigla gradată și exprimați în milimetri lungimile segmentelor *AD*, *AG*, *GD*. Completați cu datele obținute din măsurători tabelul următor:

AD	AG	GD	$\frac{AG}{AD}$	$\frac{GD}{AD}$

b) Măsurați cu rigla gradată segmentele *BD*, *BG*, *GE* respectiv *CF*, *CG*, *GF*.
Completați datele obținute în tabelul următor:

BE	BG	GE	$\frac{BG}{BE}$	$\frac{GE}{BE}$
CF	CG	GF	$\frac{CG}{GF}$	$\frac{CF}{GF}$

c) Folosind rezultatele măsurătorilor efectuate, scrieți în caseta liberă litera ***A***, dacă propoziția este adevărată și litera ***F***, dacă propoziția este falsă.

Propoziția	***A/F***	Propoziția	***A/F***
p_1: $AG = \frac{2}{3} \cdot AD$		p_3: $\frac{AG}{AD} = \frac{BG}{BE} = \frac{CG}{CF} = \frac{2}{3}$	
p_2: $BE = 2 \cdot GE$		p_4: $CF = 3 \cdot GF$	

Comentariu. Problema 3 validează, prin măsurare, următorul rezultat important care va fi demonstrat ulterior:

În orice triunghi, *centrul de greutate* se află pe fiecare mediană la *două treimi de vârf* și *o treime de bază.*

4. Segmentele *AM*, *BN*, *CP* sunt medianele ΔABC, iar punctul *G* este centrul de greutate al triunghiului. Folosind rezultatul de mai sus, calculați:

a) lungimile segmentelor *AG* și *GM*, dacă $AM = 24$ cm.

b) lungimea segmentului *BN*, dacă $BG = 12$ cm.

c) lungimile segmentelor *CG* și CP, dacă $GP = 4$ cm.

5. **a)** Construiți triunghiul dreptunghic *DEF* cu $\sphericalangle EDF = 90°$, $DE = 6$ cm, $DF = 8$ cm.

b) Construiți mediana *DM* corespunzătoare ipotenuzei *EF* și măsurați cu ajutorul riglei gradate lungimile segmentelor *DM* și *EF*.

c) Precizați care dintre relațiile următoare este adevărată:

A. $DM = EF$;　　**C.** $DM = \frac{EF}{3}$;

B. $DM = \frac{EF}{2}$;　　**D.** $DM = 2EF$.

6. Reprezentați printr-un desen un cerc de centru *O* și fixați pe acesta punctele *A*, *B*, *C*, cu *BC* diametru.

a) Determinați cu ajutorul raportorului măsura unghiului *BAC*.

b) Pe baza rezultatelor obținute la problemele 5 și 6, deduceți dacă următoarele afirmații pot fi adevărate:

- „În orice triunghi dreptunghic, *mediana* corespunzătoare ipotenuzei are lungimea egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei."
- „Dacă mediana corespunzătoare unei laturi are lungimea egală cu jumătate din lungimea acestei laturi, atunci triunghiul este dreptunghic."

7. Triunghiurile *ABP* și *ABQ* sunt dreptunghice, $\sphericalangle APB = \sphericalangle AQB = 90°$, iar punctul *C* este mijlocul segmentului *AB*. Demonstrați, folosind rezultatele obținute la problema 6, că $CP \equiv CQ$.

Minitest

1. Se consideră triunghiul *ABC*. Copiați pe caiete și completați spațiile punctate pentru a obține propoziții adevărate.

10 p **a)** Dacă punctul *M* este mijlocul laturii *BC*, atunci *AM* este … a triunghiului ….

10 p **b)** Dacă *BN* este mediană a triunghiului *ABC*, atunci punctul *N* este … laturii ….

10 p **c)** Dacă *AM* și *BN* sunt mediane ale triunghiului *ABC* și $AM \cap BN = \{G\}$, atunci *G* este … al triunghiului ….

10 p **d)** Dacă *AM* este mediană a triunghiului *ABC*, $BM = 3 \cdot x$ cm și $CM = (x + 8)$ cm, atunci $x =$....

2. Fie *MA* și *NB* mediane ale triunghiului *MNP* și *G* centrul său de greutate. Se știe că $MG = 28$ cm și $BG = 14$ cm.

25 p **a)** Calculați lungimile segmentelor *MA* și *NB*.

25 p **b)** Demonstrați că triunghiurile *ABG* și *MNG* sunt isoscele.

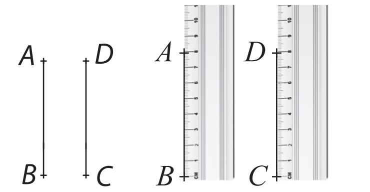
Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

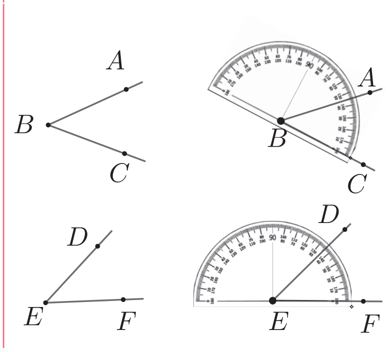
6.3 Congruența triunghiurilor

L1 Congruența triunghiurilor oarecare

Ne amintim

Două figuri geometrice sunt *congruente* dacă, prin suprapunere, acestea *coincid*.

<table>
<tr><th>Enunț</th><th>În limbajul simbolisticii matematice</th><th>Reprezentare geometrică</th></tr>
<tr><td>Două segmente AB și CD sunt congruente dacă și numai dacă au aceeași lungime.</td><td>Dacă $AB \equiv CD$, atunci $AB = CD$.
Dacă $AB = CD$, atunci $AB \equiv CD$.</td><td>

$AB \equiv CD$ $AB = CD = 6$ cm</td></tr>
<tr><td>Două unghiuri ABC și DEF sunt congruente dacă și numai dacă au aceeași măsură.</td><td>Dacă $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DEF$, atunci $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEF$.
Dacă $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEF$, atunci $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DEF$.</td><td>
</td></tr>
</table>

Rezolvăm și observăm

Ne propunem să aflăm prin ce se caracterizează două *triunghiuri congruente*, adică două triunghiuri care *coincid prin suprapunere*.

Activitate practică 1. Materiale necesare: două folii transparente, markere, instrument de scris pe caiet.

Pasul 1. Pe o folie transparentă, reprezentați un triunghi oarecare *ABC*.

Pasul 2. Suprapuneți a doua folie transparentă peste prima și „copiați” triunghiul reprezentat. Notați noul triunghi cu $A_1B_1C_1$ astfel încât A se suprapune cu A_1, B se suprapune cu B_1, C se suprapune cu C_1. Stabiliți, intuitiv, dacă triunghiurile sunt *congruente*.

Pasul 3. Detașați cele două folii, observați și scrieți corespondența între elementele triunghiurilor.

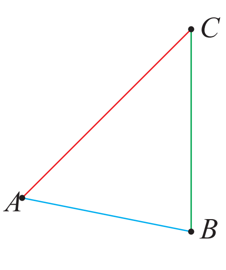
Pasul 4. Stabiliți, prin suprapunere, dacă elementele corespunzătoare ale celor două triunghiuri sunt congruente.

Pasul 5. Rotiți una dintre folii astfel încât A se suprapune pe B_1 și semidreapta AB se suprapune pe semidreapta B_1C_1.

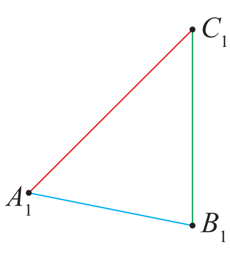
Pasul 6. Stabiliți dacă triunghiul ABC coincide, prin suprapunere, cu triunghiul $B_1C_1A_1$.

Soluție.

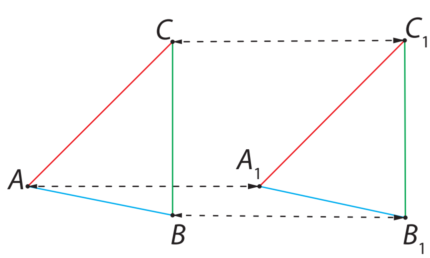
Pasul 1



Pasul 2



Pasul 3

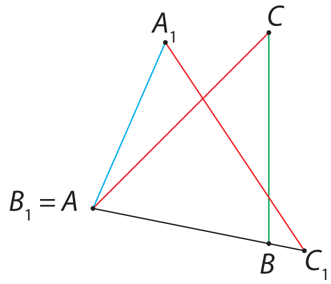


Elemente corespunzătoare	
ΔABC	$\Delta A_1B_1C_1$
$\sphericalangle A$	$\sphericalangle A_1$
$\sphericalangle B$	$\sphericalangle B_1$
$\sphericalangle C$	$\sphericalangle C_1$
AB	A_1B_1
AC	A_1C_1
BC	B_1C_1

Pasul 4

$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A_1$,
$\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B_1$,
$\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C_1$
$AB \equiv A_1B_1$,
$AC \equiv A_1C_1$,
$BC \equiv B_1C_1$.

Pasul 5



Pasul 6

ΔABC *și* $\Delta B_1C_1A_1$ nu coincid prin suprapunere, deci nu sunt congruente

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Definiție.

Două triunghiuri ΔABC *și* $\Delta A_1B_1C_1$ sunt congruente dacă au toate elementele corespunzătoare respectiv congruente.

Scriem $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$

În limbajul simbolisticii matematice

Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$, atunci $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A_1$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B_1$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C_1$, $AB \equiv A_1B_1$, $AC \equiv A_1C_1$, $BC \equiv B_1C_1$.
Dacă $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A_1$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B_1$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C_1$, $AB \equiv A_1B_1$, $AC \equiv A_1C_1$, $BC \equiv B_1C_1$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$.

Aplicația practică 1 demonstrează că e posibil ca $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$, dar $\Delta ABC \not\equiv \Delta B_1C_1A_1$, adică înainte de a scrie relația între două triunghiuri congruente, trebuie să identificăm elementele corespunzătoare congruente ale acestora.

Reținem!

1. Dacă facem referire la un triunghi, nu este esențială ordinea în care citim vârfurile. Astfel, triunghiul cu vârfurile *A*, *B*, *C*, poate fi scris în oricare dintre formele: ΔABC, ΔCBA, ΔACB, ΔBCA, ΔBAC, ΔCAB.
2. Dacă ne referim la *congruența triunghiurilor*, este esențial ca scrierea celor două triunghiuri să respecte ordinea de *corespondență* între elemente.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Problemă rezolvată

Considerăm triunghiurile congruente *ABC* și *MNP*.

a) Dacă $AB = 10$ cm, $MP = 8$ cm, $BC = 9$ cm, calculați perimetrul triunghiului *MNP*.
b) Dacă $\sphericalangle A = 74^\circ$ și $\sphericalangle N \equiv \sphericalangle P$, calculați măsura unghiului *B*.

Reformulare	*Demonstrație*
a) Ipoteză: $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$, $AB = 10$ cm, $MP = 8$ cm, $BC = 9$ cm *Concluzie:* $P_{\Delta MNP}$	Din $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$, rezultă $AB \equiv MN$, $AC \equiv MP$, $BC \equiv NP$, adică $MN = 10$ cm, $NP = 9$ cm, $MP = 8$ cm și $P_{\Delta MNP} = MN + NP + MP = 27$ cm.
b) Ipoteză: $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$, $\sphericalangle A = 74^\circ$ și $\sphericalangle N \equiv \sphericalangle P$ *Concluzie:* $\sphericalangle B$	Din $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$, rezultă $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle M$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle N$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle P$. Obținem $\sphericalangle M = \sphericalangle A = 74^\circ$. Atunci, $\sphericalangle N + \sphericalangle P = 180^\circ - 74^\circ = 106^\circ$. Din $\sphericalangle N \equiv \sphericalangle P$, rezultă $\sphericalangle N = \sphericalangle P = 53^\circ$. Dar, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle N$, adică $\sphericalangle B = 53^\circ$.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Triunghiurile ABC și DEF sunt congruente. Copiați pe caiete și completați spațiile punctate astfel încât să obțineți relații adevărate:

a) $AB \equiv \ldots$; **c)** $\ldots \equiv DF$;
b) $\sphericalangle A \equiv \ldots$; **d)** $\ldots \equiv \sphericalangle DFE$.

2. Triunghiurile ABC și MNP sunt congruente.

a) Argumentați faptul că scrierea $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ este echivalentă cu scrierea $\Delta ACB \equiv \Delta MPN$.

b) Identificați și prezentați alte două forme de scriere corectă a congruenței celor două triunghiuri.

3. Triunghiul ABC are proprietatea că $\Delta ABC \equiv \Delta ACB$.

a) Scrieți congruența laturilor corespunzătoare.

b) Folosind rezultatele de la subpunctul a), demonstrați că triunghiul ABC este isoscel.

c) Dacă perimetrul triunghiului ABC este 40 cm, iar $BC = 18$ cm, calculați lungimile laturilor AB și AC.

4. Copiați pe caiete și completați în caseta liberă ***A***, dacă propoziția este adevărată și ***F***, dacă propoziția este falsă.

Propoziția	***A/F***
p_1: Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$, atunci $P_{\Delta ABC} = P_{\Delta DEF}$.	
p_2: Dacă $P_{\Delta ABC} = P_{\Delta DEF}$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$.	
p_3: Dacă două triunghiuri sunt congruente, atunci ele au unghiurile respectiv congruente.	
p_4: Dacă două triunghiuri au unghiurile respectiv congruente, atunci ele sunt congruente.	

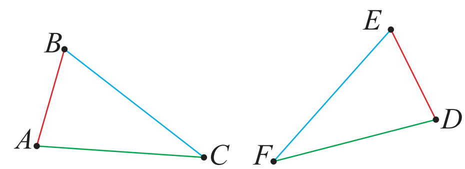
5. Triunghiul DEF are proprietatea că $\Delta DEF \equiv \Delta EFD$.

a) Scrieți congruența laturilor corespunzătoare și congruența unghiurilor corespunzătoare.

b) Folosind rezultatele de la subpunctul a), deduceți natura triunghiului DEF.

c) Determinați măsura unghiului DFE.

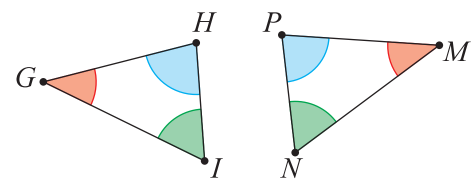
6. **a)** În desenul de mai jos, sunt reprezentate două triunghiuri congruente, iar perechile de laturi congruente sunt reprezentate cu aceeași culoare.



Alegeți scrierea corectă a congruenței lor.

A. $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$; **B.** $\Delta ABC \equiv \Delta DFE$; **C.** $\Delta FDE \equiv \Delta CBA$.

b) În desenul următor sunt reprezentate două triunghiuri congruente, iar perechile de unghiuri congruente sunt marcate cu aceeași culoare.



Alegeți scrierea corectă dintre următoarele:

A. $\Delta GHI \equiv \Delta MNP$; **B.** $\Delta GIH \equiv \Delta MNP$; **C.** $\Delta PMN \equiv \Delta IHG$.

7. În triunghiul ABC, $\sphericalangle C$ este drept, iar $\sphericalangle B = 36^\circ$. Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$, precizați măsurile unghiurilor D și F.

Minitest

1. Desenați pe o foaie de hârtie un pătrat $ABCD$ și trasați segmentul AC. Decupați suprafața pătratică $ABCD$ și îndoiți-o după dreapta AC.

15 p **a)** Precizați dacă punctul B se suprapune peste punctul D.

15 p **b)** Stabiliți intuitiv dacă triunghiurile ABC și ADC sunt congruente.

15 p **c)** Scrieți congruența elementelor corespunzătoare ale celor două triunghiuri.

2. Triunghiul ABC are proprietatea $\Delta ABC \equiv \Delta BCA$.

15 p **a)** Scrieți laturile corespunzătoare congruente.

30 p **b)** Dacă $AB + \frac{BC}{2} + \frac{AC}{3} = 11$ cm, calculați perimetrul triunghiului ABC.

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

L2 Criterii de congruență a triunghiurilor

Ne amintim

În practică, sunt utile atât proprietățile matematice pe care figurile congruente le au, cât și unele *condiții suficiente* cu ajutorul cărora să demonstrăm congruența unor figuri geometrice.

Dacă sunt date numerele pozitive a, b, c, cu $a + b > c$, $a + c > b$ și $b + c > a$, atunci există un unic triunghi ABC cu $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. (Cazul de construcție LLL)

Dacă sunt date două numere pozitive a și b și măsura unui unghi $\alpha°$, atunci există un unic triunghi ABC cu $BC = a$, $AC = b$, $\sphericalangle ACB = \alpha°$. (Cazul de construcție LUL)

Dacă sunt date măsurile a două unghiuri $\alpha°$ și $\beta°$, cu $\alpha° + \beta° < 180°$ și numărul pozitiv a, atunci există un unic triunghi ABC cu $BC = a$, $\sphericalangle ABC = \alpha°$ și $\sphericalangle ACB = \beta°$. (Cazul de construcție ULU)

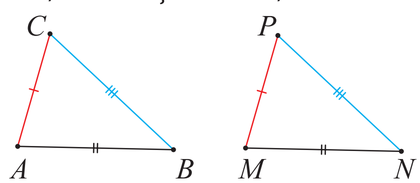
Descoperim, înțelegem, exemplificăm

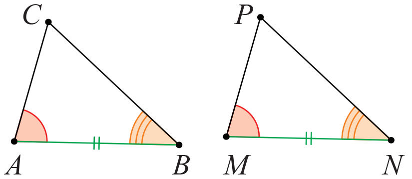
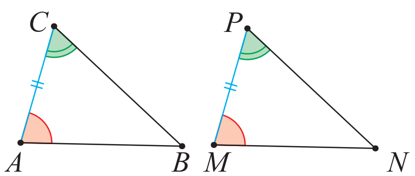
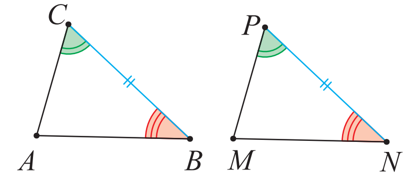
Dacă două triunghiuri sunt congruente, conform definiției, rezultă șase perechi de elemente congruente, numite elemente corespunzătoare ale celor două triunghiuri. Ne propunem să aflăm câte perechi de elemente corespunzătoare congruente sunt *suficiente* pentru a demonstra că două triunghiuri sunt congruente.

