

Ministerul Educației și Cercetării

Mihaela Singer
(coordonator)

Sorin Borodi

Vlad Copil

Emilia Iancu

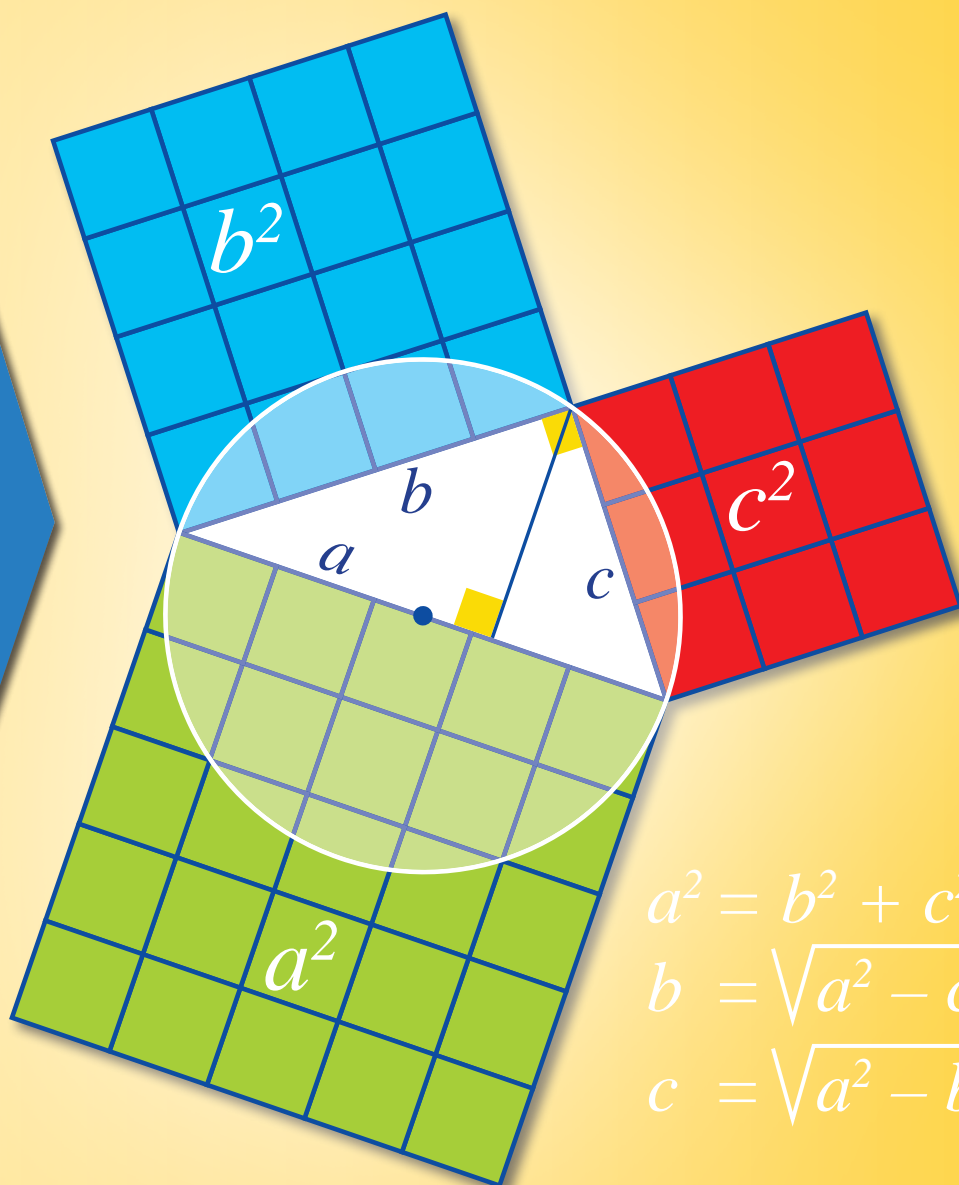
Maria Popescu

Vicențiu Rusu

Cristian Voica

MATEMATICĂ

Manual
pentru clasa
a VII-a



Acest manual școlar este proprietatea Ministerului Educației și Cercetării.

Manualul a fost aprobat prin Ordinul Ministrului Educației și Cercetării nr. 5219/12.11.2019,
în urma evaluării și este realizat în conformitate cu
Programa școlară aprobată prin OM nr. 3393/28.02.2017

116.111 – numărul de telefon de asistență pentru copii

Ministerul Educației și Cercetării

Mihaela Singer

Sorin Borodi

Vlad Copil

Emilia Iancu

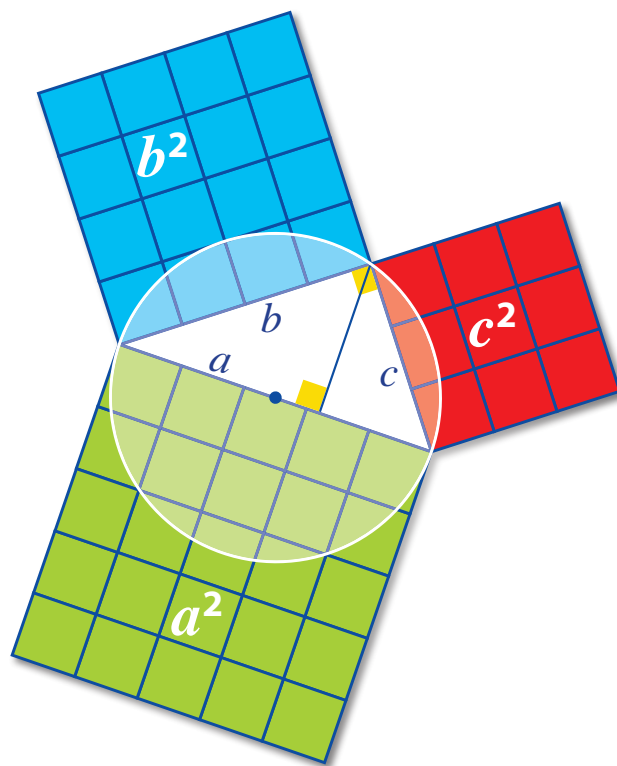
Maria Popescu

Vicențiu Rusu

Cristian Voica

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a VII-a



Manualul este distribuit elevilor în mod gratuit, atât în format tipărit, cât și în format digital, și este transmisibil timp de patru ani școlari, începând din anul școlar 2019-2020.

Inspectoratul Școlar
 Școala / Colegiul / Liceul

ACEST MANUAL A FOST FOLOSIT DE:

Anul	Numele elevului	Clasa	Anul școlar	Aspectul manualului*			
				Format tipărit		Format digital	
				la primire	la predare	la primire	la predare
1							
2							
3							
4							

* Pentru precizarea aspectului manualului se va folosi unul dintre următorii termeni: *nou, bun, îngrijit, neîngrijit, deteriorat*.