Cazurile de construcție amintite mai sus sugerează unicitatea triunghiului construit, făcând abstracție de poziția acestuia în plan. Triunghiurile congruente sunt triunghiuri care au exact aceleași măsuri ale elementelor corespunzătoare, dar care pot avea poziții diferite în plan.

Prin urmare, deducem că, pentru a demonstra congruența a două triunghiuri, este suficient ca ele să poată fi construite cu același caz și să aibă aceleași dimensiuni ale elementelor utilizate în construcție.

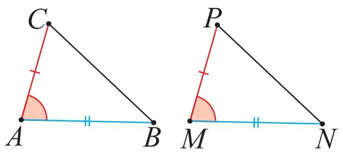
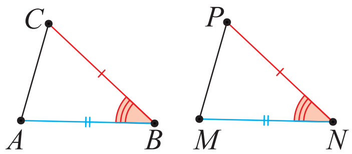
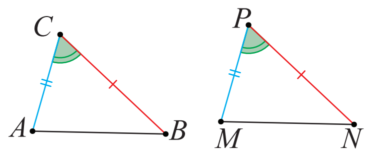
Obținem, cu acest raționament, următoarele criterii (cazuri) de congruență a triunghiurilor:

Criteriul	*În limbajul simbolisticii matematice / Reprezentare geometrică*
1. Cazul de congruență LLL Dacă două triunghiuri au toate laturile respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.	Dacă $AB \equiv MN$, $BC \equiv NP$ și $AC \equiv MP$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ 
2. Cazul de congruență ULU Dacă două triunghiuri au o latură și unghiurile alăturate ei respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt congruente	

În limbajul simbolisticii matematice / Reprezentare geometrică		
Dacă $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle M$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle N$ și $AB \equiv MN$, atunci $\Delta\, ABC \equiv \Delta\, MNP$. 	Dacă $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle M$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle P$ și $AC \equiv MP$, atunci $\Delta\, ABC \equiv \Delta\, MNP$. 	Dacă $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle N$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle P$ și $BC \equiv NP$, atunci $\Delta\, ABC \equiv \Delta\, MNP$. 

3. Cazul de congruență LUL

Dacă două triunghiuri au două laturi și unghiul determinat de ele respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.

În limbajul simbolisticii matematice		
Dacă $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle M$, $AB \equiv MN$ și $AC \equiv MP$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$	Dacă $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle N$, $BC \equiv NP$ și $AB \equiv MN$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$.	Dacă $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle P$, $AC \equiv MP$ și $BC \equiv NP$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$.
		

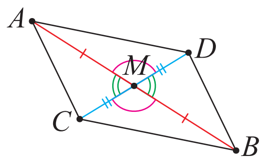
Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Problemă rezolvată. Segmentele AB și CD au același mijloc, punctul M, iar C este exterior dreptei AB.

a) Demonstrați că $\Delta MAC \equiv \Delta MBD$ și $\Delta MAD \equiv \Delta MBC$.
b) Folosind rezultatul de la subpunctul a), deduceți că $AD \equiv BC$ și $AC \equiv BD$.
c) Demonstrați că triunghiurile CAD și DBC sunt congruente.
d) Folosind rezultatele demonstrate mai sus justificați paralelismul: $AD \parallel CB$ și $AC \parallel BD$.

Ipoteză:
$AB \cap CD = \{M\}$,
$MA \equiv MB$ și
$MC \equiv MD$.

Concluzie:
a) $\Delta MAC \equiv \Delta MBD$ și $\Delta MAD \equiv \Delta MBC$.
b) $AC \equiv BD$ și $AD \equiv BC$.
c) $\Delta CAD \equiv \Delta DBC$.
d) $AD \parallel CB$ și $AC \parallel BD$



Demonstrație

a) Din ipoteză, $MA \equiv MB$. (1)
Unghiurile AMC și BMD sunt opuse la vârf, deci $\sphericalangle AMC \equiv \sphericalangle BMD$. (2)
Din ipoteză, $MC \equiv MD$. (3)
Din (1), (2) și (3), conform cazului de congruență LUL, rezultă $\Delta MAC \equiv \Delta MBD$.
Din ipoteză, $MA \equiv MB$. (4)
Unghiurile AMD și BMC sunt opuse la vârf, deci $\sphericalangle AMD \equiv \sphericalangle BMC$. (5)
Din ipoteză, $MD \equiv MC$. (6)
Din (4), (5) și (6), conform cazului de congruență LUL, rezultă $\Delta MAD \equiv \Delta MBC$.

b) Din $\Delta MAC \equiv \Delta MBD$, rezultă $AC \equiv BD$, iar din $\Delta MAD \equiv \Delta MBC$, rezultă $AD \equiv BC$.

c) Din b), știm că $AC \equiv BD$ și $AD \equiv BC$. Dar, $CD \equiv CD$ (latură comună). Conform cazului de congruență LLL, rezultă $\Delta CAD \equiv \Delta DBC$.

d) Congruența demonstrată la punctul c) implică $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle CDB$ și $\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle DCB$. Dreptele AC și DB formează cu secanta CD unghiuri alterne interne congruente, adică $AC \parallel BD$. Analog, pentru dreptele AD și CB, cu secanta CD, rezultând $AD \parallel CB$.

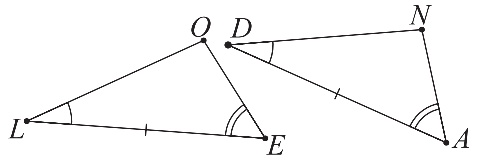
Temă de portofoliu.

Segmentele AC și BD se intersectează în punctul M. Știind că $AB \equiv CD$ și $AB \parallel CD$, demonstrați că:

a) punctul M este mijlocul comun al segmentelor AC și BD;
b) dreptele AD și BC sunt paralele.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. În figura de mai jos, elementele celor două triunghiuri, despre care știm că sunt congruente, sunt marcate la fel.

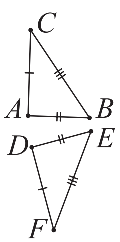


a) Scrieți congruențele corespunzătoare marcajelor din desen.

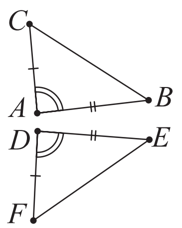
b) Deduceți dacă triunghiurile sunt congruente, precizând criteriul (cazul) de congruență folosit și scrieți relația dintre ele.

2. În fiecare din următoarele configurații, sunt reprezentate câte două triunghiuri congruente. Elementele corespunzătoare ale celor două triunghiuri (laturi și unghiuri), despre care știm că sunt congruente, sunt marcate cu simboluri identice.

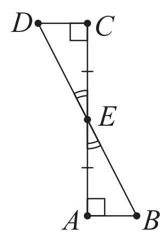
a)



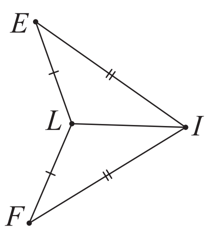
b)



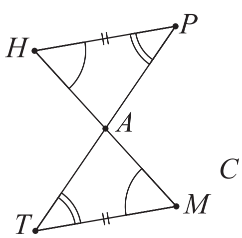
c)



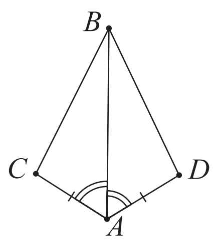
d)



e)



f)



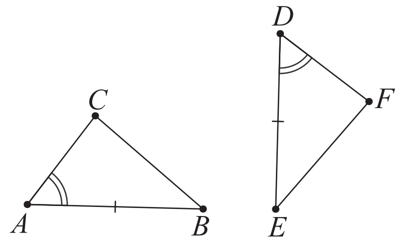
Folosind marcajele din desene, pentru fiecare subpunct, completați × în caseta corespunzătoare criteriului conform căruia triunghiurile sunt congruente, după model.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
L.L.L.	×					
L.U.L.						
U.L.U.						

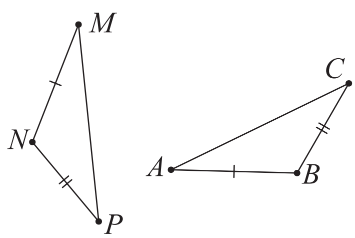
3. Oana și Petra au de demonstrat că triunghiurile ABC și DEF sunt congruente. Ele au demonstrat deja că $AB \equiv DE$ și $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle D$.

a) Dacă Oana va folosi criteriul LUL, precizați ce congruență mai are ea de demonstrat.

b) Dacă Petra va folosi criteriul ULU, precizați ce congruență mai are ea de demonstrat.



4. Adrian are de demonstrat că triunghiurile ABC și MNP sunt congruente. El a demonstrat deja că $AB \equiv MN$ și $BC \equiv NP$. Constată că nu are date suficiente pentru a demonstra că $AC \equiv MP$. Precizați ce caz de congruență ar putea folosi și ce congruență mai are de demonstrat pentru a aplica acest caz.



5. Au loc congruențele:

$\Delta ABC \equiv \Delta DEF$ și $\Delta\, DEF \equiv \Delta\, PQR$.

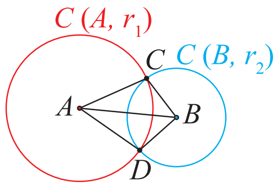
Determinați măsurile unghiurilor triunghiului ABC știind că $\sphericalangle F = 54°$ și $\sphericalangle Q = 72°$.

6. **a)** Două triunghiuri isoscele au bazele congruente și perimetrele egale. Demonstrați că triunghiurile sunt congruente.

b) Două triunghiuri echilaterale au perimetrele egale. Demonstrați că triunghiurile sunt congruente.

7. Triunghiul ABC este isoscel, iar punctul M este mijlocul bazei BC. Precizați dacă triunghiurile ABM și ACM sunt congruente și, în caz afirmativ, precizați cazul de congruență folosit.

8. Cercurile $\mathcal{C}(A, r_1)$ și $\mathcal{C}(B, r_2)$ sunt secante în punctele C și D.
Demonstrați că triunghiurile ABC și ABD sunt congruente.



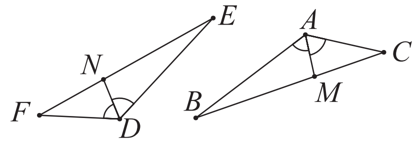
9. Triunghiul DEF este oarecare și A este mijlocul laturii DE. Perpendiculara în A pe dreapta DE intersectează latura DF în punctul M și dreapta EF în punctul N.

a) Realizați un desen în conformitate cu datele problemei.

b) Demonstrați că: $\Delta ADM \equiv \Delta AEM$; $\Delta ADN \equiv \Delta AEN$; $\Delta DMN \equiv \Delta EMN$.

10. Fie D mijlocul laturii AB a triunghiului ABC și Q mijlocul laturii MN a triunghiului MNP.
Demonstrați că dacă $\Delta BCD \equiv \Delta NPQ$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$.

11. În desenul următor, $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$, M este un punct pe latura BC, N este un punct pe latura EF. Dacă AM este bisectoarea unghiului BAC, iar DN este bisectoarea unghiului EDF, demonstrați că $\Delta ABM \equiv \Delta DEN$.



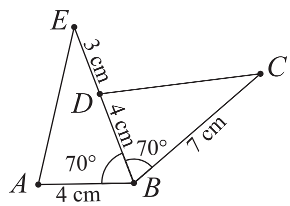
12. Punctul M este mijlocul laturii BC a triunghiului ABC, iar punctul N este mijlocul laturii EF a triunghiului DEF. Demonstrați că, dacă $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$, atunci $\Delta ACM \equiv \Delta DFN$.

13. Punctul O este situat în interiorul triunghiului ABC și $\Delta AOB \equiv \Delta BOC \equiv \Delta COA$.

a) Demonstrați că triunghiul ABC este echilateral.

b) Calculați măsura unghiului AOB.

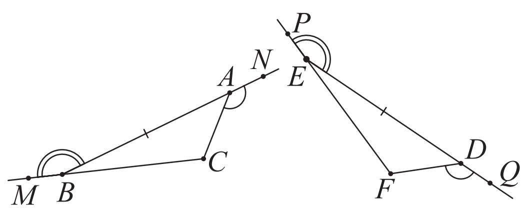
14. În configurația următoare, lungimile segmentelor sunt exprimate în centimetri. Demonstrați că triunghiurile reprezentate sunt congruente.



15. Pe prelungirile laturilor AB și AC ale triunghiului ABC, se iau punctele P, respectiv Q, astfel încât $AP \equiv AB$ și $AQ \equiv AC$. Demonstrați că $\Delta ABC \equiv \Delta APQ$.

Minitest

30 p **1.** În figura alăturată, sunt marcate la fel unghiuri, respectiv segmente, congruente. Demonstrați că $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$.



2. Reprezentați un unghi ascuțit xOy și fixați pe laturile sale punctele $A, B \in Ox$, $C, D \in Oy$ astfel încât: $OA = 2{,}5$ cm, $AB = 5{,}5$ cm, $OD = 8$ cm, $OB > OA$, $OC < OD$ și $\sphericalangle OBC \equiv \sphericalangle ODA$.

30 p **a)** Demonstrați că $\Delta ADO \equiv \Delta CBO$.

30 p **b)** Calculați lungimea segmentului OC.

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

L3 Criteriile de congruență a triunghiurilor dreptunghice

Ne amintim

Se numește *triunghi dreptunghic* un triunghi care are un unghi drept.	ΔABC este dreptunghic dacă $\sphericalangle A = 90^\circ$ sau $\sphericalangle B = 90^\circ$ sau $\sphericalangle C = 90^\circ$.
Unghiurile ascuțite ale unui triunghi dreptunghic sunt complementare.	Dacă ΔABC este dreptunghic și $\sphericalangle A = 90^\circ$, atunci $\sphericalangle B + \sphericalangle C = 90^\circ$.
Într-un triunghi dreptunghic, latura opusă unghiului drept se numește *ipotenuză*, iar laturile care formează unghiul drept se numesc *catete* ale triunghiului.	Dacă ΔABC este dreptunghic și $\sphericalangle A = 90^\circ$, atunci BC este ipotenuză, iar AB și AC sunt catete ale triunghiului.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Dacă ne referim la două triunghiuri dreptunghice, avem deja una dintre relațiile de congruență a elementelor corespunzătoare și anume *congruența unghiurilor drepte*. Atunci, reluăm criteriile de congruență LUL și ULU a triunghiurilor.

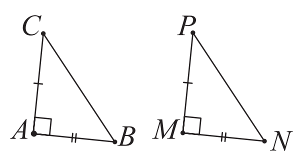
Considerăm triunghiurile dreptunghice ABC și MNP cu $\sphericalangle A = \sphericalangle M = 90^\circ$. Atunci laturile AB și AC sunt catete, iar BC este ipotenuză în triunghiul ABC, iar MN și MP sunt *catete*, iar NP este ipotenuză în triunghiul MNP.

Dacă se cunoaște un unghi ascuțit, atunci al doilea este complementul său, deci este cunoscut.

Cazul de congruență LUL devine **cazul CC** (catetă - catetă) și poate fi formulat astfel:

(CC)

Dacă două triunghiuri dreptunghice au catetele respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.



Dacă $AB \equiv MN$ și $AC \equiv MP$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$

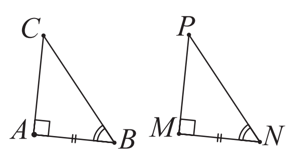
Cazul de congruență ULU conduce la două situații distincte.

1. Dacă latura vizată este catetă, atunci devine **cazul CU** (catetă - unghi ascuțit) și poate fi formulat astfel:

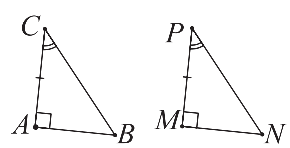
(CU)

a) Dacă două triunghiuri dreptunghice au câte o catetă și unghiul ascuțit alăturat acesteia respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.

Dacă $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle N$ și $AB \equiv MN$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$.

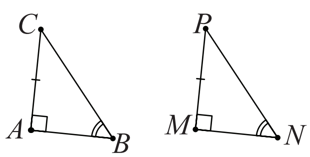


Dacă $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle P$ și $AC \equiv MP$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$.

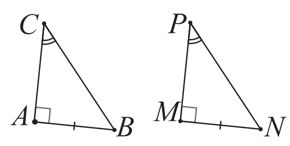


b) Dacă două triunghiuri dreptunghice au câte o catetă și unghiul ascuțit opus acesteia respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.

Dacă $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle N$ și $AC \equiv MP$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$.



Dacă $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle P$ și $AB \equiv MN$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$.

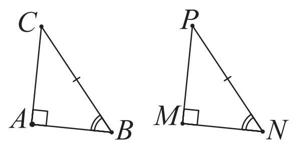


Dacă latura vizată este ipotenuza, atunci devine **cazul IU** (ipotenuză - unghi ascuțit) și poate fi formulat astfel:

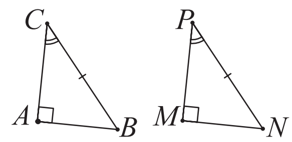
(IU)

Dacă două triunghiuri dreptunghice au ipotenuzele și câte un unghi ascuțit respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.

Dacă $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle N$ și $BC \equiv NP$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$.

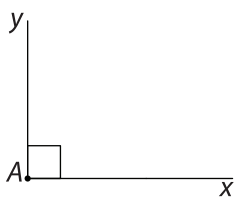


Dacă $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle P$ și $BC \equiv NP$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$.

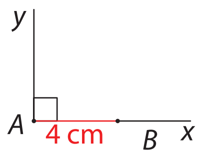


Aplicație practică

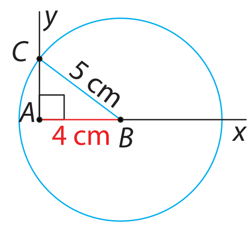
Pasul 1. Construiți unghiul drept xAy.



Pasul 2. Pe latura Ax a unghiului marcați punctul B astfel încât $AB = 4$ cm.



Pasul 3. Construiți cercul cu centrul B, de rază 5 cm, și notați $\{C\} = \mathcal{C}(B, 5\text{ cm}) \cap Ay$



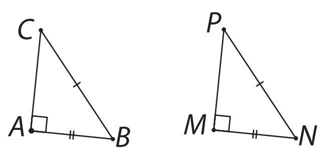
Ați construit triunghiul dreptunghic unic, cu o catetă de 4 cm și cu ipotenuza de 5 cm.

Construcția de mai sus ne furnizează un nou criteriu de congruență a triunghiurilor dreptunghice, **cazul IC** (ipotenuză - catetă), care poate fi formulat astfel:

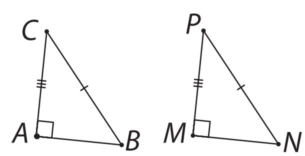
(IC)

Dacă două triunghiuri dreptunghice au ipotenuzele și câte o catetă respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.

Dacă $BC \equiv NP$ și $AB \equiv MN$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$.



Dacă $BC \equiv NP$ și $AC \equiv MP$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$.

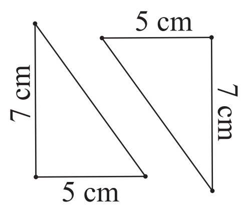


Observație. Toate criteriile au fost formulate în ipoteza $\sphericalangle A = \sphericalangle M = 90°$.

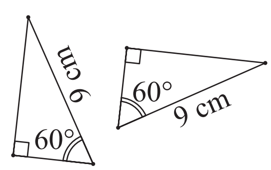
Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. În fiecare dintre următoarele configurații, sunt reprezentate câte două triunghiuri dreptunghice congruente.

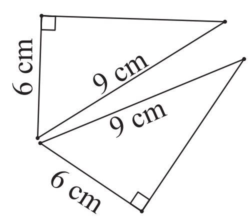
a)



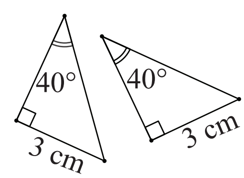
b)



c)



d)

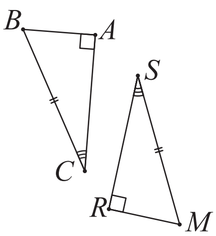


Folosind datele din reprezentările geometrice, pentru fiecare subpunct, completați x în caseta corespunzătoare criteriului conform căruia triunghiurile sunt congruente, după model.

Cazul	**a)**	**b)**	**c)**	**d)**
IU				
CU				**x**
IC				
CC				

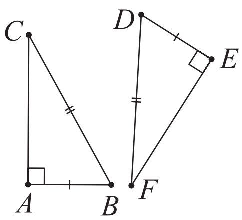
2. În reprezentările următoare elementele congruente sunt marcate la fel.
Copiați pe caiete și completați spațiile libere așa încât să obțineți propoziții adevărate.

a)



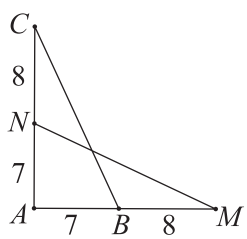
Cele două triunghiuri sunt congruente conform cazului de congruență … și scriem $\Delta ABC \equiv \ldots$.

b)



Cele două triunghiuri sunt congruente conform cazului de congruență … și scriem $\Delta ABC \equiv \ldots$.

3. În figura alăturată, triunghiurile *ABC* și *ANM* sunt dreptunghice, iar lungimile segmentelor sunt exprimate în centimetri.



a) Are loc congruența:

A. $\Delta ABC \equiv \Delta AMN$; **C.** $\Delta BCA \equiv \Delta MAN$;
B. $\Delta ACB \equiv \Delta NAM$; **D.** $\Delta ABC \equiv \Delta ANM$.

b) La subpunctul a) s-a folosit cazul de congruență:

A. IC. **B.** CC. **C.** IU. **D.** CU.

4. Punctele *A*, *B*, *C* sunt coliniare în această ordine și $AC = 2 \cdot BC$. Pe perpendicularele în punctele *A* și *C* pe dreapta *AC* se iau punctele *M*, respectiv *N*, astfel încât $AM \equiv CN$. Demonstrați că:

a) $\Delta MAB \equiv \Delta NCB$;

b) $\Delta ACN \equiv \Delta CAM$.

5. Se consideră un punct *P* situat pe bisectoarea unghiului propriu *xOy*. Știind că distanța de la punctul *P* la dreapta *Ox* este 4,5 cm, calculați distanța de la punctul *P* la dreapta *Oy*.

6. Triunghiurile *ABC* și *DEF* sunt congruente, iar *AM* și *DN* sunt înălțimi.

a) Demonstrați că $\Delta ACM \equiv \Delta DFN$;

b) Știind că *P* este simetricul punctului *A* față de dreapta *BC*, iar *Q* este simetricul punctului *D* față de dreapta *EF*, demonstrați că $\Delta ABP \equiv \Delta DEQ$.

7. Fie triunghiul *ABC*, $AB \neq AC$ și *M* mijlocul laturii *BC*. Se construiesc $BD \perp AM$, $D \in AM$ și $CE \perp AM$, $E \in AM$. Demonstrați că $\Delta BDM \equiv \Delta CEM$.

8. Triunghiul *MNP* este dreptunghic și $\sphericalangle MNP \equiv \sphericalangle MPN$. Perpendiculara în *N* pe dreapta *NP* intersectează *MP* în punctul *A*, iar perpendiculara în *P* pe dreapta *NP* intersectează *MN* în punctul *B*.

a) Realizați, cu ajutorul instrumentelor geometrice, un desen care să corespundă datelor problemei.

b) Calculați măsurile unghiurilor *MNP* și *MPN*.

c) Demonstrați că $\Delta ANP \equiv \Delta BPN$.

9. Unghiul *ABC* este drept, iar *D* este un punct situat pe segmentul *AC*. Se notează cu *M* piciorul perpendicularei din *D* pe dreapta *AB* și cu *N* piciorul perpendicularei din *D* pe dreapta *BC*. Demonstrați că:

a) $DM \parallel BC$ și $DN \parallel AB$;

b) $\Delta BDM \equiv \Delta DBN$.

Minitest

4 × 10 p **1.** Triunghiurile ABC și MNP sunt dreptunghice, cu $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ și $\sphericalangle NMP = 90^\circ$.
Asociați literei din coloana **A**, care identifică setul de congruențe ale elementelor corespunzătoare, cifra din coloana **B**, care identifică criteriul de congruență a triunghiurilor ABC și MNP.

A	B
a. $AB \equiv MN$, $AC \equiv MP$	**1.** IC
b. $AC \equiv MP$, $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle MNP$	**2.** IU
c. $BC \equiv NP$, $AB \equiv MN$	**3.** CC
d. $BC \equiv NP$, $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle MPN$	**4.** CU

2. Fie ABC un triunghi și CD bisectoarea unghiului C, $D \in AB$. Perpendiculara din punctul A pe CD intersectează CD în P și BC în E.

25 p **a)** Demonstrați că $\Delta ACP \equiv \Delta ECP$.

25 p **b)** Precizați, justificând răspunsul dat, dacă unghiurile DAC și DEC sunt congruente.

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

L4 Metoda triunghiurilor congruente

Ne amintim

Geometria bazată pe raționament operează cu propoziții matematice, definiții, axiome, teoreme.
O *propoziție* matematică este o afirmație care este *sau adevărată sau falsă*.
Axiomele sunt afirmații acceptate ca fiind adevărate, fără a necesita demonstrație.
Teoremele sunt afirmații adevărate, demonstrate pe baza axiomelor și a definițiilor noțiunilor care apar în enunț, folosind, eventual, alte teoreme demonstrate anterior.

Teoremele ne asigură că dacă anumite informații (ipoteza teoremei) sunt adevărate, atunci și alte informații (concluzia teoremei) vor fi adevărate.

În general, teoremele au forma: „Dacă ***ipoteză***, atunci ***concluzie***".

Prin interschimbarea concluziei cu ipoteza sau cu o parte din ipoteză, se obțin *reciproce* ale teoremelor.
Dacă reciproca este adevărată, atunci devine teoremă și se numește *teorema reciprocă* a teoremei din care s-a format, aceasta numindu-se *teorema directă*.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Dacă au loc atât teorema directă cât și teorema reciprocă, acestea se pot formula într-un singur enunț de forma:
Propoziția 1 dacă și numai dacă *propoziția* 2.
Această formulare presupune că sunt adevărate simultan propozițiile:
Dacă *propoziția* 1, atunci *propoziția* 2 și
Dacă *propoziția* 2, atunci *propoziția* 1.
Demonstrația unei teoreme de tipul „... dacă și numai dacă ...", presupune demonstrația ambelor teoreme (directă și reciprocă).

Exemplu:
Fie d mediatoarea segmentului AB și M un punct în plan. Au loc teoremele:
a) Dacă $M \in d$, atunci $MA \equiv MB$.
b) Dacă $MA \equiv MB$, atunci $M \in d$.

Cele două enunțuri pot fi înlocuite cu:
$M \in d$ dacă și numai dacă $MA \equiv MB$.

Observație. Exemplul de mai sus ne oferă caracterizarea punctelor de pe mediatoarea unui segment, pe care o vom *demonstra* într-una dintre lecțiile următoare:
Mediatoarea unui segment este mulțimea punctelor din plan egal depărtate de capetele segmentului.

Metoda triunghiurilor congruente ne oferă instrumente utile pentru demonstrarea congruenței unor segmente sau a unor unghiuri de care avem nevoie și pentru demonstrarea unor teoreme importante.

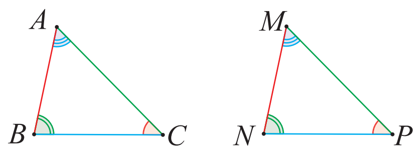
A folosi metoda triunghiurilor congruente pentru a demonstra congruența a două segmente sau a două unghiuri înseamnă a parcurge următorii pași:
Pas 1. Identificăm două triunghiuri așa încât fiecare să aibă ca laturi câte unul din cele două segmente, respectiv să aibă ca unghiuri câte unul din cele două unghiuri.
Pas 2. Demonstrăm că cele două triunghiuri sunt congruente folosind unul dintre cazurile de congruență.
Pas 3. Deducem că laturile respectiv unghiurile celor două triunghiuri sunt congruente, deci și congruența segmentelor respectiv congruența unghiurilor vizate.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Un rezultat util în folosirea metodei triunghiurilor congruente este dat de aplicația 1.

Aplicația 1. În *triunghiuri congruente*, la *laturi congruente* se opun *unghiuri congruente*.

Rezolvare. Fie triunghiurile congruente ABC și MNP.



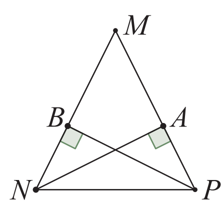
Ipoteză: $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$
Concluzie: la laturi congruente, se opun unghiuri congruente

Demonstrație: Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$, atunci conform definiției, se obțin congruențele: $AB \equiv MN$, $AC \equiv MP$, $BC \equiv NP$, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle M$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle N$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle P$. Evidențiem congruențele vizate în tabelul de mai jos.

$\Delta ABC \equiv \Delta MNP$				
Latura ΔABC	Unghiul opus	Latura ΔMNP	Unghiul opus	Laturile corespunzătoare sunt congruente dacă și numai dacă unghiurile opuse acestor laturi sunt congruente.
AB	$\sphericalangle C$	MN	$\sphericalangle P$	$AB \equiv MN$ dacă și numai dacă $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle P$
AC	$\sphericalangle B$	MP	$\sphericalangle N$	$AC \equiv MP$ dacă și numai dacă $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle N$
BC	$\sphericalangle A$	NP	$\sphericalangle M$	$BC \equiv NP$ dacă și numai dacă $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle M$

Observație. Rezultatul de mai sus are loc doar în *triunghiuri congruente*!

Aplicația 2. În triunghiul MNP, $NA \perp MP$, $A \in MP$, $PB \perp MN$, $B \in MN$ și $NA \equiv PB$.
Demonstrați că $MN \equiv MP$.



Ipoteză: ΔMNP, $NA \perp MP$, $A \in MP$, $PB \perp MN$, $B \in MN$ și $NA \equiv PB$.
Concluzie: $MN \equiv MP$.
Demonstrație. Considerăm ΔMAN și ΔMBP, dreptunghice.

$$\left.\begin{array}{l} NA \equiv PB \text{ (din ipoteză)} \\ \sphericalangle AMN \equiv BMP \sphericalangle \text{ (unghi comun)} \end{array}\right\} \overset{CU}{\Rightarrow} \Delta MAN \equiv \Delta MBP. \text{ Cum } \sphericalangle MAN \equiv \sphericalangle MBP, \text{ rezultă } MN \equiv MP.$$

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Copiați pe caiete și completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate.

a) În triunghiuri congruente, la laturi congruente se opun … congruente.

b) În triunghiuri congruente, la unghiuri congruente se opun … congruente.

c) Dacă $\Delta CDS \equiv \Delta EFT$, atunci $DS \equiv ...$ și $... \equiv \sphericalangle TFE$.

2. Într-un cerc de centru O, coardele AB și BC sunt congruente. Demonstrați că $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle BOC$.

3. Punctele A, B, C sunt coliniare, în această ordine, iar punctele D și E sunt în semiplane diferite, delimitate de dreapta AC, astfel încât $\Delta ABD \equiv \Delta ABE$. Demonstrați că $CD \equiv CE$.

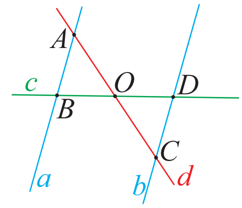
4. Fie triunghiurile ABC și DEF astfel încât $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle D$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle E$, $AB = DE = 8$ cm, $AC = 10$ cm, $EF = 6$ cm. Calculați perimetrul triunghiului ABC.

5. Se prelungesc laturile AB și AC ale triunghiului ABC cu segmentele $AD \equiv AB$ și $AE \equiv AC$.
Demonstrați că:

a) $\Delta ABC \equiv \Delta ADE$; **b)** $DE \parallel BC$.

6. Din vârful A al triunghiului ascuţitunghic ABC se construiesc $AD \perp AB$, $AD \equiv AB$ și $AE \perp AC$, $AE \equiv AC$, astfel încât D și C să fie de o parte și de alta a dreptei AB, iar B și E să fie de o parte și de alta a drepteide AC.
Demonstrați că $\Delta ABE \equiv \Delta ADC$.

7. În figura următoare, dreptele a și b sunt paralele, iar dreptele c și d sunt secante ale lor. Folosind notațiile din desen și congruența $AB \equiv CD$, demonstrați că punctul O este mijlocul segmentului BD.



8. Prin mijlocul M al segmentului AB, se consideră o dreaptă d. Perpendicularele în A și B pe dreapta AB intersectează dreapta d în punctele P, respectiv Q, iar perpendiculara în M pe dreapta d intersectează BQ în punctul C. Demonstrați că:

a) $PM \equiv QM$;

b) $\sphericalangle BCM \equiv \sphericalangle PCM$.

9. Fie punctele coliniare A, B, C, în această ordine. De aceeași parte a dreptei AC se consideră semidreptele AM și CN situate pe drepte paralele astfel încât $\Delta ABM \equiv \Delta CNB$.

a) Arătați că $AM \perp BC$.

b) Calculați măsura unghiului MBN.

10. Prin vârfurile triunghiului oarecare DEF se construiesc paralele la laturile opuse și se obține triunghiul ABC, $D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$. Demonstrați că:

a) $\Delta AEF \equiv \Delta DFE$;

b) punctul D este mijlocul segmentului BC.

Minitest

30 p **1.** În triunghiul ABC, punctul D este situat pe latura AB, iar punctul E este situat pe latura AC. Dreptele BE și CD se intersectează în punctul F, $BF \equiv CF$ și $DF \equiv EF$. Demonstrați că $BD \equiv CE$.