Cadrele didactice vor verifica dacă informațiile înscrise în tabelul de mai sus sunt corecte.
 Elevii nu vor face niciun fel de însemnări pe manual.

Referenți: Conf. univ. dr. Eugen Păltănea

Prof. gr. I Consuela Voica

Redactor: Nicoleta Puiu

Ilustrator: Anita Ionescu

Tehnoredactori: Dana Manolescu, Răzvan Anisoiu

Coperta: Dana Manolescu, Răzvan Anisoiu

Credite foto: pixabay.com; freepik.com;
 wikipedia.org; commons.wikimedia.org;
 pxhere.com; flickr.com; vecteezy.com.

© 2019 Editura Sigma

Toate drepturile asupra prezentei ediții aparțin Editurii Sigma.

Nicio parte a acestei lucrări nu poate fi reprodusă fără acordul scris al Editurii Sigma.

ISBN: **978-606-727-368-7**

Editura Sigma

Sediul central

Str. G-ral Berthelot, nr. 38, sector 1, București,
 cod: 010169

Tel.: 021.243.40.14; 0748.100.719

E-mail: office@librariesigma.ro

Web: www.librariesigma.ro

Distribuție

Str. Nicolae Cartoian, Nr. 11, București

Tel.: 021.243.40.52; 0748.100.719; 0758.044.827

E-mail: comenzi@librariesigma.ro

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

Matematică : manual pentru clasa a VII-a / Mihaela Singer (coord.),

Sorin Borodi, Vlad Copil, - București : Sigma, 2019

ISBN 978-606-727-368-7

I. Singer, Mihaela

II. Borodi, Sorin

III. Copil, Vlad

Prefață

Matematica ne permite să înțelegem mai profund lumea din jurul nostru. Spre exemplu, forma de spirală cu care natura ne încântă deseori (la cochiliile unor melci, în distribuția frunzelor de aloe-vera sau a semințelor de floarea soarelui etc.) poate fi explicată matematic prin modul de formare a celebrului șir de numere al lui Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... În acest spirit, programa de matematică pentru clasa a VII-a invită la realizarea permanentă de conexiuni relevante între conceptele matematice și concretul vieții cotidiene, precum și între algebră și geometrie.

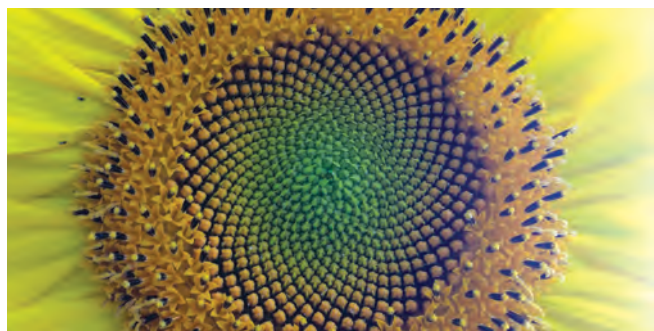
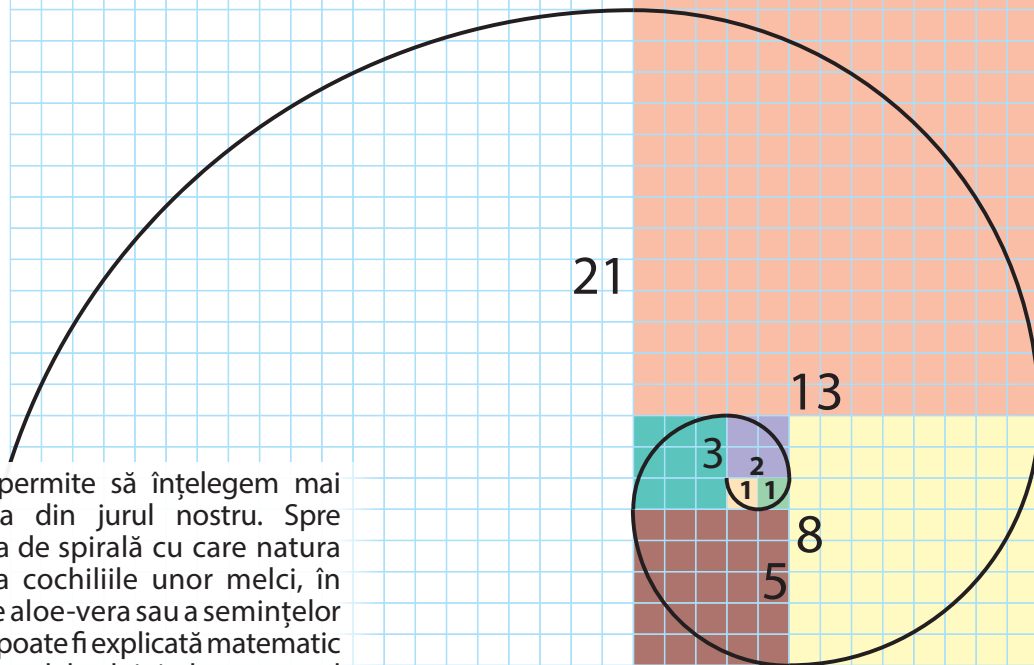
Folosind acest manual, elevul se va convinge că matematica este utilă: ea explică structura multor fenomene din lumea noastră și oferă modele generale care permit rezolvarea unor probleme practice. Manualul surprinde prin bogăția de imagini și prin modul de comunicare. Elevul este tratat ca un partener de dialog, căruia îi place să înțeleagă noțiunile matematice și să se joace în același timp. Toate temele prevăzute de programa școlară sunt prezentate și exemplificate în mod corespunzător, cu atenția concentrată spre formarea și dezvoltarea competențelor generale și specifice.

Apreciez concepția de ansamblu a manualului și realizarea grafică deosebită. Unitățile de învățare au o structură standard, unitară, originală. Se pune accentul pe latura practică a tematicii prezentate și pe stimularea interesului elevilor. Modul de formulare a enunțurilor este adecvat; problemele rezolvate sunt redactate îngrijit, iar aplicațiile (organizate la fiecare lecție pe patru grade de dificultate) sunt semnificative și variate.

Profesorii de matematică vor găsi în acest manual resurse bogate pentru organizarea lecțiilor.

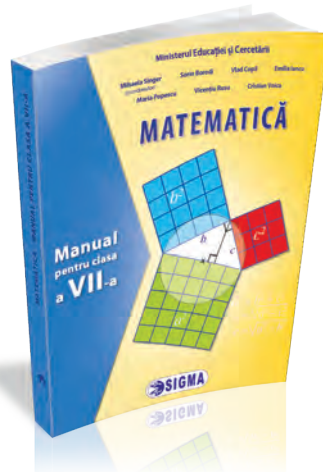
Desigur, cei mai buni judecători ai manualului vor fi elevii!