2. Punctele A, B, C, D sunt coliniare, în această ordine, $AB \equiv CD$, iar punctul E este în exteriorul dreptei AD, astfel încât $\sphericalangle EAD \equiv \sphericalangle EDA$ și $\sphericalangle EBC \equiv \sphericalangle ECB$. Demonstrați că:

30 p **a)** $\Delta EAB \equiv \Delta EDC$;

30 p **b)** $\Delta EAC \equiv \Delta EDB$.

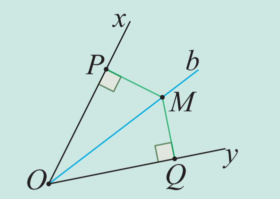
Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

6.4. Metoda triunghiurilor congruente. Aplicații

L1 Proprietatea punctelor de pe bisectoarea unui unghi. Proprietatea punctelor de pe mediatoarea unui segment

Aplicând *metoda triunghiurilor congruente* vom demonstra caracterizări matematice importante, pe care le-am intuit în lecțiile anterioare, caracterizări ale punctelor situate pe *bisectoarea unui unghi* și ale punctelor situate pe *mediatoarea unui segment*.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Aplicația 1.	*În limbajul simbolisticii matematice*	*Reprezentare geometrică*
a) Orice punct al bisectoarei unui unghi este egal depărtat de laturile unghiului. **b)** Orice punct situat în interiorul unui unghi, egal depărtat de laturile acestuia, este situat pe bisectoarea unghiului.	Fie b bisectoarea unghiului xOy, M un punct situat în interiorul unghiului și $MP \perp Ox$, $P \in Ox$, $MQ \perp Oy$, $Q \in Oy$. **a) Dacă** $M \in b$, **atunci** $MP \equiv MQ$. **b) Dacă** $MP \equiv MQ$, **atunci** $M \in b$.	

a) *Ipoteză*: b bisectoarea unghiului xOy și $M \in b$.

Concluzie: $MP \equiv MQ$

Demonstrație explicită

Considerăm ΔMPO și ΔMQO, în care MP respectiv MQ sunt laturi.
$MO \equiv MO$ (ipotenuza comună). (1)
Din b bisectoarea unghiului xOy și $M \in b$, rezultă $\sphericalangle POM \equiv \sphericalangle QOM$. (2)
Din (1) și (2), conform cazului de congruență IU, rezultă $\Delta MPO \equiv \Delta MQO$, deci elementele corespunzătoare sunt respectiv congruente. Catetele MP și MQ sunt laturi corespunzătoare în cele două triunghiuri, deci $MP \equiv MQ$.

Redactare în limbajul simbolisticii matematice

În triunghiurile dreptunghice MPO și MQO:

$$\left.\begin{array}{l} MO \equiv MO \ (\text{latură comună}) \\ \sphericalangle POM \equiv \sphericalangle QOM \ (b \text{ bisectoare}) \end{array}\right\} \overset{IU}{\Rightarrow} \Delta MPO \equiv \Delta MQO.$$

$\Delta MPO \equiv \Delta MQO \Rightarrow MP \equiv MQ$.

b) *Ipoteză*: b bisectoarea unghiului xOy, $M \in \text{Int}(\sphericalangle xOy)$ și $MP \equiv MQ$.

Concluzie: $M \in b$

Demonstrație explicită

Considerăm ΔMPO și ΔMQO, în care identificăm unghiul POM, respectiv QOM.
$MO \equiv MO$ (ipotenuza comună). (1)
$MP \equiv MQ$ (din ipoteză) (2)
Din (1) și (2), conform cazului de congruență IC, rezultă $\Delta MPO \equiv \Delta MQO$, deci elementele corespunzătoare sunt respectiv congruente. Unghiurile care se opun catetelor congruente MP și MQ sunt $\sphericalangle POM$ și $\sphericalangle QOM$.
Prin urmare, $\sphericalangle POM \equiv \sphericalangle QOM$, deci $M \in b$.

Redactare în limbajul simbolisticii matematice

În triunghiurile dreptunghice MPO și MQO:

$$\left.\begin{array}{l} MO \equiv MO \ (\text{latură comună}) \\ MP \equiv MQ \ (\text{din ipoteză}) \end{array}\right\} \overset{IC}{\Rightarrow} \Delta MPO \equiv \Delta MQO.$$

$\Delta MPO \equiv \Delta MQO \Rightarrow \sphericalangle POM \equiv \sphericalangle QOM$, deci $M \in b$.

Cele două enunțuri demonstrate conduc la:

Teorema de caracterizare a punctelor de pe bisectoarea unui unghi

Un punct din interiorul unui unghi aparține bisectoarei unghiului dacă și numai dacă este situat la distanță egală de laturile acestuia.

În limbajul simbolisticii matematice

Fie b bisectoarea unghiului AOB, M un punct situat în interiorul unghiului și $MP \perp OA$, $P \in OA$, $MQ \perp OB$, $Q \in OB$.
Atunci, $M \in b$ **dacă și numai dacă** $MP \equiv MQ$.

Reținem!

Bisectoarea unui unghi este mulțimea punctelor din plan situate în *interiorul unghiului*, la *distanță egală* de laturile acestuia.

Aplicația 2.

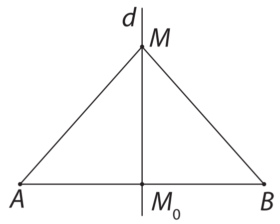
a) Orice punct al mediatoarei unui segment este egal depărtat de capetele segmentului.
b) Orice punct din plan, egal depărtat de capetele unui segment este situat pe mediatoarea acestuia.

În limbajul simbolisticii matematice

Fie d mediatoarea segmentului AB și M un punct în plan.

a) **Dacă** $M \in d$, **atunci** $MA \equiv MB$.

b) **Dacă** $MA \equiv MB$, **atunci** $M \in d$.



a) *Ipoteză*: d mediatoarea segmentului AB și $M \in d$.

Concluzie: $MA \equiv MB$

Demonstrație explicită

Dacă A, B, M sunt coliniare, atunci M este mijlocul segmentului AB, deci $MA \equiv MB$.
Dacă A, B, M sunt necoliniare, considerăm $\{M_0\} = AB \cap d$. Atunci, M_0 este mijlocul segmentului AB și $MM_0 \perp AB$.
În triunghiurile MAM_0 și MBM_0, identificăm:
$\sphericalangle MM_0A = \sphericalangle MM_0B = 90^\circ$, $M_0A \equiv M_0B$ (M_0 mijloc) și $MM_0 \equiv MM_0$ (latură comună).
Conform cazului de congruență CC, rezultă $\Delta MAM_0 \equiv \Delta MBM_0$.
Din congruența celor două triunghiuri, rezultă congruența celorlalte trei perechi de elemente corespunzătoare ale triunghiurilor. Obținem astfel și $MA \equiv MB$.

Redactare în limbajul simbolisticii matematice

Dacă A, B, M sunt coliniare, atunci M este mijlocul segmentului AB, deci $MA \equiv MB$.
Dacă A, B, M sunt necoliniare, considerăm:
$\{M_0\} = AB \cap d$. Atunci, $MM_0 \perp AB$ și $M_0A \equiv M_0B$.
În ΔMAM_0 și ΔMBM_0, cu $\sphericalangle MM_0A = \sphericalangle MM_0B = 90^\circ$, avem:

$$\left.\begin{aligned} &M_0A \equiv M_0B \\ &MM_0 \equiv MM_0 \text{ (latură comună)} \end{aligned}\right\} \overset{CC}{\Rightarrow}$$

$\Rightarrow \Delta MAM_0 \equiv \Delta MBM_0$.
$\Delta MAM_0 \equiv \Delta MBM_0 \Rightarrow MA \equiv MB$.

b) *Ipoteză*: d mediatoarea segmentului AB și $MA \equiv MB$.

Concluzie: $M \in d$

Demonstrație explicită

Dacă A, B, M sunt coliniare, atunci M este mijlocul segmentului AB, deci $M \in d$.
Dacă A, B, M sunt necoliniare, considerăm M_0 mijlocul segmentului AB și luăm în considerare triunghiurile MAM_0 și MBM_0, în care identificăm: $MA \equiv MB$ (din ipoteză), $M_0A \equiv M_0B$ (M_0 mijloc) și $MM_0 \equiv MM_0$ (latură comună). Conform cazului de congruență LLL, rezultă $\Delta MAM_0 \equiv \Delta MBM_0$.
Din congruența celor două triunghiuri, rezultă congruența celorlalte trei perechi de elemente corespunzătoare. Obținem astfel și $\sphericalangle MM_0A \equiv \sphericalangle MM_0B$. (1)
$\sphericalangle MM_0A$ și $\sphericalangle MM_0B$ sunt adiacente, suplementare. (2)
Din (1) și (2), rezultă $\sphericalangle MM_0A = \sphericalangle MM_0B = 90^\circ$, adică $MM_0 \perp AB$, deci $M \in d$.

Redactare în limbajul simbolisticii matematice

Dacă A, B, M sunt coliniare, atunci M este mijlocul segmentului AB, deci $M \in d$.
Dacă A, B, M sunt necoliniare, fie $M_0 \in AB$, $M_0A \equiv M_0B$. Atunci,

$$\left.\begin{aligned} &M_0A \equiv M_0B \\ &MM_0 \equiv MM_0 \text{ (latură comună)} \\ &MA \equiv MB \text{ (din ipoteză)} \end{aligned}\right\} \overset{LLL}{\Rightarrow} \Delta MAM_0 \equiv \Delta MBM_0.$$

$\Delta MAM_0 \equiv \Delta MBM_0 \Rightarrow \sphericalangle MM_0A \equiv \sphericalangle MM_0B$.
Cum $\sphericalangle AM_0B = 180^\circ$ și
$\sphericalangle AM_0B = \sphericalangle MM_0A + \sphericalangle MM_0B$, rezultă
$\sphericalangle MM_0A = \sphericalangle MM_0B = 90^\circ$, adică $MM_0 \perp AB$, deci $M \in d$.

Cele două enunțuri demonstrate conduc la:

Teorema de caracterizare a punctelor de pe mediatoarea unui segment

Un punct din plan aparține mediatoarei unui segment dacă și numai dacă este situat la distanță egală de capetele acestuia.

În limbajul simbolisticii matematice

Fie d mediatoarea segmentului AB și M un punct în plan.
Atunci, $M \in d$ **dacă și numai dacă** $MA \equiv MB$.

Reținem!

Mediatoarea unui segment este mulțimea punctelor din plan, situate la *distanță egală* de capetele acestuia.

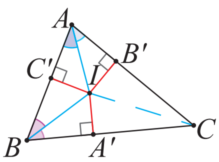
Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Suntem acum în măsură să demonstrăm două rezultate, intuite în lecțiile anterioare, prin măsurare și construcție cu ajutorul instrumentelor geometrice.

Aplicația 3

Bisectoarele unghiurilor unui triunghi sunt concurente.

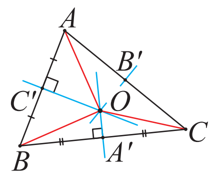
Fie I intersecția dintre bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$ și bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABC$ și fie $IA' \perp BC$, $IB' \perp AC$, $IC' \perp AB$. Punctele A', B', C' sunt pe laturile triunghiului. Deoarece I este pe bisectoarea $\sphericalangle BAC$, rezultă $IB' \equiv IC'$. Deoarece I este pe bisectoarea $\sphericalangle ABC$, rezultă $IA' \equiv IC'$. Din $IB' \equiv IC'$ și $IA' \equiv IC'$, rezultă $IB' \equiv IA'$, adică I este situat pe bisectoarea $\sphericalangle ACB$. Am folosit rezultatul demonstrat la aplicația 1.



Aplicația 4

Mediatoarele laturilor unui triunghi sunt concurente.

Fie O intersecția dintre mediatoarea laturii BC și mediatoarea laturii AB.
Deoarece OA' este mediatoarea segmentului BC, rezultă $OB \equiv OC$.
Deoarece OC' este mediatoarea segmentului AB, rezultă $OB \equiv OA$.
Din $OB \equiv OC$ și $OB \equiv OA$, rezultă $OA \equiv OC$, adică O este situat pe mediatoarea segmentului AC. Am folosit aplicația 2.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Triunghiul AMN este dreptunghic, $\sphericalangle MAN = 90°$ și MB este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AMN$, $B \in AN$. Fie C piciorul perpendicularei din B pe dreapta MN. Demonstrați că triunghiul ABC este isoscel.

2. Punctele A, B, P sunt necoliniare. Perpendiculara în A pe dreapta AP intersectează perpendiculara în B pe dreapta PB în punctul I.
a) Demonstrați că dacă $\sphericalangle API \equiv \sphericalangle BPI$, atunci $AI \equiv BI$.
b) Știind că $\sphericalangle AIP \equiv \sphericalangle BIP$, demonstrați că $AP \equiv BP$.

3. Segmentele AB și CD au punctul comun O. În interiorul unghiului AOC se consideră punctul M, egal depărtat de laturile unghiului AOC, iar în interiorul unghiului BOD se consideră punctul N, egal depărtat de laturile unghiului BOD. Demonstrați că punctele M, O și N sunt coliniare.

4. Fie triunghiul ABC, $\sphericalangle ABC = 90°$ și D simetricul punctului C față de punctul B.
Demonstrați că $AC \equiv AD$.

5. În triunghiul ABC, dreapta AD este mediatoarea laturii BC, $D \in BC$. Pe segmentul AD, se consideră punctele distincte M și N.
Arătați că $\sphericalangle MBN \equiv \sphericalangle MCN$.

6. Fie O un punct situat pe mediatoarea segmentului AB.
a) Reprezentați geometric cercul $\mathcal{C}(O, AO)$.
b) Demonstrați că punctul B este situat pe cercul de centru O și rază OA.

7. Mediatoarea laturii DE a triunghiului DEF intersectează segmentul DF în punctul P, iar O este punctul de intersecție a mediatoarelor triunghiului. Demonstrați că:
a) $DF = PF + PE$;
b) triunghiurile DOP și EOP au același perimetru.

8. În triunghiul ABC, $\sphericalangle A = 2 \cdot \sphericalangle B$, iar mediatoarea laturii AB, intersectează AB în punctul D și BC în punctul E. Demonstrați că:
a) $\Delta ADE \equiv \Delta BDE$;
b) AE este bisectoarea unghiului BAC.

Minitest

Triunghiul ABC este obtuzunghic, $\sphericalangle ACB > 90°$ și D este mijlocul laturii BC. Bisectoarea unghiului ACB intersectează mediatoarea laturii BC în punctul E, iar F este simetricul punctului E față de dreapta AC, $EF \cap AC = \{P\}$.

30 p **a)** Realizați un desen care să corespundă datelor problemei.

30 p **b)** Demonstrați că triunghiurile BDE, CDE, CPE și CPF sunt congruente.

30 p **c)** Dacă punctele B, C, F sunt coliniare, calculați măsura unghiului ACB.

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

L2 Proprietăți ale triunghiului isoscel

Ne amintim

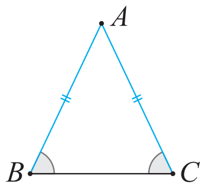
Liniile importante în triunghi sunt: *bisectoarele* unghiurilor, *mediatoarele* laturilor, *înălțimile* triunghiului și *medianele* triunghiului.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicația 1.

a) Demonstrați că într-un triunghi isoscel, unghiurile alăturate bazei sunt congruente.

b) Formulați o reciprocă a afirmației demonstrate la subpunctul a) și demonstrați că aceasta este adevărată



a) *Ipoteză:* În ΔABC, $AB \equiv AC$. *Concluzie:* $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$.

Demonstrație.

Considerăm triunghiurile ABC și ACB: $\left.\begin{array}{l} AB \equiv AC \text{ (din ipoteză)} \\ AC \equiv AB \text{ (din ipoteză)} \\ BC \equiv BC \text{ (latură comună)} \end{array}\right\} \overset{LLL}{\Rightarrow} \Delta ABC \equiv \Delta ACB \Rightarrow \sphericalangle B \equiv \sphericalangle C.$

b) Dacă două unghiuri ale unui triunghi sunt congruente, atunci triunghiul este isoscel, având ca bază latura determinată de vârfurile celor două unghiuri.

Ipoteză: În ΔABC, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$. *Concluzie:* $AB \equiv AC$.

Demonstrație.

Considerăm triunghiurile ABC și ACB: $\left.\begin{array}{l} \sphericalangle B \equiv \sphericalangle C \text{ (unghi comun)} \\ BC \equiv BC \text{ (latură comună)} \\ \sphericalangle C \equiv \sphericalangle B \text{ (din ipoteză)} \end{array}\right\} \overset{ULU}{\Rightarrow} \Delta ABC \equiv \Delta ACB \Rightarrow AB \equiv AC.$

Reținem!

Un triunghi este isoscel dacă și numai dacă are două unghiuri congruente.

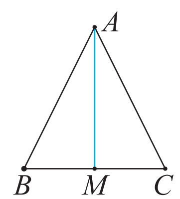
Aplicația 2.

Într-un triunghi isoscel, *liniile importante* corespunzătoare bazei *se suprapun*.

Ipoteză:

În ΔABC, $AB \equiv AC$.

Concluzie: Bisectoarea unghiului A, mediatoarea laturii BC, mediana din A și înălțimea din A sunt situate pe aceeași dreaptă.



Demonstrație: Fie M mijlocul laturii BC. Atunci, AM este *mediana* din A. (1)

Luăm în considerare triunghiurile AMB și AMC. $\left.\begin{array}{l} AB \equiv AC \text{ (din ipoteză)} \\ MB \equiv MC \text{ (}M\text{ mijloc)} \\ AM \equiv AM \text{ (latură comună)} \end{array}\right\} \overset{LLL}{\Rightarrow} \Delta AMB \equiv \Delta AMC.$

Obținem: $\sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle MAC$, adică AM este bisectoarea unghiului A. (2)

$\sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle AMC$. Dar, $\sphericalangle AMB$ și $\sphericalangle AMC$ sunt adiacente suplementare, deci $\sphericalangle AMB = \sphericalangle AMC = 90°$.

Atunci, $AM \perp BC$, adică AM este înălțime a triunghiului. (3)

Din $AM \perp BC$ *și* M mijlocul laturii BC, rezultă AM este mediatoarea laturii BC. (4)

Temă de portofoliu. Demonstrați, aplicând metoda triunghiurilor congruente, că:
Dacă sunt satisfăcute oricare două dintre condițiile (1), (2), (3), (4), atunci triunghiul ABC este isoscel, cu baza BC.

Reținem!

Pentru a demonstra că un triunghi este isoscel, este suficient ca *două dintre liniile importante ale triunghiului să se suprapună* (mediană și mediatoarea sau mediana și bisectoarea sau mediana și înălțimea sau mediatoarea și bisectoarea sau mediatoarea și înălțimea sau bisectoarea și înălțimea).
Baza triunghiului este latura corespunzătoare liniilor importante suprapuse.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Construiți triunghiul isoscel ABC cu baza BC, în următoarele cazuri:
a) $BC = 5$ cm și $\sphericalangle B = 75°$;
b) $AB = 6$ cm și $\sphericalangle A = 50°$.

2. Fie triunghiul ABC cu $AB = 5$ cm, $BC = 7$ cm și perimetrul de 19 cm. Demonstrați că triunghiul este isoscel. Precizați baza triunghiului.

3. Triunghiul DEF are unghiurile $\sphericalangle D = 65°$ și $\sphericalangle F = 50°$. Demonstrați că triunghiul este isoscel. Precizați baza triunghiului.

4. Calculați măsurile unghiurilor unui triunghi isoscel știind că unul dintre unghiuri are măsura:
a) 48°; **b)** 90°; **c)** 125°.

5. Triunghiul ABC este isoscel cu $AB \equiv AC$, iar D este un punct situat pe latura BC.
Copiați pe caiete și completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate:
a) Dacă $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$ și $BC = 10$ cm, atunci $CD = \dots$ cm.
b) Dacă $BD \equiv CD$ și $\sphericalangle BAD = 20°$, atunci $\sphericalangle BAC = \dots °$.
c) Dacă $AD \perp BC$ și $BD = 3{,}5$ cm, atunci $CD = \dots$ cm și $BC = \dots$ cm.
d) Dacă $AD \perp BC$ și $\sphericalangle B = 52°$, atunci $\sphericalangle CAD = \dots °$.
e) Dacă $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$, atunci $\sphericalangle ADB = \dots °$.
f) Dacă $\sphericalangle ADC = 90°$ și $\sphericalangle BAC = 130°$, atunci $\sphericalangle BAD = \dots °$.

6. În interiorul triunghiului isoscel ABC cu baza BC, se consideră punctul P.
a) Știind că $BP \equiv CP$, demonstrați că $AP \perp BC$.
b) Știind că $\sphericalangle BAP \equiv \sphericalangle CAP$, demonstrați că $BP \equiv CP$.
c) Demonstrați că dacă AP este bisectoarea unghiului BAC și $AP \cap BC = \{D\}$, atunci semidreapta PD este bisectoarea unghiului BPC.

7. Demonstrați că în orice triunghi isoscel au loc afirmațiile:
a) Medianele corespunzătoare laturilor congruente ale unui triunghi isoscel sunt congruente.
b) Înălțimile corespunzătoare laturilor congruente ale unui triunghi isoscel sunt congruente.

8. Demonstrați că unghiurile alăturate bazei unui triunghi isoscel sunt ascuțite.

9. În triunghiul DEF, $DE \equiv DF$ și $\sphericalangle EDF = 36°$. Bisectoarea unghiului DEF intersectează latura DF în punctul M. Demonstrați că triunghiurile DEM și EFM sunt isoscele.

10. Triunghiul APQ este isoscel. Calculați lungimea laturii PQ, pentru următoarele date, analizând toate cazurile posibile.
a) $AP = 13$ cm, $AQ = 17{,}5$ cm;
b) $AP = 50$ mm, $AQ = 10$ cm.

11. Triunghiul ABC este isoscel și D este un punct situat pe baza BC a triunghiului. Se construiesc $DE \perp AB$, $E \in AB$ și $DF \perp AC$, $F \in AC$. Știind că $DE = DF$, demonstrați:
a) $\Delta ADE \equiv \Delta ADF$.
b) ΔDEF este isoscel.

12. În triunghiul MNP, unghiul exterior cu vârful în M are măsura $135°$ și $\sphericalangle N = 2 \cdot \sphericalangle P$. Demonstrați că triunghiul MNP este isoscel.

13. O dreaptă d, paralelă cu baza AC a triunghiului isoscel ABC, intersectează laturile AB și BC în punctele P, respectiv Q. Demonstrați că:
a) $\sphericalangle APQ \equiv \sphericalangle CQP$; **b)** $AP \equiv CQ$.

14. Triunghiul ABC este isoscel, cu $AB = AC$. Semidreapte AD este bisectoare a unui unghi exterior al triunghiului.
a) Demonstrați că $AD \parallel BC$.
b) Calculați măsurile unghiurilor triunghiului, știind că $\sphericalangle CAD = 100°$.

15. Bisectoarele unghiurilor A și B ale triunghiului ABC se intersectează în punctul I.
Paralela prin I la dreapta AB intersectează latura BC în punctul M și latura AC în punctul N.
a) Demonstrați că triunghiurile ANI și BMI sunt isoscele.
b) Decideți, argumentat, dacă are loc egalitatea $BM + AN = MN$.

Minitest

1. Alegeți litera care indică varianta corectă. Doar un răspuns este corect.
15 p **a)** Baza unui triunghi isoscel are lungimea de 13 cm, iar perimetrul triunghiului este egal cu 34 cm. Atunci, fiecare din celelalte laturi are lungimea:
A. 105 mm; **B.** 11 cm; **C.** 102 mm; **D.** 15 cm.
15 p **b)** Segmentul AD este înălțime a triunghiului ABC în care $AB = AC$. Dacă $\sphericalangle BAD = 35°$, atunci unghiul ACD are măsura:
A. 35°; **B.** 55°; **C.** 70°; **D.** 90°.
30 p **2.** Demonstrați că într-un triunghi isoscel, mediatoarea corespunzătoare bazei conține vârful opus bazei triunghiului.
30 p **3.** Calculați măsurile unghiurilor triunghiului isoscel ABC, știind că $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 136°$. Analizați toate cazurile posibile.

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

L3 Proprietăți ale triunghiului echilateral

Ne amintim

Un triunghi care are toate laturile congruente se numește *triunghi echilateral* .	ΔABC este echilateral dacă $AB \equiv AC \equiv BC$.
Orice triunghi echilateral este isoscel cu baza oricare dintre laturile sale.	Dacă ΔABC este echilateral, atunci ΔABC este isoscel.

Centrul cercului înscris într-un triunghi este punctul în care se intersectează bisectoarele unghiurilor acestuia.
Centrul cercului circumscris unui triunghi este punctul în care se intersectează mediatoarele laturilor acestuia.
Centrul de greutate al unui triunghi este punctul în care se intersectează medianele acestuia.
Ortocentrul unui triunghi este punctul în care se intersectează dreptele suport ale înălțimilor acestuia.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Aplicația 1.

a) Unghiurile oricărui triunghi echilateral sunt congruente și au măsura de 60°.

b) Un triunghi care are toate unghiurile congruente este triunghi echilateral.

a) *Ipoteză*:
În ΔABC, $AB \equiv AC \equiv BC$.

Concluzie: $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = 60^\circ$.

Demonstrație:
$AB \equiv AC \Rightarrow \sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$ (unghiuri alăturate bazei triunghiului isoscel) (1)
$BA \equiv BC \Rightarrow \sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$ (unghiuri alăturate bazei triunghiului isoscel) (2)
Din (1) și (2), rezultă $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$. Dar, $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^\circ$, deci $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = 60^\circ$.

b) *Ipoteză*:
În ΔABC, $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C$.

Concluzie: $AB \equiv AC \equiv BC$.

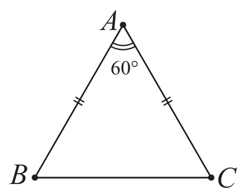
Demonstrație:
$\sphericalangle A = \sphericalangle B \Rightarrow \Delta ABC$ isoscel, cu baza AB, adică $CA \equiv CB$. (1)
$\sphericalangle B = \sphericalangle C \Rightarrow \Delta ABC$ isoscel, cu baza BC, adică $AB \equiv AC$. (2)
Din (1) și (2), $AB \equiv AC \equiv BC$, deci ΔABC este echilateral.

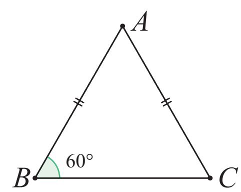
Reținem!

Toate unghiurile unui triunghi echilateral sunt congruente și au măsura 60°.
Un triunghi care are toate unghiurile congruente este triunghi echilateral.

Aplicația 2. Un triunghi isoscel care are un unghi de 60° este echilateral.

Interpretarea enunțului:
Fie ΔABC isoscel, cu baza BC.
Sunt posibile două situații:
1. Unghiul de 60° este opus bazei;
2. Unghiul de 60° este alăturat bazei.





Cazul 1.
Ipoteză: În ΔABC, $AB \equiv AC$ și $\sphericalangle A = 60^\circ$.
Concluzie: ΔABC este echilateral.

Demonstrație: $AB \equiv AC \Rightarrow \sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$ (unghiuri alăturate bazei) (1)
Dar, $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^\circ$, deci $\sphericalangle B + \sphericalangle C = 120^\circ$.
Folosind (1), rezultă $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 60^\circ$. Conform *Aplicației* 1, ΔABC este echilateral.

Cazul 2.
Ipoteză: În ΔABC, $AB \equiv AC$ și $\sphericalangle B = 60^\circ$.
Concluzie: ΔABC este echilateral.

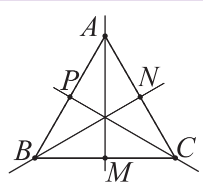
Demonstrație: $AB \equiv AC \Rightarrow \sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$ (unghiuri alăturate bazei), deci $\sphericalangle C = 60^\circ$. Dar, $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^\circ$, adică $\sphericalangle A + 120^\circ = 180^\circ$, deci $\sphericalangle A = 60^\circ$. Conform *Aplicației* 1, ΔABC este echilateral.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicația 3. Într-un triunghi echilateral, pentru fiecare vârf, liniile importante corespunzătoare sunt situate pe aceeași dreaptă.

Ipoteză:
ΔABC echilateral.

Concluzie: Pentru fiecare vârf, bisectoarea unghiului corespunzător, mediatoarea și mediana corespunzătoare laturii opuse și înălțimea din acel vârf sunt situate pe aceeași dreaptă.



Demonstrație: Tratăm triunghiul echilateral ABC, pe rând, ca fiind isoscel, cu baza BC, AC respectiv AB.
Fie M, N, P mijloacele laturilor BC, AC respectiv AB.
Din ΔABC isoscel, cu baza BC, rezultă semidreapta AM este bisectoare, dreapta AM este mediatoare, segmentul AM este și mediană și înălțime. (1)
Din ΔABC isoscel, cu baza AC, rezultă semidreapta BN este bisectoare, dreapta BN este mediatoare, segmentul BN este și mediană și înălțime. (2)
Din ΔABC isoscel, cu baza AB, rezultă semidreapta CP este bisectoare, dreapta CP este mediatoare, segmentul CP este și mediană și înălțime. (3)

Temă de portofoliu. Demonstrați că dacă pentru *două vârfuri, două dintre liniile importante ale triunghiului se suprapun*, atunci triunghiul este echilateral.

Reținem!

Pentru a demonstra că un triunghi este echilateral, este suficient ca pentru *două vârfuri*, *două dintre liniile importante ale triunghiului să se suprapună* (mediană și mediatoarea sau mediana și bisectoarea sau mediana și înălțimea sau mediatoarea și bisectoarea sau mediatoarea și înălțimea sau bisectoarea și înălțimea).

Aplicația 3 conduce la următorul rezultat important:

Într-un triunghi echilateral, *centrul cercului înscris* în triunghi, *centrul cercului circumscris* triunghiului, *centrul de greutate* și *ortocentrul* triunghiului coincid.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Construiţi:
a) triunghiul echilateral ABC cu laturile de 4 cm;
b) triunghiul echilateral PQR cu înălţimea de 3 cm.

2. Fie triunghiul echilateral DEF. O dreaptă paralelă cu latura EF intersectează laturile DE și DF în punctele M, respectiv N. Arătați că triunghiul DMN este echilateral.

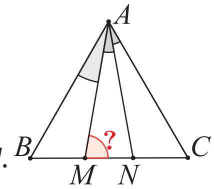
3. În triunghiul ABC, $AB = AC = 37$ cm, iar perimetrul triunghiului este 111cm. Arătați că triunghiul ABC este echilateral.

4. Ana și Diana observă datele despre lungimile laturilor și măsurile unghiurilor triunghiurilor din tabel. Ana spune că trei dintre triunghiuri sunt echilaterale. Diana afirmă că toate triunghiurile sunt echilaterale. Stabiliți, argumentat, cine a răspuns corect.

ΔABC	$AB = 3$ cm, $BC = 30$ mm, $CA = 0{,}3$ dm
ΔDEF	$\sphericalangle D = \sphericalangle E = 2 \cdot \sphericalangle F$
ΔGHI	$GH = GI = 4{,}5$ cm și $P_{\Delta GHI} = 13{,}5$ cm
ΔLMN	$\sphericalangle L = \sphericalangle M$ și $MN = LM$

5. Demonstrați că triunghiul în care lungimea fiecărei laturi este media aritmetică a lungimilor celorlalte laturi este un triunghi echilateral.

6. Fie triunghiul echilateral ABC și punctele M, N pe latura BC astfel încât $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle MAN \equiv \sphericalangle NAC$. Calculați măsura unghiului AMN.



7. Fie triunghiul MNP în care $\sphericalangle M \equiv \sphericalangle N \equiv \sphericalangle P$. Pe laturile MN, NP, PM se fixează punctele A, B, respectiv C cu $MA \equiv NB \equiv PC$. Demonstrați că triunghiul ABC este echilateral.

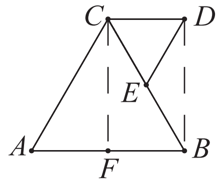
8. Triunghiurile DEF și DPQ sunt echilaterale, $P \in DE$ și $Q \in DF$. Demonstrați că $PQ \parallel EF$.

9. În triunghiul echilateral ABC, BD este înălțime, CE este mediană și $BD \cap CE = \{O\}$. Demonstrați că:
a) triunghiul ADE este echilateral;
b) $AO \perp DE$;
c) punctele A, O și mijlocul laturii BC sunt coliniare.

10. Se notează cu P perimetrul triunghiului echilateral ABC și cu p perimetrul triunghiului cu vârfurile în mijloacele laturilor triunghiului ABC. Demonstrați că $P = 2 \cdot p$.

11. Punctul A este situat pe segmentul BC. De o parte și de alta a dreptei BC se consideră triunghiurile echilaterale ABD și ACE.
   a) Realizați un desen care să corespundă datelor problemei.
   b) Arătați că punctele A, D, E sunt coliniare.
   c) Demonstrați că $\Delta ABE \equiv \Delta ADC$.

12. Triunghiurile ABC și CDE sunt echilaterale, iar punctele E și F sunt mijloacele laturilor BC, respectiv AB.
   a) Arătați că $CD \parallel AB$.
   b) Demonstrați că $BD \equiv CF$.



13. Punctul G este centrul de greutate al triunghiului echilateral MNP, iar L și K sunt mijloacele segmentelor NG, respectiv PG.
   a) Demonstrați $\Delta MGL \equiv \Delta MGK$.
   b) Calculați măsurile unghiurilor triunghiului GLK.

Minitest

1. Copiați pe caiete și completați în caseta liberă **A**, dacă propoziția este adevărată și **F**, dacă propoziția este falsă.

4 × 10 p

Propoziția	***A/F***
p_1: Dacă mediana și înălțimea corespunzătoare unei laturi a unui triunghi coincid, atunci triunghiul este echilateral.	
p_2: Dacă pentru două vârfuri ale unui triunghi, mediana și înălțimea coincid, atunci triunghiul este echilateral.	
p_3: Dacă în triunghiul ABC, AD este bisectoarea unghiului BAC, $D \in BC$ și $BD = DC = 2$ cm, atunci triunghiului ABC are perimetrul 12 cm.	
p_4: Dacă un triunghi are toate laturile congruente, atunci acesta are toate unghiurile congruente.	

2. Punctele A, B, C sunt coliniare, în această ordine.

10 p **a)** Construiți de aceeași parte a dreptei AC triunghiurile echilaterale ABD și BCE.
20 p **b)** Demonstrați că dreptele BD și CE sunt paralele.
20 p **c)** Demonstrați că $\Delta ABE \equiv \Delta DBC$.