Conf. univ. dr. Eugen Păltănea



Cum lucrezi cu manualul?

Manualul este împărțit în nouă unități de învățare. Fiecare unitate de învățare cuprinde: un proiect, un test de evaluare inițială, teme de predare-învățare (organizate în lecții), probleme recapitulative, sinteze și teste de evaluare finală.



Pagina de început a unei unități de învățare conține: titlul unității, descrierea unui proiect și indicații pentru realizarea acestuia.

Situația-problemă reprezintă o aplicație practică a lecției.

Unitatea de învățare 4: Lungimi, perimetre, arii **Etapele proiectului**

Proiect: Pavaje colorate

Plan de lucru

- ✓ **Materiale necesare:** coli de hârtie, fișă, creioane colorate
- ✓ **Scopi:** Veți realiza acoperiri interesante ale suprafețelor și veți calcula arii.

Realizarea proiectului

Lucrăm în echipă: ale căreia? pentru toate celelalte!

- ✓ Realizați acoperiri interesante ale planului, folosind pătrunche colorate. Mai jos este dat un model. Puneți-vă imaginația la încercare și creați compoziții elastice.
- ✓ Atașați o fișă cu probleme propuse și probleme rezolvate despre configurațiile pe care le-ați realizat.
- ✓ Căutați problemele marcate cu **☆**. Pentru fiecare dintre acestea:
 - Rezolvați problema;
 - Completați rezolvarea adăugând desene sugestive legate de tematica problemei;
 - Modificați problema, astfel încât să scrieți noi probleme pornind de la cea dată;
 - La sfârșit, asamblați pe un poster al echipei toate materialele realizate.

Pentru început:

- ✓ Copiați pe căștele voastre imaginile alăturată (observând cu atenție modul în care a fost realizat desenul).
- ✓ Câte hexagoane sunt în figură? Dar triunghiuri? Dar paralelograme formate din două triunghiuri?
- ✓ Calculați aria totală a figurii alăturată, știind că aria unui triunghi echilateral cu latura este $2\sqrt{3} \text{ mm}^2$.

Interacțiune

În echipa voastră:

- ✓ Discutați etapele proiectului și împărțiți sarcinile în cadrul echipei.
- ✓ În echipă, fiecare rezolvă propria sarcină, dar colaborează și cu ceilalți pentru a obține la final un produs foarte bun al întregii echipe.
- ✓ Discutați și stabiliți forma finală a posterului pe care aplicați toate materialele realizate.

Prezentare

În sala de clasă:

- ✓ Expuneți posterele realizate.
- ✓ Fiecare echipă va evalua posterele celorlalte echipe.
 - Alegeți prin vot posterul care va plăcut cel mai mult.
 - Atenție! Nicio echipă nu votează propriul poster.
- ✓ Stabiliți clasamentul final, totalizând punctele acordate de fiecare echipă.

Lecția 3 Aria triunghiului **Obiectivul lecției**

O situație-problemă

Sâmbătă mami serbez ziua de naștere. Uite cum am să-mi împodobesc baftista pentru a se asorta cu costumul meu cel nou.

De ce de ce trebuie împăturită? Că în buzunar nu se vede!

Uite de ce:

Vrem să știm! **aria triunghiului?**

Demonstrăm!

Aria unui triunghi cu o latură de lungime a și înălțimea corespunzătoare h este $A = \frac{ah}{2}$.

Ipoteză: ABC triunghi, $BC = a, AE \perp BC, E \in BC, AE = h$

Demonstrăm: Construim paralelogramul $ABCD$. Atunci $\Delta ABC = \Delta CDA$ și $A_{ABC} = A_{CDA}$. Deoarece $a \cdot h = A_{ABCD} = 2 \cdot A_{ABC}$, rezultă că: $A_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h$.

Extindem ...

În triunghiul dreptunghic, catetele sunt înălțimi.

prin urmare: $A_{ABC} = \frac{1}{2} c_1 \cdot c_2 = \frac{1}{2} a \cdot b$.

Deci $h = \frac{c_1 \cdot c_2}{a}$

Exprimare orală **și folosiți pentru a calcula aria triunghiului și explicați rezultatul.**

Evaluăm nivelul de bază!

1. Calculați aria unui triunghi cu baza de 5 cm și înălțimea de 4 cm.
2. Triunghiul ABC este echilateral și are latura de $\sqrt{5}$ cm. Calculați aria triunghiului ABC .

Problemă rezolvată

Fie triunghiul ABC , cu $AB = 45 \text{ mm}$, $BC = 4 \text{ cm}$. Știind că lungimea înălțimii (CD) este de 22 mm, calculați lungimea înălțimii AE a triunghiului ABC .

Rezolvare:

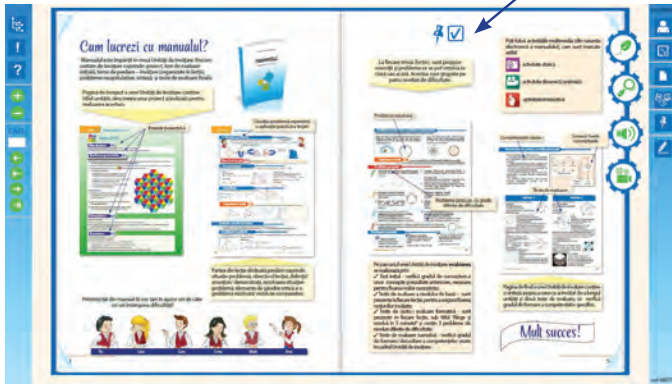
$$A_{ABC} = \frac{AB \cdot CD}{2} = \frac{45 \cdot 22}{2} = 495 \text{ mm}^2$$

$$A_{ABC} = \frac{BC \cdot AE}{2} = \frac{40 \text{ mm} \cdot AE}{2} = 495 \text{ mm}^2 \Rightarrow AE = \frac{2 \cdot 495}{40} \text{ mm} = 24,75 \text{ mm}$$




Prieteni tăi din manual îți vor sări în ajutor ori de câte ori vei întâmpina dificultăți!

Partea din lecție dedicată predării cuprinde: situație-problemă, obiectivul lecției, definiții/enunțuri/ demonstrații, rezolvarea situației-problemă, elemente de gândire critică și o problemă rezolvată/ rezolvări comparative.





Activitățile multimedia din varianta electronică a manualului sunt marcate astfel:

-  - activitate statică
-  - activitate dinamică (animată)
-  - activitate interactivă

La fiecare temă (lecție), sunt propuse exerciții și probleme ce se pot rezolva în clasă sau acasă. Acestea sunt grupate pe patru niveluri de dificultate.