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

L4 Proprietăți ale triunghiului dreptunghic. Teorema lui Pitagora

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Aplicația 1

Pasul 1. Construiți pe caiete triunghiul dreptunghic ABC cu $\sphericalangle A = 90^\circ$, $AC = 4$ cm, $\sphericalangle B = 30^\circ$.

Pasul 2. Reprezentați punctul D, simetricul punctului C față de dreapta AB.

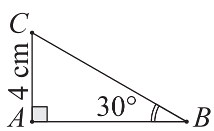
Pasul 3. Deduceți, apoi argumentați, natura triunghiului ABD.

Pasul 4. Decideți, argumentat, natura triunghiului BCD.

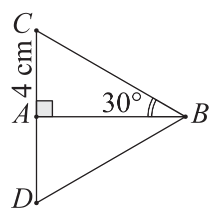
Pasul 5. Stabiliți dacă $AC = \frac{BC}{2}$, justificând răspunsul dat.

Soluție.

Pasul 1.



Pasul 2.



Pasul 3. Dacă D este simetricul punctului C față de AB, avem $CD \perp AB$. Cum $CA \perp AB$, rezultă C, A, D sunt coliniare, iar A este piciorul perpendicularei din C pe AB. Tot din simetrie, avem $AC \equiv AD$. Considerăm ΔABC și ΔABD, dreptunghice. $AB \equiv AB$ și $AC \equiv AD$. Conform cazului de congruență CC, rezultă $\Delta ABC \equiv \Delta ABD$.
Rezultă $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ABC = 30^\circ$, adică ΔABD este *dreptunghic* în A, cu $\sphericalangle ABD = 30^\circ$.
Pasul 4. Din $\Delta ABC \equiv \Delta ABD$, rezultă $BC \equiv BD$, deci ΔBCD este isoscel. Dar, $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle ABD$ sunt adiacente cu $\sphericalangle ABC = 30^\circ$ și $\sphericalangle ABD = 30^\circ$, deci $\sphericalangle CBD = 60^\circ$. Triunghiul BCD este isoscel cu un unghi de 60°, adică este *echilateral*.
Pasul 5. În trunghiul echilateral BCD: $BC = CD = BD$, iar A este mijlocul laturii CD. Prin urmare, $AC = \frac{CD}{2} = \frac{BC}{2}$.

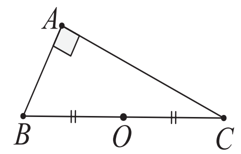
Teorema 1. Într-un triunghi dreptunghic, cateta opusă unghiului de 30° are lungimea egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.	Dacă în ΔABC, $\sphericalangle A = 90^\circ$ și $\sphericalangle B = 30^\circ$, atunci $AC = \frac{BC}{2}$. Dacă în ΔABC, $\sphericalangle A = 90^\circ$ și $\sphericalangle C = 30^\circ$, atunci $AB = \frac{BC}{2}$.
Teorema 2. (reciproca teoremei 1) Dacă într-un triunghi, o latură este opusă unghiului de 30° și are lungimea egală cu jumătate din lungimea altei laturi, atunci triunghiul este dreptunghic.	Dacă în ΔABC, $\sphericalangle B = 30^\circ$ și $AC = \frac{BC}{2}$, atunci $\sphericalangle A = 90^\circ$. Dacă în ΔABC, $\sphericalangle B = 30^\circ$ și $AC = \frac{AB}{2}$, atunci $\sphericalangle C = 90^\circ$.

Temă de portofoliu. Formulați și rezolvați o activitate practică pentru a demonstra teorema 2.
Indicație. Pentru $\sphericalangle B = 30^\circ$, construiți ΔABD astfel încât C și D să fie de o parte și de alta a dreptei AB, cu $\sphericalangle ABD = 30^\circ$ și $BD = BC$. Demonstrați că $\Delta ABD \equiv \Delta ABC$. Deduceți ΔBCD echilateral și $AC + AD = CD$.

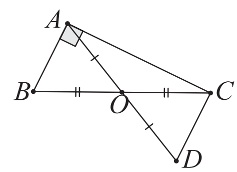
Aplicația 2

Pasul 1. Reprezentați pe caiete un triunghi dreptunghic ABC cu $\sphericalangle A = 90^\circ$ și notați cu O mijlocul laturii BC.
Pasul 2. Reprezentați punctul D, simetricul punctului A față de O.
Pasul 3. Demonstrați că $CD \parallel AB$.
Pasul 4. Demonstrați că triunghiurile BAC și DCA sunt congruente.
Pasul 5. Deduceți, argumentat, că $AO \equiv \frac{AD}{2} = \frac{BC}{2}$.

Pasul 1.



Pasul 2.



Soluție.
Pasul 3. Din construcție, rezultă punctele coliniare A, O, D și punctele coliniare B, O, C, deci $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle DOC$ sunt opuse la vârf.
În triunghiurile AOB și DOC: Punctul O este mijlocul segmentului BC, deci $OB \equiv OC$. (1)
Punctul O este mijlocul segmentului AD, deci $OA \equiv OD$. (2)
$\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle DOC$ sunt opuse la vârf, deci $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle DOC$. (3)
Din (1), (2) și (3), conform criteriului de congruență LUL, rezultă $\Delta AOB \equiv \Delta DOC$, deci $\sphericalangle BAO = \sphericalangle CDO$. Atunci, dreptele CD și AB formează cu secanta AD unghiuri alterne interne congruente, adică $CD \parallel AB$.
Pasul 4. Din $CD \parallel AB$, rezultă că dreptele CD și AB formează cu secanta AC unghiurile BAC și DCA, interne de aceeași parte a secantei suplementare. Cum $\sphericalangle BAC = 90^\circ$, obținem $\sphericalangle DCA = 90^\circ$, adică ΔDCA este dreptunghic în C.
În triunghiurile dreptunghice ΔBAC și ΔDCA: $AB \equiv CD$ (din $\Delta AOB \equiv \Delta DOC$); $AC \equiv CA$ (catetă comună).
Conform cazului de congruență CC, rezultă $\Delta BAC \equiv \Delta DCA$.
Pasul 5. Din $\Delta BAC \equiv \Delta DCA$, rezultă $BC \equiv DA$. Dar, O este mijlocul segmentului AD, deci $AO = \frac{AD}{2} = \frac{BC}{2}$.

Teorema **3.** Într-un triunghi dreptunghic, mediana corespunzătoare ipotenuzei are lungimea egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.	Dacă, în ΔABC, $\sphericalangle A = 90^\circ$ și AM este mediană, atunci $AM = \frac{BC}{2}$.
Teorema **4.** (reciproca teoremei 3) Dacă într-un triunghi, mediana corespunzătoare unei laturi are lungimea egală cu jumătate din lungimea acelei laturi, atunci triunghiul este dreptunghic.	Dacă, în ΔABC, AM este mediană și $AM = \frac{BC}{2}$, atunci $\sphericalangle A = 90^\circ$.

Temă de portofoliu. Formulați și rezolvați o activitate pentru a demonstra teorema 4.

Puțină istorie

Pitagora a fost un mare matematician și filozof grec care, a rămas în istorie și datorită teoremei care-i poartă numele. Iată două dintre aforismele sale celebre:

„Nu spune puţin în vorbe multe, ci mult în vorbe puţine.”

„Gândește, cercetează, reflectează înainte de a lucra.”

Pitagora

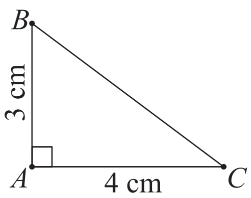
Rezolvăm și observăm

Problemă rezolvată

a) Reprezentați un triunghi dreptunghic care are catetele de 3 cm, respectiv de 4 cm.

b) Măsurați cu rigla gradată, în cm, lungimea ipotenuzei și calculați pătratul numărului natural găsit.

c) Comparați *suma pătratelor lungimilor catetelor* cu *pătratul lungimii ipotenuzei*.

Rezolvare. **a)**	**b)**	**c)**
	$BC = 5$ cm $BC^2 = 5^2 = 25$ (cm^2).	$AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ (cm^2). $BC^2 = 25$ (cm^2). Prin urmare, $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Observație. Numerele 3, 4, 5 se numesc *numere pitagoreice* sau *numere pitagorice*.

Teorema 5 (teorema lui Pitagora)

În orice triunghi dreptunghic, pătratul lungimii ipotenuzei este egal cu suma pătratelor lungimilor catetelor.

În limbajul simbolisticii matematice

Dacă ΔABC este dreptunghic cu $\sphericalangle BAC = 90°$, atunci $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
Dacă notăm lungimile laturilor: $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, atunci relația devine: $a^2 = b^2 + c^2$.

Teorema 6 (reciproca teoremei lui Pitagora)

Dacă într-un triunghi, pătratul lungimii unei laturi este egal cu suma pătratelor lungimilor celorlalte două, atunci triunghiul este dreptunghic.

În limbajul simbolisticii matematice

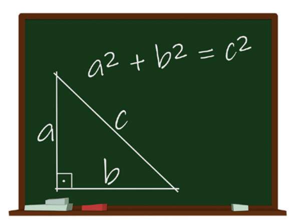
Dacă în ΔABC are loc egalitatea $BC^2 = AB^2 + AC^2$, atunci ΔABC este dreptunghic cu $\sphericalangle BAC = 90°$.
Dacă notăm lungimile laturilor: $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, atunci enunțul devine:
Dacă în ΔABC are loc egalitatea $a^2 = b^2 + c^2$, atunci ΔABC este dreptunghic cu $\sphericalangle A = 90°$.

Problemă rezolvată

a) Un teren în formă de triunghi dreptunghic are catetele $a = 8$ m și $b = 6$ m. Calculați lungimea ipotenuzei.

b) Decideți, argumentat, dacă se poate amenaja un strat de flori sub formă de triunghi dreptunghic, așa încât laturile sale să fie $a = 5$ m, $b = 12$ m și $c = 13$ m.

c) Pornind de la exemplele furnizate de subpunctele a) și b), identificați două triplete de numere pitagoreice.



Rezolvare

a) Cu teorema lui Pitagora, $c^2 = a^2 + b^2$, adică $c^2 = 64 + 36 = 100 = 10^2$, deci c = 10 m.

b) $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$. Conform reciprocei teoremei lui Pitagora, triunghiul este dreptunghic.

c) (6, 8, 10); (5, 12, 13) sunt triplete de numere pitagoreice pentru că $6^2 + 8^2 = 10^2$ și $5^2 + 12^2 = 13^2$

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Construiți triunghiul dreptunghic ABC, pentru fiecare din cazurile:
a) $\sphericalangle A = 90^\circ$, $AB = 8$ cm, $AC = 6$ cm;
b) $\sphericalangle A = 90^\circ$, $BC = 6$ cm, $\sphericalangle C = 40^\circ$.

2. Fie triunghiul isoscel ABC și punctul M mijlocul bazei BC. Demonstrați că triunghiurile ABM și ACM sunt dreptunghice.

3. Triunghiul DEF este dreptunghic, $\sphericalangle D = 90^\circ$. Calculați:
a) măsura unghiului F, dacă $\sphericalangle E = 33^\circ$;
b) măsura unghiurilor E și F, dacă $\sphericalangle F = \sphericalangle E + 20^\circ$.

4. Calculați măsurile unghiurilor unui triunghi dreptunghic, știind că unul dintre unghiurile exterioare ale acestui triunghi are măsura de 132°.

5. Măsurile unghiurilor unui triunghi sunt direct proporționale cu numerele 1, 2 și 3. Arătați că triunghiul este dreptunghic.

6. Se consideră triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90^\circ$. Copiați pe caiete și completați spațiile libere astfel încât să obțineți propoziții adevărate:
a) Dacă $BC = 20$ cm și $\sphericalangle B = 30^\circ$, atunci $AC = ...$ cm.
b) Dacă $AB = 7$ cm și $\sphericalangle C = 30^\circ$, atunci $BC = ...$ cm.
c) Dacă $BC = 32$ cm și $\sphericalangle B = 60^\circ$, atunci $AB = ...$ cm.
d) Dacă $AC = 8$ cm și $\sphericalangle C = 2 \cdot \sphericalangle B$, atunci $BC = ...$ cm.

7. Prelungim latura BC a triunghiului echilateral ABC cu segmentul $CD \equiv BC$.
a) Calculați măsura $\sphericalangle ADB$.
b) Demonstrați că ΔABD este dreptunghic.

8. Fie DM înălțimea corespunzătoare ipotenuzei triunghiului dreptunghic DEF.
Demonstrați că: $\sphericalangle DEM \equiv \sphericalangle FDM$ și $\sphericalangle EDM \equiv \sphericalangle DFE$.

9. Segmentul AD este mediana corespunzătoare ipotenuzei BC a triunghiului ABC.
Copiați pe caiete și completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:
a) Dacă $BC = 12$ cm, atunci $AD = ...$ cm.
b) Dacă $AD = 8{,}5$ cm, atunci $BC = ...$ cm.
c) Dacă $BD = 4$ cm, atunci $AD = ...$ cm.
d) Dacă $AC = 15$ cm și $\sphericalangle B = 30^\circ$, atunci triunghiul ACD este ... și $AD = ...$ cm.

10. În triunghiul ABC, M este mijlocul laturii BC și $AM \equiv BM \equiv CM$. Demonstrați că $\sphericalangle A = 90^\circ$.

11. Triunghiul LMN este echilateral, iar punctul G este centrul său de greutate. Fie P simetricul punctului G față de dreapta MN.
a) Calculați măsura unghiului GMP.
b) Demonstrați că triunghiul LMP este dreptunghic.

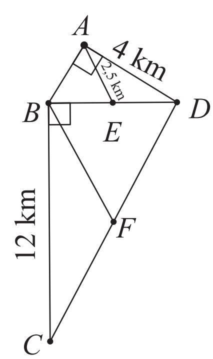
12. Reprezentați un triunghi dreptunghic cu catetele de 15 cm, respectiv 20 cm.
a) Măsurați lungimea ipotenuzei cu ajutorul riglei gradate.
b) Calculați lungimea ipotenuzei folosind teorema lui Pitagora.
c) Aflați raza cercului circumscris triunghiului și construiți cu ajutorul compasului acest cerc.

13. Se consideră triunghiul ABP cu $AP \perp PB$.
a) Dacă $AP = 9$ cm, $BP = 12$ cm, aflați AB.
b) Dacă $AB = 20$ cm, $AP = 16$ cm, aflați BP.
c) Dacă $AP = x$ cm, $BP = 5$ cm, $AB = 11$ cm, demonstrați că $9 < x < 10$.

14. $ABCD$ este pătrat, iar punctele M și N sunt mijloacele laturilor CD, respectiv DA.
Demonstrați că:
a) $\Delta ABN \equiv \Delta DAM$; **b)** $AM \perp BN$.

15. Desenați un triunghi dreptunghic ABC în care $\sphericalangle A = 90^\circ$, iar mediana corespunzătoare ipotenuzei are lungimea 5 cm.

16. Orașele A, B, C, D comunică prin rețeaua de drumuri reprezentate în schița alăturată, prin segmente. Se știe că $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CBD = 90^\circ$, E este mijlocul segmentului BD, F este mijlocul segmentului CD, $AD = 4$ km, $AE = 2{,}5$ km, $BC = 12$ km.



a) Calculați distanța dintre orașele B și D și distanța dintre orașele C și D.
b) Alegeți, argumentat, traseul cel mai scurt pentru a ajunge din orașul A în orașul C.

Minitest

Alegeți litera care indică varianta corectă. Doar un răspuns este corect.

30 p **a)** Măsurile unghiurilor ascuțite ale unui triunghi dreptunghic sunt direct proporționale cu numerele 4 și 5. Măsurile acestor unghiuri sunt:

A. 30° și 60°; **B.** 20° și 70°; **C.** 40° și 50°; **D.** 15° și 75°.

30 p **b)** Triunghiul *ABC* este dreptunghic isoscel cu $\sphericalangle A = 90°$, *AD* este înălțime, AD = 5 cm. Ipotenuza triunghiului are lungimea:

A. 5 cm; **B.** 10 cm; **C.** 2,5 cm; **D.** 7,5 cm.

30 p **c)** Dacă *BC* este ipotenuza triunghiului *ABC*, atunci:

A. $BC = AB + AC$; **B.** $BC^2 = AB^2 + AC^2$; **C.** $AB^2 = BC^2 + AC^2$; **D.** $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

EVALUARE SUMATIVĂ

I. *Alegeți varianta corectă de răspuns. Doar un răspuns este corect.*

5 p **1.** Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$, $AB = 3$ cm, $EF = 5$ cm și $P_{DEF} = 15$ cm, atunci lungimea segmentului *AC* este:

A. 3 cm; **B.** 5 cm; **C.** 7 cm; **D.** 8 cm.

5 p **2.** Triunghiul *DEF* este isoscel, $DE \equiv DF$, *EM* este bisectoarea unghiului *DEF*, $\sphericalangle FEM = 25^\circ$.
Măsura unghiului *EDF* este:

A. 50°; **B.** 80°; **C.** 75°; **D.** 110°.

5 p **3.** Punctul *P* este situat pe ipotenuza *MN* a triunghiului dreptunghic *AMN*, $AP = 7{,}5$ cm, iar punctele *M* și *N* sunt simetrice față de dreapta *AP*. Lungimea segmentului *MN* este:

A. 7,5 cm; **B.** 5 cm; **C.** 10 cm; **D.** 15 cm.

5 p **4.** Triunghiul *ABC* este isoscel, $AB \equiv AC$, $AD \perp BC$, $D \in BC$, $AD = 4$ cm. Dacă perimetrul triunghiului *ABD* este 12 cm, atunci perimetrul triunghiului *ABC* este egal cu:

A. 16 cm; **B.** 18 cm; **C.** 24 cm; **D.** 20 cm.

5 p **5.** În triunghiul *ABC* cu $\sphericalangle ABC = 40^\circ$, înălțimea *AD* și bisectoarea *BE* a unghiului *ABC* se intersectează în punctul *M*. Măsura unghiului *AME* este:

A. 60°; **B.** 75°; **C.** 80°; **D.** 70°.

5 p **6.** Dintre tripletele următoare, cel care reprezintă lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic, exprimate în aceeași unitate de măsură, este:

A. (3; 4; 7); **B.** (5; 11; 13); **C.** (8; 15; 17); **D.** (20; 30; 40).

II. *Scrieți rezolvările complete.*

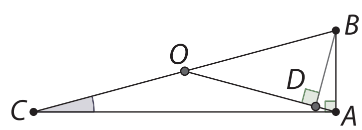
1. Segmentele *BM* și *CN* sunt mediane în triunghiul echilateral *ABC*, $M \in AC$, $N \in AB$ și $BM \cap CN = \{G\}$.

10 p **a)** Demonstrați că triunghiul *BGC* este isoscel.

10 p **b)** Dacă $BG = 12$ cm, calculați lungimea medianei *CN*.

10 p **2.** Fie triunghiul *DEF* în care $\sphericalangle DEF = 120^\circ$. Pe bisectoarea unghiului *DEF* se consideră punctul *L* astfel încât $EL \equiv DE$. Demonstrați că triunghiul *DEL* este echilateral.

3. În triunghiul dreptunghic *ABC*, $\sphericalangle A = 90^\circ$, $\sphericalangle C = 15^\circ$, iar *O* este mijlocul laturii *BC*. Segmentul *BD* este înălțimea triunghiului *ABO*, $D \in AO$.



10 p **a)** Demonstrați că triunghiul *ACO* este isoscel.

10 p **b)** Calculați măsura unghiului *AOB*.

10 p **c)** Dacă $BD = 8$ cm, arătați că $BC = 32$ cm.

Notă: Timp de lucru 50 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

RECAPITULARE FINALĂ ȘI EVALUARE SUMATIVĂ

I PROBLEME RECAPITULATIVE

1. Cu elementele mulțimii $M = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 49, 50\}$ se formează submulțimile A, B, C, D, astfel:
A conține numerele divizibile cu 2, care nu sunt divizibile cu 3; B conține numerele divizibile cu 3, care nu sunt divizibile cu 2; C conține numerele care sunt divizibile și cu 2 și cu 3; D conține numerele care nu sunt divizibile nici cu 2, nici cu 3. Determinați cardinalul fiecărei submulțimi și stabiliți care dintre ele are cele mai multe elemente.

2. **a)** Determinați numărul întreg x, știind că $(2 \cdot x + 1)$ divide numărul 6.
b) Demonstrați că numărul $\overline{xy} + 7 \cdot y$ este număr par, oricare ar fi cifrele x, y, $x \neq 0$.

3. Aflați numărul x din proporțiile:
a) $\dfrac{x+2,5}{x-2,5} = \dfrac{7}{2}$; **b)** $\dfrac{2}{x} = \dfrac{x+1}{28}$.

4. Calculați cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun al numerelor 45 și 75.

5. O echipă formată din 10 muncitori poate termină o lucrare în 12 zile. Aflați în câte zile poate termina lucrarea o echipă formată din 15 muncitori, știind că lucrează în aceleași condiții ca prima echipă.

6. Calculați:
a) $-10 - 13 - 4 + 27$;
b) $[4 \cdot (-16) - (-5) \cdot (-12)] : (13 - 3^2)$;
c) $-3 \cdot [13 - (-4 \cdot 5 + 12) : (-4)]$;
d) $96 : \{-5 \cdot [1 - 4 \cdot (2 \cdot 34 - 65)] - 67\}$.

7. Fie numerele
$a = 2^1 + (-2)^2 + 2^3$ și
$b = (-3)^3 + 3^2 + (-3)^1$.
Comparați numerele $a - 20$ și $b + 10$.

8. Numerele întregi x, y, z sunt direct proporționale cu 2, 3 respectiv 6.
a) Demonstrați că numărul $A = x \cdot y + y \cdot z + z \cdot x$ este pătrat perfect.
b) Determinați cele trei numere, știind că $x \cdot y \cdot z > 0$ și $x \cdot y + \dfrac{y \cdot z}{2} + \dfrac{z \cdot x}{3} = 76$.

9. Numerele a și b sunt invers proporționale cu $\dfrac{1}{3}$ și $\dfrac{1}{6}$, iar $c = \dfrac{a+b}{2}$.
Determinați a, b, c, știind că suma lor este 13,5.

10. După o reducere de 10%, o minge costă 45 lei. Determinați prețul mingii înainte de reducere.

11. Împărțiți 140 de napolitane la două grupuri de copii astfel încât 40% din numărul napolitanelor date primului grup să fie cu 8 mai mare decât 24% din numărul napolitanelor date celui de-al doilea grup.

12. Calculați numărul
$E = (-1)^{22} \cdot (-2) + (-3) \cdot (-1)^{33} + (-1)^{44} \cdot (-4)$.

13. Emil și Rareș calculează independent numerele a, b, c, d, date mai jos :

$$a = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left[0,(3) + 0,5 : \frac{3}{4}\right] : \frac{8}{9},$$

$$b = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{2} + 1\frac{1}{4} + \frac{2}{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}},$$

$$c = \left|-\frac{3}{2} + 1\right| - \frac{-3^2 + 23}{-2^3 + 32} \text{ și}$$

$$d = \left[\left(-\frac{3}{4}\right)^5 : \left(-\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{5}{64}\right] : 0,01.$$

După efectuarea calculelor, cei doi au următorul dialog:
Emil: – Niciunul dintre numere nu este număr natural.
Rareș: – Eu am obținut două numere raționale opuse.
Efectuați calculele și precizați, justificând răspunsul dat, dacă afirmațiile celor doi sunt adevărate.

14. Calculați:
a) suma numerelor raționale x care verifică egalitatea $|3 \cdot x - 2| - 1 = 4$;
b) produsul numerelor întregi y pentru care au loc inegalitățile $-13 \leq 2 \cdot y - 7 < 1$.

15. Numărul elevilor care formează lotul de volei al unei şcoli şi vârstele acestor elevi sunt înscrise în tabelul alăturat.

Vârsta (ani)	11	12	13	14
Numărul de elevi	4	6	6	4

a) Calculaţi numărul elevilor şi vârsta medie a elevilor din lotul de volei.

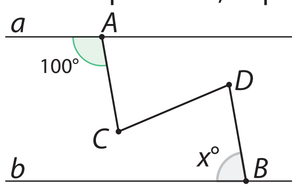
b) Determinaţi numărul elevilor de 14 ani care ar trebui să se adauge la lot pentru ca vârsta medie să fie 13 ani.

16. Teo nu-şi mai aminteşte ultimele două cifre ale parolei, dar ştie că aceasta are forma $\overline{2023ab}$ şi că numărul $\overline{2023ab}$ este divizibil cu 25. Decideţi justificat de câte încercări diferite este nevoie pentru a fi siguri că Teo scrie corect parola.

17. Iancu formează cu numerele întregi *a* şi *b*, $1 < a < 6$ şi $0 \leq b < 15$ rapoarte de forma $\dfrac{b}{a}$.

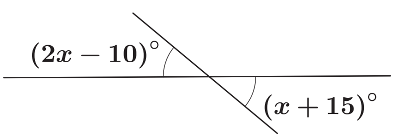
Precizaţi numărul rapoartelor formate de Iancu, care au valoarea mai mare decât 2.

18. Casa în care locuieşte Luca se află în punctul *A*, pe strada *a*. Luca doreşte să ajungă la prietenul său, Vlad, care locuieşte în casa situată în punctul *B*, de pe strada *b*. Acesta merge pe traseul *A* – *C* – *D* – *B*. Folosind datele din desenul alăturat şi ştiind că $a \parallel b$ şi $AC \parallel BD$, calculaţi numărul *x*.

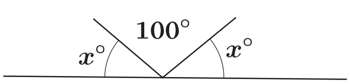


19. Calculaţi numerele necunoscute în fiecare dintre situaţiile:

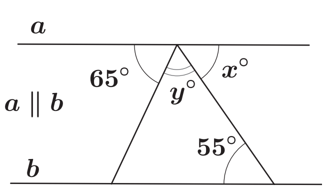
a)



b)



c)



20. Semidreptele *OM* şi *ON* sunt bisectoarele unghiurilor neadiacente *AOB*, respectiv *AOC*, $\sphericalangle AOB = x^\circ < 90^\circ$ şi $OB \perp OC$.

a) Calculaţi, în funcţie de *x*, măsurile unghiurilor *AOM* şi *BON*.

b) Demonstraţi că măsura unghiului *MON* nu depinde de măsura unghiului *AOB*.

21. În triunghiul *ABC*, $\sphericalangle A = 60^\circ$, $AB = 2{,}5$ cm. Calculaţi:

a) perimetrul triunghiului, dacă $AB = BC$.

b) lungimea segmentului *AC*, ştiind că unghiurile *A* şi *C* ale triunghiului *ABC* sunt complementare.

22. Punctele *A* şi *B* sunt situate de aceeaşi parte a dreptei *CD*, $AD \perp CD$, $BC \perp DC$ şi $AD \equiv BC$.
Demonstraţi că:

a) $AC \equiv BD$;

b) distanţa de la punctul *C* la dreapta *BD* este egală cu distanţa de la punctul *D* la dreapta *AC*.

23. În triunghiul *MNP*, $MN \equiv MP$, $\sphericalangle NMP = 44^\circ$, iar punctul *H* este ortocentrul triunghiului.
Calculaţi măsura unghiului *NHP*.

24. Triunghiurile echilaterale *AMN* şi *BMN* sunt situate în semiplane diferite faţă de dreapta *MN*.
Demonstraţi că:

a) semidreapta *AB* este bisectoarea $\sphericalangle MAN$;

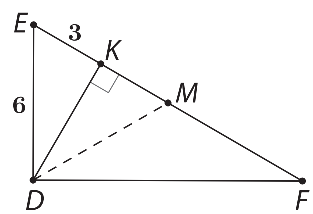
b) dreapta *MN* este mediatoarea segmentului *AB*.

25. Triunghiul *ABC* este isoscel şi $\sphericalangle A - \sphericalangle B = 105^\circ$.

a) Precizaţi care sunt laturile congruente.

b) Calculaţi măsura unghiului obtuz format de bisectoarele unghiurilor *B* şi *C* ale triunghiului.

26. Fie triunghiul *DEF* în care $\sphericalangle D = 90^\circ$, $DE = 6$ cm, $DK \perp EF$, $K \in EF$ şi $EK = 3$ cm.



a) Calculaţi măsurile unghiurilor triunghiului *DEF*.

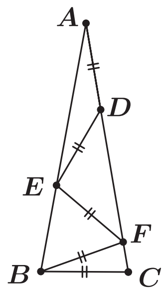
b) Demonstraţi că $FK = 9$ cm.

c) Dacă punctul *M* este mijlocul laturii *EF*, calculaţi lungimea segmentului *KM*.

27. Triunghiul ABC este isoscel cu baza BC, $E \in AB$, $D \in AC$, $F \in AC$ astfel încât $AD = DE = EF = FB = BC$.

a) Calculați măsura unghiului BAC.

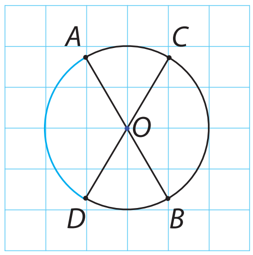
b) Demonstrați că triunghiul BEF este echilateral.



28. Segmentele AB și CD sunt diametre în cercul $\mathcal{C}(O, r)$, $AB = 8$ cm, iar măsura arcului mic $\overset{\frown}{AD}$ este $120°$.

a) Demonstrați că triunghiul AOC este echilateral și calculați perimetrul acestuia.

b) Demonstrați că $AC \parallel BD$.



29. În triunghiul echilateral DEF, cu perimetrul 24 cm, se prelungesc medianele DM și EN cu segmentele $MP \equiv DM$ și respectiv $NQ \equiv EN$.

a) Demonstrați că punctele P, F, Q sunt coliniare.

b) Calculați lungimea segmentului PQ.

30. Prin I, punctul de intersecție a bisectoarelor unghiurilor triunghiului ABC, se duce dreapta d, paralelă cu BC, $d \cap AB = \{D\}$, $d \cap AC = \{E\}$.

a) Demonstrați că triunghiul BDI este isoscel.

b) Dacă I este mijlocul segmentului DE, demonstrați că $AB \equiv AC$.

31. Fie triunghiul ABC cu ipotenuza BC, D simetricul punctului B față de dreapta AC și E mijlocul segmentului CD astfel încât $AC \cap BE = \{G\}$, $AB = 4$ cm, $AG = 3$ cm.

a) Calculați lungimile segmentelor BG, CG și BE.

b) Demonstrați că $BC < 10$ cm.

II EVALUARE SUMATIVĂ

TESTUL NR. 1

I. *Alegeți varianta corectă de răspuns. Doar un răspuns este corect.*

5 p **1.** Rezultatul calculului $(-95) : (-19) + (-2)^3$ este :
A. 3; **B.** – 3; **C.** –13; **D.** 13.

5 p **2.** Dacă $|x - 0,(3)| = 0$, atunci $6 \cdot x$ este:
A. –2; **B.** 1; **C.** 2; **D.** 3.

5 p **3.** Calculând 40% din 125 lei obținem:
A. 50; **B.** 55; **C.** 60; **D.** 75.

5 p **4.** Dacă $a = -\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^3$ atunci produsul $-10 \cdot \frac{1}{a}$ este egal cu:
A. –8; **B.** –16; **C.** 8; **D.** 16.

5 p **5.** Din cei 24 de elevi ai unei clase, 18 au obținut la un test note peste 8. Exprimat în procente, numărul elevilor cu note peste 8, este:
A. 80%; **B.** 60%; **C.** 75%; **D.** 18%.

5 p **6.** Dacă suplementul unui unghi are $53°$, atunci unghiul are măsura:
A. $37°$; **B.** $137°$; **C.** $57°$; **D.** $127°$.

5 p **7.** Dreptele AC și BD sunt concurente în punctul O și $\sphericalangle AOB = 2 \cdot \sphericalangle BOC$. Atunci $\sphericalangle AOD$ are măsura:
A. $60°$; **B.** $90°$; **C.** $120°$; **D.** $180°$.

5 p **8.** Triunghiul ABC are perimetrul 22 cm, $\sphericalangle A = \sphericalangle B$ și $AB = 6$ cm. Latura BC are lungimea de:
A. 6 cm; **B.** 8 cm; **C.** 16 cm; **D.** 10 cm.

II. *Scrieți rezolvările complete.*

1. Prețul unei cărți este 27 lei și reprezintă 54% din prețul unui stilou.

10 p **a)** Calculați prețul stiloului.

15 p **b)** Liviu cumpără o carte și un stilou și folosește 44% din suma pe care o are. Calculați suma de bani care îi rămâne lui Liviu.

2. Triunghiul ABC este isoscel, $AB = AC$ și un unghi exterior triunghiului are măsura 50°. Punctele D și E sunt situate pe latura BC astfel încât $\sphericalangle BAD = 35°$, iar $\sphericalangle AEC = 120°$.

10 p **a)** Calculați măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

15 p **b)** Demonstrați că triunghiul ADE este echilateral.

Notă: Timp de lucru 90 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

TESTUL NR. 2

I. *Alegeți varianta corectă de răspuns. Doar un răspuns este corect.*

5 p **1.** Probabilitatea ca alegând la întâmplare un număr din mulțimea {1, 2, 3, … , 30}, acesta să fie număr prim este:

A. $\frac{1}{4}$; **B.** $\frac{7}{30}$; **C.** $\frac{9}{20}$; **D.** $\frac{1}{3}$.

5 p **2.** Rezultatul calculului $-\frac{1}{2}:\left(-\frac{1}{4}\right)-5$ este:

A. – 3; **B.** – 7; **C.** 3; **D.** 5.

5 p **3.** Numerele x și y sunt întregi, $x < 0$, $y > 0$, $x^2 = 100$, $y^2 = 400$. Atunci, $x : y$ este egal cu:

A. –2; **B.** – 0,5; **C.** 0,2; **D.** – 0,2.

5 p **4.** Numerele a și 2 sunt direct proporționale cu numerele 7 și 1,75. Numărul a este:

A. 4; **B.** 14; **C.** 8; **D.** 3,5.

5 p **5.** Dacă $\frac{x+1}{x+5}=\frac{7}{15}$, atunci x este egal cu:

A. 2,5; **B.** 11; **C.** 3,5. **D.** 15;

5 p **6.** AD și BE sunt mediane în triunghiul ABC, $AD \cap BE = \{G\}$, $AG = 6$ cm, $GE = 3$ cm. Diferența $AD - BE$ este:

A. 3 cm; **B.** 2 cm; **C.** 1 cm; **D.** 0 cm.

5 p **7.** În triunghiul dreptunghic ABC, bisectoarea unghiului C formează cu ipotenuza BC un unghi cu măsura 24°. Măsura unghiului B este:

A. 24°; **B.** 42°; **C.** 56°; **D.** 66°.

5 p **8.** Punctul D este mijlocul laturii BC a triunghiului echilateral ABC, iar în exteriorul triunghiului se construiește triunghiul echilateral BDE. Dreapta BE este paralelă cu dreapta:

A. AD; **B.** CD; **C.** AC; **D.** BC.

II. *Scrieți rezolvările complete.*

20 p **1.** Determinați numerele x, y, z, știind că suma lor este 84, iar numerele x, $y - 1$, $z - 2$ sunt direct proporționale cu 2, 3 respectiv 4.