Problemă rezolvată / Rezolvări comparative

Rezolvări comparative

Exprimare orală

Probleme propuse

Problemă rezolvată

101

Sinteză/ hartă conceptuală

Competențele vizate

Rezolv teste pentru a verifica dacă pot

Teste de evaluare

TESTUL 1

TESTUL 2

109

Pe parcursul unei Unități de învățare, **evaluarea** se realizează prin:

- ✓ Test inițial - verifică gradul de cunoaștere a unor concepte și rezultate anterioare, necesare pentru fixarea noilor cunoștințe;
- ✓ Teste de evaluare a nivelului de bază – sunt prezente la fiecare lecție, pentru a asigura fixarea noțiunilor învățate;
- ✓ Teste de (auto-) evaluare formativă - sunt prezente în fiecare lecție, sub titlul "Alege și rezolvă în 5 minute!" și conțin 3 probleme de niveluri diferite de dificultate;
- ✓ Teste de evaluare sumativă - verifică gradul de formare/ dezvoltare a competențelor vizate în cadrul unității de învățare.

Pagina de final a unei Unități de învățare conține o sinteză asupra a ceea ce ai învățat de-a lungul unității și două teste de evaluare, ce verifică gradul de formare a competențelor specifice.

Mult succes!

Cuprins

Unitatea 1 Numere și operații aritmetice	8
Proiect: <i>Algebră și geometrie pe rețeaua cu pătrățele</i> . Test inițial	8
Numere naturale; numere raționale; descompuneri	10
Ordinea efectuării operațiilor cu numere raționale. Operații inverse	12
Rădăcina pătrată dintr-un număr pătrat perfect	14
Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr	16
Recapitulăm prin probleme. Test final	18
Unitatea de învățare 2: Patrulaterul	20
Proiect: <i>Paralelism și covorașe</i> . Test inițial	20
Poligoane	22
Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex	24
Paralelogramul. Definiție și proprietăți	26
Condiții ca un patrulater să fie paralelogram	30
Paralelograme particulare: dreptunghi, romb, pătrat; proprietățile lor	34
Trapezul. Trapeze particulare	38
Linia mijlocie în triunghi. Linia mijlocie în trapez	42
Recapitulăm prin probleme. Test final	46
Unitatea de învățare 3: Mulțimea numerelor reale	48
Proiect: <i>Spirala radicalilor</i> . Test inițial	48
Numere raționale, numere iraționale	50
Mulțimea numerelor reale	52
Aproximări ale numerelor reale	55
Reguli de calcul cu radicali	58
Adunarea și scăderea numerelor reale	61
Înmulțirea numerelor reale; media geometrică	64
Rapoarte de numere reale; media aritmetică	67
Puteri cu exponent întreg de numere reale	70
Ordinea efectuării operațiilor	72
Recapitulăm prin probleme. Test final	74
Unitatea de învățare 4: Lungimi, perimetre, arii	76
Proiect: <i>Pavaje colorate</i> . Test inițial	76
Calculul lungimilor unor segmente; perimetrul unui poligon	78
Aria paralelogramului; aria rombului	80
Aria triunghiului	82
Aria trapezului	84
Recapitulăm prin probleme. Test final	86

Competențe generale Competențe specifice

● C.G. 1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice în contextul în care acestea apar

Identificarea numerelor aparținând diferitelor submulțimi ale lui \mathbb{R} . Identificarea unei situații date rezolvabile prin ecuații sau sisteme de ecuații liniare. Identificarea unor informații din tabele, grafice și diagrame. Identificarea patrulelor particulare în configurații geometrice date. Identificarea elementelor cercului și/sau poligoanelor regulate în configurații geometrice date. Identificarea triunghiurilor asemenea în configurații geometrice date. Recunoașterea elementelor unui triunghi dreptunghic într-o configurație geometrică dată

● C.G. 2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural cuprinse în diverse surse informaționale

Aplicarea regulilor de calcul pentru estimarea și aproximarea numerelor reale. Utilizarea regulilor de calcul cu numere reale pentru verificarea soluțiilor unor ecuații sau sisteme de ecuații liniare. Prelucrarea unor date sub formă de tabele, grafice sau diagrame în vederea înregistrării, reprezentării și prezentării acestora. Descrierea patrulelor utilizând definiții și proprietăți ale acestora, în configurații geometrice date. Descrierea proprietăților cercului și ale poligoanelor regulate înscrise într-un cerc. Stabilirea relației de asemănare între triunghiuri. Aplicarea relațiilor metrice într-un triunghi dreptunghic pentru determinarea unor elemente ale acestuia

● C.G. 3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

Utilizarea unor algoritmi și a proprietăților operațiilor în efectuarea unor calcule cu numere reale. Utilizarea transformărilor echivalente în rezolvarea unor ecuații și sisteme de ecuații liniare. Alegerea metodei adecvate de reprezentare a problemelor în care intervin dependențe funcționale și reprezentări ale acestora. Utilizarea proprietăților patrulelor în rezolvarea unor probleme. Utilizarea proprietăților cercului în rezolvarea de probleme. Utilizarea asemănării triunghiurilor în configurații geometrice date pentru determinarea de lungimi, măsuri și arii. Deducerea relațiilor metrice într-un triunghi dreptunghic

● **C.G. 4. Explicarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată**

Folosirea terminologiei aferente noțiunii de număr real (semn, modul, opus, invers). Redactarea rezolvării ecuațiilor și sistemelor de ecuații liniare. Descrierea în limbajul specific matematicii a unor elemente de organizare a datelor. Explicarea în limbaj geometric a noțiunilor legate de patrulater. Explicarea proprietăților cercului și ale poligoanelor în limbaj matematic. Explicarea în limbaj matematic a proprietăților unor figuri geometrice folosind asemănarea. Explicarea în limbaj matematic a relațiilor dintre elementele unui triunghi dreptunghic

● **C.G. 5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date**

Elaborarea de strategii pentru rezolvarea unor probleme cu numere reale. Stabilirea unor metode de rezolvare a ecuațiilor sau a sistemelor de ecuații liniare. Analizarea unor situații practice prin elemente de organizare a datelor. Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea optimizării calculării unor lungimi de segmente, a unor măsuri de unghiuri și a unor arii. Interpretarea unor proprietăți ale cercului și ale poligoanelor regulate folosind reprezentări geometrice. Interpretarea asemănării triunghiurilor în configurații geometrice. Interpretarea unor relații metrice între elementele unui triunghi dreptunghic.

● **C.G. 6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii**

Modelarea matematică a unor situații practice care implică operații cu numere reale. Transpunerea matematică a unor situații date, utilizând ecuații și/sau sisteme de ecuații liniare. Transpunerea unei situații date într-o reprezentare adecvată (text, formulă, diagramă, grafic). Modelarea unor situații date prin reprezentări geometrice cu patrulater. Modelarea matematică a unor situații practice în care intervin poligoane regulate sau cercuri. Implementarea unei strategii pentru rezolvarea unor situații date, utilizând asemănarea triunghiurilor. Implementarea unei strategii pentru rezolvarea unor situații date, utilizând relații metrice în triunghiul dreptunghic.

Unitatea de învățare 5: Cercul	88
Proiect: <i>Geometria fulgilor de nea</i> . Test inițial	88
Cercul; elemente ale cercului	90
Unghi la centru. Unghi înscris în cerc. Măsuri de unghiuri	92
Coarde congruente și arce congruente în cerc	95
Distanța de la centrul cercului la o coardă	98
Poligoane regulate înscrise în cerc	100
Tangente la cerc	102
Lungimea cercului; aria discului	105
Recapitulăm prin probleme. Test final	108
Unitatea de învățare 6: Asemănarea triunghiurilor	110
Proiect: <i>Arta fotografiei</i> . Test inițial	110
Segmente proporționale	112
Paralele echidistante. Aplicații	114
Teorema lui Thales. Reciproca teoremei lui Thales	116
Triunghiuri asemenea	120
Teorema fundamentală a asemănării	122
Criterii de asemănare a triunghiurilor: L.L.L.	126
Criterii de asemănare a triunghiurilor: L.U.L.	128
Criterii de asemănare a triunghiurilor: U.U.	130
Perimetre și arii în triunghiuri asemenea	132
Recapitulăm prin probleme. Test final	134
Unitatea de învățare 7: Ecuații și sisteme de ecuații	136
Proiect: <i>Un traseu cu probleme</i> . Test inițial	136
Transformări echivalente; identități	138
Ecuații de forma $ax + b = 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$	140
Sisteme de ecuații liniare cu două necunoscute. Metoda reducerii	142
Sisteme de ecuații liniare cu două necunoscute. Metoda substituției	144
Probleme care se rezolvă prin ecuații sau sisteme	146
Recapitulăm prin probleme. Test final	148
Unitatea de învățare 8: Relații metrice în triunghiul dreptunghic	150
Proiect: <i>Jocuri cu pătrate și triunghiuri</i> . Test inițial	150
Segmente proporționale în triunghiul dreptunghic	152
Teorema lui Pitagora și reciproca teoremei lui Pitagora; aplicații	155
Rapoarte constante în triunghiul dreptunghic	158
Rezolvarea triunghiului dreptunghic	162
Relații metrice în poligoane regulate	164
Aproximarea distanțelor, în situații practice, folosind relații metrice	167
Recapitulăm prin probleme. Test final	170
Unitatea de învățare 9: Organizarea datelor	172
Proiect: <i>Un prânz sănătos</i> . Test inițial	172
Produsul cartezian a două mulțimi nevide	174
Sisteme de axe ortogonale	176
Distanța dintre două puncte din plan	178
Tabele, diagrame și grafice; poligonul frecvențelor	180
Recapitulăm prin probleme. Test final	184
Probleme recapitulative	186
Răspunsuri	190




Algebră și geometrie pe rețeaua cu pătrățele

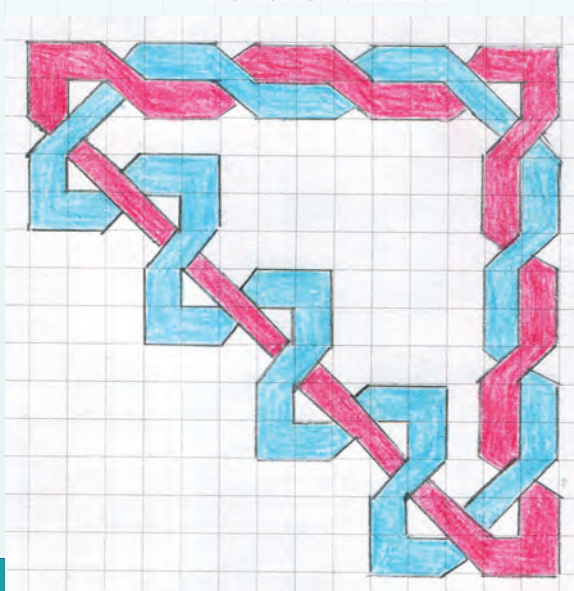
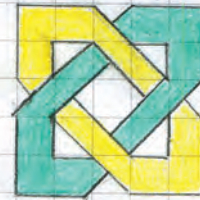
Plan de lucru

- ✓ **Materiale necesare:** coli dintr-un caiet de matematică, riglă, creioane colorate.
- ✓ **Scop:** Veți realiza desene interesante trasând segmente de lungimi date și veți determina lungimile unor segmente.

Realizarea proiectului

Lucrați în echipe de câte trei, patru sau cinci colegi!

- ✓ Realizați, pe hârtie cu pătrățele, folosind creioane colorate, modele asemănătoare celor alăturate, compuse din „împletituri”.
 - ✓ Atașați o fișă cu exerciții, în care:
 - exprimați lungimea fiecărui „lanț” (linie frântă închisă) din modelele realizate;
 - aproximați convenabil această lungime;
 - explicați modul în care ați realizat calculele.
 - ✓ Valoriificați în proiectul vostru exercițiile notate cu . Acolo veți avea de calculat lungimile unor segmente prin noi metode învățate. Folosiți în modelele voastre segmente care au lungimea obținută în aceste exerciții.
 - ✓ Reuniți toate materialele realizate într-un poster.
- Pentru început:**
- ✓ Copiați pe caiete imaginea alăturată (observând cu atenție modul în care a fost realizat desenul).
 - ✓ Calculați lungimea totală a segmentelor orizontale și verticale care mărginesc „lanțul” de culoare roșie.



Interacțiune

În cadrul echipei:

- ✓ Discutați etapele proiectului și împărțiți sarcinile între membri.
- ✓ Fiecare rezolvă propria sarcină, dar colaborează și cu ceilalți pentru a obține la final un produs foarte bun al întregii echipe.
- ✓ Discutați și stabiliți forma finală a posterului pe care aplicați toate materialele realizate.

Prezentare

Lucrați cu toată clasa!

- ✓ Expuneți posterele realizate.
- ✓ Fiecare echipă va evalua posterele celorlalte echipe.
 - Alegeți prin vot posterul care v-a plăcut cel mai mult.
 - Atenție! Nicio echipă nu votează propriul poster.
- ✓ Stabiliți clasamentul final, totalizând punctele propuse de fiecare echipă.

Rezolvând exercițiile următoare, îți vei aminti noțiuni și rezultate necesare pentru parcurgerea acestei Unități de învățare. Fiecare problemă propusă valorează 1 punct. Se acordă 1 punct din oficiu.