2. În triunghiul isoscel ABC, $\sphericalangle A = 120°$ și M este mijlocul laturii AB. Perpendiculara din M pe dreapta BC intersectează dreapta AC în punctul D. Demonstrați că:

15 p **a)** triunghiul BCD este dreptunghic;

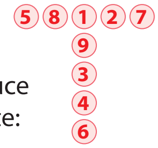
15 p **b)** $AB = 2 \cdot DM$.

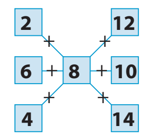
Notă: Timp de lucru 90 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

RECAPITULARE ȘI EVALUARE INIȚIALĂ

I. PROBLEME RECAPITULATIVE (pag 7)





1. a) 506; **b)** 1011; **c)** 1307; **d)** 13. **2.** Suma tuturor cifrelor este 45, iar condiția impusă conduce la suma pentru linie și coloană 46. Rezultă că cifra comună este 46 – 45 = 1. Un exemplu este:

3. Suma numerelor de completat este 56. Notăm $s = a + d + g = b + d + f = c + d + e$. Atunci $a + d + g + b + d + f + c + d + e = 3s$ sau $56 + 2d = 3s$. Sunt trei valori pentru d: $d = 2$, $d = 8$, d =14. O soluție a problemei este: $a = 2$, $b = 6$, $c = 4$, $d = 8$, $e = 12$, $f = 10$, $g = 14$.

4. $a = (2^{10} \cdot 21)^2$. **5.** $b = (3^2)^3$. **6. a)** $8^{15} = 2^{45}$, deci $n < m$; **b)** $20^{18} = (2^{15} \cdot 5^{18}) \cdot 2^{21} = (2^{15} \cdot 5^{18}) \cdot 128^3$; $50^{15} = (2^{15} \cdot 5^{18}) \cdot 625^3$ și $128 < 625$, deci $n < m$. **7. a)** {1, 2, 3, 4, 6, 12}, **b)** {46, 69, 92, 115, 138,161,184,207, 230}. **8.** $u + v + w = 4 + 3 + 5 = 12$, număr compus.

9. $a = (34 \cdot 4 \cdot 3^n \cdot 5^{n+1}) \vdots 34$. **10. a)** 7 copii; **b)** 3 frați și 3 surori. **11. a)** 41, **b)** 43. **12. a)** 0,6; 0,77; 0,(6); 1,1(3); 27,4(2);

b) $\frac{7}{5}; \frac{5}{2}; \frac{11}{9}; \frac{211}{90}$. **13.** $\frac{1251}{500} = 2{,}502$ și 2,5(501) > 2,502 > 2,(501) > 2,50(1). **14. a)** 3; **b)** $\frac{1}{10}$; **c)** 0,167; **d)** $\frac{7}{4}$. **15.** $a = 7$ este număr natural. **16.** 321 km. **17. a)** 18,5; **b)** 11. **18.** 101 mere, 8 coșuri. **19.** 5760 pungi, 240 cutii.

20. $1 < v < a < g < r$ și $v + a + g + r = 14$. Cum 2 + 3 + 4 + 5 =14, deducem că Raul a cumpărat 2 șepci verzi și au rămas 12: 3 albastre, 4 galbene, 5 roșii. **21.** 26,2 lei. **22.** 1026 lei. **23.** 108 pagini. **24. a)** 353 dam; **b)** 0,8 km; **c)** 1,2 hm^2 =1,2 ha, **d)** 14000 m^2, **e)** 7 dam^3, **f)** 3500dm^3. **25. a)** 1230 m; **b)** 222 700 cm, **c)** 50505 m^2; **d)** 690,3 m^2. **27. a)** $AB \parallel CD$; **b)** AB, BC, FB. **28. a)** 56°; **b)** 10°; **c)** 60°48′; **d)** 6°27′. **29.** 57,6 cm, 155,52 cm^2. **30. a)** 30 cm; **b)** 75%. **31. a)** 33 m; **b)** 2651m^2.

II. TESTE DE EVALUARE INIȚIALĂ (pag 9)

Test nr. 1: I. 1. C; **2.** B; **3.** A; **4.** A; **5.** C; **6.** C.

II. 1. a) 31; **b)** {1, 31}; 32. **2.** 32,400 km. **3.** $AC = 4$ cm; $BC = 14$ cm; $BD = 7$ cm; $AD = 11$ cm.

Test nr. 2: I. 1. A; **2.** C; **3.** C; **4.** A; **5.** D; **6.** A.

II. 1. a) 1061; **b)** 8091. **2.** 1760 m. **3.** l =10 m; L = 30 m; P = 80 m.

EXERSĂM NE ANTRENĂM NE DEZVOLTĂM ȘI MINITESTE

Se găsesc în manualul digital, sub forma câte unui AMII static, la finalul fiecărei unități de învățare. (1.1; 1.2; ...; 6.4).

EVALUARE SUMATIVĂ

1. MULȚIMI. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE (pag 36) I. 1. C; **2.** B; **3.** A; **4.** D; **5.** D; **6.** B. **II. 1. a)** $C = \{0, 3, 6, 9\}$; **b)** $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B \cap C = \{6\}$, $C \setminus A = \{0, 6, 9\}$; **c)** $\{4\} \cup \{a, 5\} = \{3, 4, 5\} \Rightarrow a = 3$. **2. a)** Pentru a sunt 9 posibilități, pentru b sunt 5 posibilități, în total $9 \cdot 5 = 45$ numere; **b)** $D_{98} = \{1, 2, 7, 14, 49, 98\}$. **3. a)** $a = 2^3 \cdot 3$, $b = 3^2 \cdot 5$, $(a, b) = 3$, $[a, b] = 360$; **b)** $a + b = 69$ și $D_{69} = \{1, 3, 23, 69\}$. Divizorii numere prime ai lui 69 sunt 3 și 23.

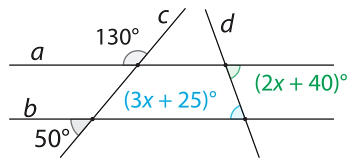
2. RAPOARTE. PROPORȚII (pag 63) I. 1. B; **2.** C; **3.** A; **4.** D; **5.** B; **6.** C. **II. 1. a)** Notând a, b, c cele trei cantități, avem $\frac{a}{5} = \frac{b}{9} = \frac{c}{10} = \frac{a+b+c}{5+9+10} = 10$; cea mai mică este $a = 50$ kg; **b)** $p = \frac{7}{20}$. **2. a)** $\frac{84}{700} = 12\%$. Se majorează cu 12%.

b) 100% – 12% = 88%. Cum $\frac{88}{100} \cdot 784 = 689{,}92$(lei), prețul final este mai mic decât prețul inițial.

3. a) Din $a \cdot \frac{1}{2} = b \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow b = 2 \cdot a$; **b)** $n = 5 \cdot a$ și $m = 5 \cdot a$ și $\frac{n}{n+m} = \frac{1}{2}$.

3. MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI (pag 93) I. 1. D; **2.** B; **3.** D; **4.** B; **5.** C; **6.** A. **II. 1. a)** $a = 8$, $b = -38$, $c = 4$; **b)** $9 \cdot (a - c) + b = -2$, număr întreg negativ. **2. a)** $2 \cdot x \cdot (y + z) = -10$; **b)** $y + z = -9$. **3. a)** $s = -57 + 3 \cdot 17 = -6$. **b)** Numerele sunt –1, –2 și –3.

4. MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE (pag 122) **I. 1.** A; **2.** B; **3.** C; **4.** D; **5.** B; **6.** C. **II.**



1. a) $a = -5$, $b = -4$, $c = -\dfrac{7}{2}$ și $c \in (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$; **b)** $d = \dfrac{-70}{-7} = 10 \in \mathbb{N}$. **2.** $S = \{-3\}$. **3. a)** $\dfrac{p}{2}$; **b)** $\dfrac{p}{3}$; **c)** $\dfrac{p}{2} + \dfrac{p}{3} + 150 = p$; **d)** $p = 900$ (lei).

5. NOȚIUNI GEOMETRICE FUNDAMENTALE (pag 172) **I. 1.** B; **2.** C; **3.** A; **4.** D; **5.** B; **6.** A.

II. 1. a) $130^\circ + 50^\circ = 180^\circ$. Dreptele a și b formează unghiuri externe de aceeași parte a secantei c, suplementare. Rezultă $a \parallel b$; **b)** Unghiurile marcate sunt alterne interne determinate de dreptele paralele a și b cu secanta d. Din $3 \cdot x + 25 = 2 \cdot x + 40$, rezultă $x = 15$. **2. a)** $\sphericalangle AOB = 90^\circ$, $\sphericalangle BOC = 60^\circ$; **b)** $\sphericalangle MOP = \sphericalangle MON + \sphericalangle NOP = 75^\circ + 15^\circ = 90^\circ$. **3. a)** $d = 2$; **b)** $d = 4$; **c)** $d \in \{6, 8\}$.

6. TRIUNGHIUL (pag 218) **I. 1.** C; **2.** B; **3.** D; **4.** A; **5.** D; **6.** C. **II. 1. a)** $BM = CN$ și $BG = \dfrac{2}{3} \cdot BM = \dfrac{2}{3} \cdot CN = CG$;

b) $BM = \dfrac{3}{2} \cdot BG = 18$ cm, deci CN = 18 cm. **2.** $\sphericalangle DEL = \sphericalangle DEF : 2 = 60^\circ$ și $DE \equiv EL$. **3. a)** $BO = CO = \dfrac{BC}{2}$ și

$AO = \dfrac{BC}{2} \Rightarrow AO \equiv CO$; **b)** Din $AO = CO \Rightarrow \sphericalangle ACO = \sphericalangle CAO = 15^\circ$. Unghiul AOB este exterior triunghiului

ACO și $\sphericalangle AOB = \sphericalangle ACO + \sphericalangle CAO = 30^\circ$. **c)** În $\triangle OBD$: $\sphericalangle ODB = 95^\circ$, $\sphericalangle BOD = 30^\circ \Rightarrow BD = \dfrac{BO}{2} = \dfrac{BC}{4}$. Atunci $BC = 4 \cdot BD = 32$ cm.

RECAPITULARE ȘI EVALUARE FINALĂ

I. PROBLEME RECAPITULATIVE (pag 219)

1. card $A = 17$, card $B = 8$, card $C = 8$, card $D = 17$. Mulțimile A și D au cele mai multe elemente. **2. a)** $x \in \{-2, -1, 0, 1\}$; **b)** $\overline{xy} + 7 \cdot y = 2 \cdot (5 \cdot x + 4 \cdot y)$. **3. a)** 4,5; **b)** 7. **4.** (45, 75) = 15; [45, 75] = 225. **5.** 8 zile. **6. a)** 0; **b)** –31; **c)** –33; **d)** –8. **7.** $a = 14$, $b = -21$, $a - 20 > b + 10$. **8. a)** $A = 36k^2 = (6k)^2$, $k \in \mathbb{Z}$. **b)** $x = 4$, $y = 6$, $z = 12$. **9.** $a = 3$; $b = 6$, $c = 4{,}5$. **10.** 50 lei. **11.** 65 respectiv 75 napolitane. **12.** $E = -3$. **13.** $a = \dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{184}{3}$, $c = -\dfrac{1}{12}$, $d = -50$; Emil are dreptate, Rareș nu.

14. a) $x \in \{-1, \dfrac{7}{3}\}$, $S = \dfrac{4}{3}$; **b)** $y \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $P = 0$. **15. a)** 20 elevi; $m = 12{,}5$; **b)** 10 elevi. **16. a)** $\overline{ab}$ poate fi: 00; 25; 50; 75; 4 încercări. **17.** $a \in \{2, 3, 4, 5\}$, $b \in \{0, 1, 2, \ldots, 13, 14\}$, $a = 2$, $b > 4$; 10 rapoarte; $a = 3$, $b > 6$; 8 rapoarte; $a = 4$, $b > 8$; 6 rapoarte; $a = 5$, $b > 10$; 4 rapoarte, în total 28 rapoarte. **18.** Fie $AC \cap b = \{E\}$. $\sphericalangle AEB = 100^\circ$ și $\sphericalangle AEB$, $\sphericalangle DBE$ sunt suplementare $\Rightarrow x = 80$. **19. a)** $x = 25$; **b)** $x = 40$; **c)** $x = 55$, $y = 60$. **20. a)** $\sphericalangle AOM = \left(\dfrac{x}{2}\right)^\circ$, $\sphericalangle BON = \left(45 - \dfrac{x}{2}\right)^\circ$;

b) $\sphericalangle MON = 45^\circ$. **21. a)** $P = 7{,}5$ cm; **b)** $AC = 5$ cm. **22. a)** $\triangle ADC \equiv \triangle BCD$ (CC) $\Rightarrow AC \equiv BD$, $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle CBD$; **b)** $DE \perp AC$, $E \in AC$, $CF \perp BD$, $F \in BD$; $\triangle ADE \equiv \triangle BCF$ (IU) $\Rightarrow DE \equiv CF$. **23.** $\sphericalangle NHP = 180^\circ - \sphericalangle M = 136^\circ$. **24. a)** $\triangle AMB \equiv \triangle ANB \Rightarrow \sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle NAB$; **b)** În $\triangle AMB$ isoscel cu baza AB, MN este bisectoarea unghiului format de laturile congruente $\Rightarrow MN$ mediatoarea laturii AB. **25. a)** $\sphericalangle A = \sphericalangle B + 105^\circ \Rightarrow \sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$ și $AB \equiv AC$; **b)** $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 25^\circ$ și $\sphericalangle BIC = 155^\circ$. **26. a)** $\sphericalangle D = 90^\circ$, $\sphericalangle E = 60^\circ$, $\sphericalangle F = 30^\circ$; **b)** $EF = 12$ cm, $FK = 9$ cm; **c)** $KM = 3$ cm. **27.** Fie $\sphericalangle BAC = x$. $AD \equiv DE \Rightarrow \sphericalangle BAC = \sphericalangle AED = x$; Obținem $\sphericalangle EDF = 2 \cdot x$. $DE \equiv EF \Rightarrow \sphericalangle EFD = 2 \cdot x$ și $\sphericalangle BEF = 3 \cdot x$. Apoi $\sphericalangle EBF = 3 \cdot x$ și $\sphericalangle BFC = 4 \cdot x = \sphericalangle BCF$. În $\triangle ABC$: $x + 4x + 4x = 180^\circ \Rightarrow x = \sphericalangle BAC = 20^\circ$; **b)** $\sphericalangle BEF = 60^\circ$ și $EF = BF$. **28. a)** $AO = OC$ și $\sphericalangle AOC = 60^\circ$; **b)** $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABD = 60^\circ$.
29. a) $\triangle EFN \equiv \triangle QFN \equiv \triangle PFM$ (CC) $\Rightarrow \sphericalangle EFN = \sphericalangle QFN = \sphericalangle PFM = 60^\circ$; **b)** $PQ = 2 \cdot DE = 16$(cm). **30. a)** $\sphericalangle BID \equiv \sphericalangle IBC \equiv \sphericalangle IBD$; **b)** AI mediană și bisectoare. **31. a)** $BG = 5$ cm, $CG = 2 \cdot AG = 6$ cm, $BE = \dfrac{3}{2} \cdot BG = 7{,}5$ cm; **b)** $BC^2 = 97 < 100 \Rightarrow BC < 10$ (cm).

II. TESTE DE EVALUARE FINALĂ (pag 221)

Testul nr. 1: I. 1. B; **2.** C; **3.** A; **4.** D; **5.** C; **6.** D; **7.** A; **8.** B. **II. 1. a)** 50 lei; **b)** 98 lei. **2. a)** Deoarece $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$, rezultă $\sphericalangle A_{ext} = 50^\circ$. Se obțin $\sphericalangle A = 130^\circ$, $B = \sphericalangle C = 25^\circ$. **b)** $\sphericalangle ADE = \sphericalangle AED = 60^\circ$.

Testul nr. 2: I. 1. D; **2.** A; **3.** B; **4.** C; **5.** A; **6.** D; **7.** B; **8.** C. **II. 1.** $x = 18$, $y = 28$, $z = 38$. **2. a)** $\triangle AMD$ este echilateral, deci $DM = MA = MB$. **b)** DM este mediana corespunzătoare ipotenuzei AB în $\triangle ADB$. Rezultă $AB = 2 \cdot DM$.

Manualul este prezentat în variantă tipărită și în variantă digitală.
Varianta digitală are un conținut similar celei tipărite.
În plus, cuprinde o serie de activități multimedia interactive de învățare (exerciții interactive, jocuri educaționale, animații, filme, simulări).

Învățat e omul care nu termină niciodată de învățat.

Lucian Blaga

Tradiție din 1989
www.litera.ro
ISBN 978-630-319-188-1