I. Scrie pe foaia de rezolvare cuvintele sau rezultatele care, înscrise în spațiile punctate, formează enunțuri adevărate.

Unități de măsură; transformări

1. Completează pe caietul tău răspunsurile corecte!
 a) $3,4 \text{ m} = \dots \text{ cm}$; b) $250 \text{ dm}^2 = \dots \text{ m}^2$.

Operații cu numere raționale

2. Calculează:
 a) $1,2 + 3,56 = \dots$; b) $2,4 \times 0,6 = \dots$; c) $8,25 : 1,5$; d) $\frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \dots$;
 e) $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4}$; f) $\frac{2}{5} : \frac{3}{10}$; g) $3009 - 109 = \dots$; h) $5 \cdot (-7) = \dots$.

Numere prime

3. Valoarea de adevăr a enunțului „Toate numerele din lista următoare sunt numere prime: 13; 23; 43; 53; 73; 83.” este ...

II. Scrie pe foaia de rezolvare litera corespunzătoare răspunsului corect pentru următoarele exerciții:

Compararea numerelor raționale

4. Cel mai mare dintre numerele $-3,45$; $2,2(32)$; 1 ; -12 ; $2,233$ este:
 A. -12 ; B. $2,233$; C. $2,2(32)$; D. $-3,45$.

Divizibilitate

5. Cifra unităților scrisă în locul marcat cu \square , pentru ca numărul $\overline{402\square}$ să devină divizibil cu 9 este:
 A. 10; B. 9; C. 8; D. 3.

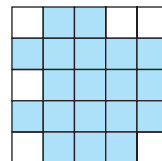
Metode de rezolvare a problemelor

6. Geo a ales un număr. După ce l-a înmulțit cu 3 și a adunat rezultatul cu 5, a obținut 13,16. Numărul ales de Geo este:
 A. 2,64; B. 3,72; C. 2,72; D. 6,02.

III. Scrie pe foaia de rezolvare soluțiile complete ale exercițiilor următoare:

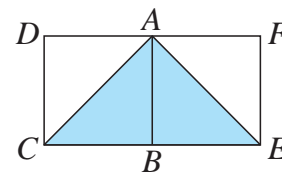
Arii

7. Calculează aria figurii colorate din imagine, folosind ca unitate de măsură pătrățelele din rețea. Procedeează în două moduri:
 a) află din câte pătrățele este formată figura;
 b) numără câte pătrățele sunt în afara figurii.



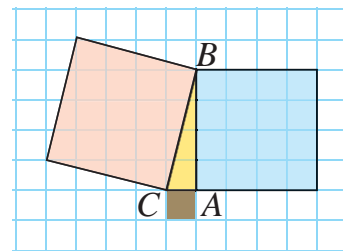
Proprietăți ale triunghiurilor

8. În figura alăturată, $ABCD$ și $ABEF$ sunt pătrate.
 a) Arată că triunghiurile ABC și ADC sunt congruente.
 b) Demonstrează că triunghiul ACE este triunghi dreptunghic isoscel.



Teorema lui Pitagora

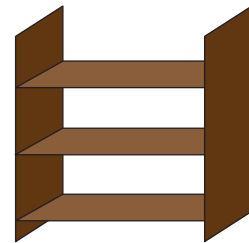
9. Pe o foaie cu pătrățele a fost desenat triunghiul dreptunghic ABC și câte un pătrat pe fiecare dintre laturile acestuia, ca în figura alăturată.
 a) Calculează ariile pătratelor desenate pe catetele AB și AC , știind că pătrățelele au latura de 0,5 cm.
 b) Calculează aria pătratului desenat pe ipotenuza BC .
 c) Scrie relația dintre ariile calculate la a) și cea calculată la b).



Dacă ai obținut mai puțin de jumătate din punctaj la acest test, este util să revezi definițiile și proprietățile conceptelor menționate mai sus, pentru a înțelege mai bine ceea ce urmează.

O situație-problemă

Matei are cărți cu grosimi diferite: 1,8 cm sau 2,5 cm sau 2 cm. El vrea să construiască un raft cu trei polițe astfel încât pe fiecare poliță să așeze cărți de aceeași grosime. Care este cea mai mică lungime a raftului dacă fiecare poliță va fi umplută cu cărți? Câte cărți de fiecare grosime încap pe o poliță a raftului?



Rezolvare:

Cărțile au grosimi, exprimate în milimetri, de: 18, 25 și 20. Lungimea raftului trebuie să fie un multiplu comun al acestor numere. Cel mai mic multiplu comun este $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 900$.

Așadar, lungimea raftului este de 900 mm = 90 cm.

Numărul cărților de fiecare fel de pe raft:

$$900 : 18 = 50 \text{ (cărți cu grosimea de 1,8 cm)}$$

$$900 : 25 = 36 \text{ (cărți cu grosimea de 2,5 cm)}$$

$$900 : 20 = 45 \text{ (cărți cu grosimea de 2 cm)}$$



Am adus problema la numere întregi ...

... ca să folosim divizibilitatea!



Vrem să știm!

Ce moduri de scriere ale unui număr rațional sunt utile în rezolvarea problemelor?

Ne amintim ...

- Numerele naturale sau zecimale se reprezintă în baza 10 utilizând cifrele 0, 1, ..., 9.

Exemplu: În scrierea numărului 325,78, cifra 2 indică numărul zecilor, iar cifra 8 indică numărul sutimilor.

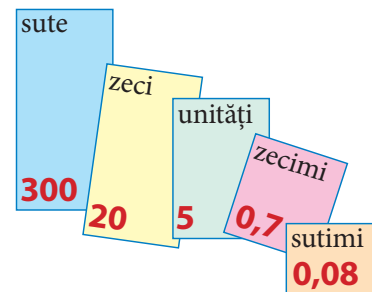
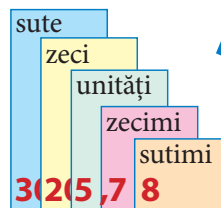
Numărul 325,78 trebuie înțeles ca:

$$325,78 = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2},$$

unde $10^{-1} = \frac{1}{10}$ și $10^{-2} = \frac{1}{100}$.

Suma de mai sus se numește scrierea numărului 325,78 în baza 10. Scrierea în baza 10 a unui număr indică descompunerea acestuia ca o **sumă** de puteri ale lui 10.

Exemplu: $20015,038 = 2 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3} =$
 $= 20000 + 10 + 5 + 0,03 + 0,008$



- Orice număr natural se poate scrie ca **produs** de numere prime.

Exemple: $234 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 13 = 2 \cdot 3^2 \cdot 13$

$$468 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 13 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 13$$

$$3072 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^{10} \cdot 3$$

234	2
117	3
39	3
13	13
1	

- Numerele raționale se pot scrie în două forme echivalente: cu ajutorul virgulei (reprezentare zecimală) sau cu ajutorul liniei de fracție (reprezentare fracționară).

Exemple:

– Frațiile zecimale finite: $0,7 = \frac{7}{10}$, $2,75 = 2 + \frac{75}{100} = \frac{275}{100} = \frac{11}{4}$

– Frațiile zecimale periodice simple: $0,(1) = \frac{1}{9}$, $1,(34) = 1\frac{34}{99} = \frac{134}{99}$ sau $1,(34) = \frac{134-1}{99} = \frac{133}{99}$

– Frațiile zecimale periodice mixte: $0,4(1) = \frac{41-4}{90} = \frac{37}{90}$, $2,3(16) = 2\frac{316-3}{990} = 2\frac{313}{990} = \frac{2293}{990}$.

Exprimare orală

Reformulează regula de transformare pentru fiecare caz în parte.

Problemă rezolvată / Rezolvări comparative

Află câți divizori naturali are numărul 24.

Geo, Ana și Liza au rezolvat problema în moduri diferite.

Geo:

Am scris numerele de la 1 la 24 și am subliniat divizorii lui 24.

1 2 3 4 5 6 7 8 9
10 11 12 13 14 15
16 17 18 19 20 21
22 23 24.

Deci, 24 are 8 divizori.

Ana:

Am căutat cei mai mici divizori ai numărului 24 și i-am asociat cu câțul împărțirii lui 24 la fiecare dintre acești divizori:

1 și 24; 2 și 12;

3 și 8; 4 și 6.

În concluzie, 24 are 8 divizori.

Liza:

Am folosit descompunerea în factori:
 $24 = 2^3 \cdot 3$.

Un divizor al lui 24 este de forma:
 $2^a \cdot 3^b$, unde $a \in \{0, 1, 2, 3\}$, $b \in \{0, 1\}$.

Pentru că a poate lua 4 valori și b poate lua 2 valori,

numărul $2^a \cdot 3^b$ poate lua 8 valori.

De aceea, 24 are 8 divizori.

Exprimare orală

Care rezolvare ți se pare mai rapidă? Dar mai interesantă? Justifică răspunsurile!

Probleme propuse

1. Scrie toate numerele naturale de la 10 la 30 și subliniază numerele prime.

2. Scoate întregii din fracțiile: $\frac{15}{7}$; $\frac{20}{3}$; $\frac{31}{5}$.

4. Încadrează fiecare dintre numerele $\frac{24}{7}$; $\frac{42}{5}$; $-5,23$; $13,85$ între doi întregi consecutivi.

Exemplu: $-4 < -3,86 < -3$.

5. Descompune ca produs de factori primi numerele: 63; 630; 6300.

7. Mati a descompus numărul 1050 ca produs de factori primi și a obținut egalitatea:

$$1050 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

Folosește rezultatul lui Mati și descompune în factori primi: 10500; 2100; 3150.

8. Descompunem numărul 3,45 astfel:

$$3,45 = 3 + 0,45.$$

În această scriere, 3 este *partea întregă*, iar 0,45 este *partea fracționară* a numărului 3,45. Procedează la fel pentru a descompune numerele $\frac{15}{4}$; $\frac{39}{26}$.

3. a) Scrie în formă zecimală numerele raționale: $\frac{5}{4}$; $\frac{14}{3}$; $\frac{23}{12}$

b) Scrie în formă fracționară numerele raționale: 2,35; 4,(6); 1,2(4).

6. Scrie numerele din lista de mai jos ca sumă de puteri ale lui 10, conform exemplului următor. 2853; 308; 41,5; 28,06; 3,619; 43,28.

Exemplu: $375 = 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 5$;

$42,96 = 4 \cdot 10 + 2 + 9 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2}$.

9. Află numărul de divizori naturali ai lui 180.

10. Ema poate ghici o cifră, fără să cunoască numerele folosite în operații! Iată un exemplu!

Ema: – Scrie un număr natural fără să mi-l arăți!

Dan: – (A scris 2195)

Ema: – Schimbă ordinea cifrelor!

Dan: – (A scris 9512)

Ema: – Scade numerele, șterge o cifră din rezultat și spune-mi numărul obținut!

Dan: – 737!

Ema: – Ai șters cifra 1!

Cum a aflat Ema cifra ștearsă de Dan?

11. a) Este cunoscut faptul că orice număr natural se poate scrie ca o sumă de puteri diferite ale lui 2. Scrie în acest fel fiecare dintre numerele 18, 25 și 47.

b) Este adevărat faptul că orice număr natural se poate scrie ca o sumă de puteri diferite ale lui 3?

Alege și rezolvă în 5 minute!

A Descompune ca produs de factori primi numărul 50.

B Încadrează numărul $\frac{402}{5}$ între doi întregi consecutivi.

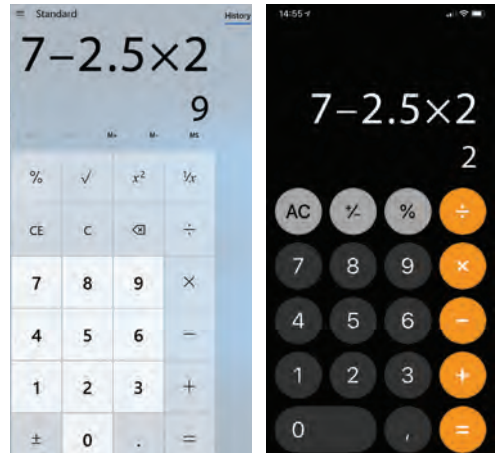
C Află toate numerele naturale de forma $\overline{2a7b}$ divizibile cu 90.

O situație-problemă

Geo a folosit un laptop și Ema calculatorul de pe telefonul mobil, pentru a efectua câteva operații aritmetice. Ei au apăsat tastele indicate în continuare:



Deși au apăsat aceleași taste, în aceeași ordine, Geo și Ema au obținut, la final, rezultate diferite: 9, respectiv 2. Au greșit elevii ceva? Este defect laptopul sau telefonul mobil?



Numerele introduse de la tastatură sunt 7; 2,5 și 2...

...iar operațiile efectuate sunt scădere și înmulțire.



Vrem să știm!

Care este ordinea corectă de efectuare a operațiilor aritmetice? Ce legături există între operații?

Rezolvăm situația-problemă!

Calculatorul de pe telefon era setat pe modul științific, iar celălalt calculator a efectuat, de fapt $7 - 2,5 \cdot 2$ și nu $(7 - 2,5) \cdot 2$.



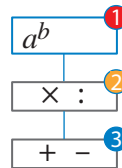
Parantezele schimbă prioritatea în calcul!

Ne amintim ...

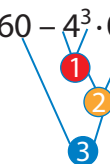
Reguli de prioritate în calcul

Se efectuează, în ordine:

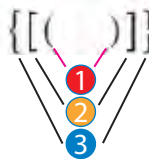
- 1 ridicările la putere,
- 2 înmulțirile sau împărțirile,
- 3 adunările sau scăderile.



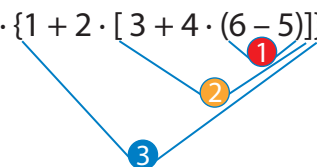
$$60 - 4^3 \cdot 0,5 = 60 - 64 \cdot 0,5 = 60 - 32 = 28$$



- 1 operațiile din parantezele rotunde,
- 2 cele din parantezele drepte,
- 3 cele din acolade.



$$7 + 2 \cdot \{1 + 2 \cdot [3 + 4 \cdot (6 - 5)]\} = 37$$



Legături între operațiile aritmetrice

Adunarea și scăderea sunt operații inverse una celeilalte.

Exemplu:

$$2,4 \xrightarrow{+1,3} 3,7 \xrightarrow{-1,3} 2,4$$

$$\frac{1}{2} \xrightarrow{-\frac{2}{3}} -\frac{1}{6} \xrightarrow{+\frac{2}{3}} \frac{1}{2}$$

Înmulțirea și împărțirea (cu factori nenuli) sunt operații inverse una celeilalte.

Exemplu:

$$5,2 \xrightarrow{\times 1,5} 7,8 \xrightarrow{:1,5} 5,2$$

$$\frac{2}{5} \xrightarrow{:\frac{2}{3}} \frac{3}{5} \xrightarrow{\times \frac{2}{3}} \frac{2}{5}$$

Observă fiecare dintre schemele de mai sus. Gândește-te și explică funcționarea fiecăreia.

Gândim critic și constructiv!

Problemă rezolvată / Rezolvări comparative

Pe calculatorul său de buzunar, Geo a scris un număr, apoi a efectuat mai multe operații, descrise în schema alăturată.



Colegii lui Geo au încercat să afle numărul cu care a început Geo calculele. Iată rezolvările lor:

Tic: Am efectuat operațiile în ordine inversă!



Ana: Am folosit o ecuație.

Am notat cu x numărul inițial. Avem:

$$\begin{aligned} (x + 3,5) \cdot 0,4 &= 1,88 \\ x + 3,5 &= 1,88 : 0,4 \\ x &= 4,7 - 3,5 \\ x &= 1,2 \end{aligned}$$

Exprimare orală

De ce crezi că a utilizat Ana paranteze pentru a scrie ecuația asociată problemei? Care rezolvare îți se pare mai interesantă? De ce?

Probleme propuse

1. Efectuează:

- a) $1,4 - 4,58$; $0,5 \cdot 1,3$; $2,96 : 0,4$;
b) $\frac{4}{5} + \frac{2}{3}$; $\frac{5}{3} - \frac{7}{2}$; $\frac{12}{5} \cdot \frac{15}{16}$; $\frac{-1}{6} : \frac{2}{9}$.

2. Calculează: $1,(2) + 0,3(8)$; $2,7 \cdot 0,(3)$; $5,(4) : 0,(7)$.

3. Alege răspunsul corect! $2,5 + 1,5 \cdot 3 = \dots$
A. 12; B. 6; C. 7; D. 9.



4. Dan și Ema au interpretat schema



astfel: Dan: $(1,5 + 2) \cdot 3 =$

Ema: $1,5 + 2 \cdot 3 =$

Cine are dreptate?

Efectuează calculele în ambele cazuri.

6. Calculează aria unui display în formă de pătrat cu latura de 2,5 dm.



7. Calculează $(1,6 + 4,3)^2$, apoi $1,6^2 + 4,3^2$. Explică de ce se obțin rezultate diferite.

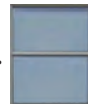


8. Calculează aria și perimetrul figurii verzi știind că latura rețelei este de 0,5 cm.



5. Ce arie are un pătrat cu perimetrul de 7 m?

9. O fereastră dreptunghiulară are lungimea de 2,3 m și lățimea de 1,8 m. Calculează perimetrul și aria ferestrei.



10. Află cel mai mic număr natural, nenul n , pentru care numărul $48 \cdot n$ este pătrat perfect.

12. Arată că numărul $2^{308} \cdot 3^{462}$ este pătrat perfect, dar numărul $2^{491} \cdot 3^{186}$ nu este pătrat perfect.

11. Demonstrează că există 100 de numere naturale consecutive, printre care nu se găsesc pătrate perfecte.

13. În exercițiul: $2 - 2 \cdot 3 + 4 : 5$, folosește o singură dată paranteze, pentru ca rezultatul să devină:
a) pozitiv; b) negativ.

14. Numărul natural P , de n cifre, nu toate egale, are următoarea proprietate: dacă schimbăm într-un anumit mod ordinea cifrelor sale, obținem numărul natural Q cu proprietatea: $P + Q = \underbrace{99 \dots 9}_{n \text{ cifre}}$.

a) Găsește un astfel de număr P pentru $n = 6$.

b) Arată că numărul n de cifre ale lui P este număr par.

Alege și rezolvă în 5 minute!

A

Un triunghi echilateral cu latura de 1,2 m are același perimetru cu al unui pătrat. Cât este aria pătratului?

B

Aria unei table dreptunghiulare este 12 m^2 , iar una dintre laturi măsoară 2,5 m. Află perimetrul dreptunghiului.

C

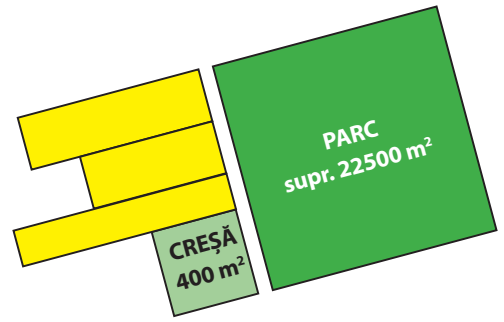
Calculează:
 $1 - (1 - (1 - \dots - (1 - 1) \dots))$
(sunt 100 de paranteze deschise și 100 de paranteze închise).

O situație-problemă

Planul urbanistic zonal prevede construirea în cartierul Anei a unei creșe pe o suprafață de 400 m^2 . Care este lungimea laturii terenului pe care se construiește creșa?



Rezolv prin încercări:
 $10^2 = 100$, iar $20^2 = 400$.
 Deci terenul are latura de 20 m .



Vrem să știm!

Cum aflăm lungimea laturii unui pătrat, atunci când cunoaștem aria acestuia?

Să comparăm!

Prin ce se aseamănă și prin ce se deosebesc problemele următoare?

A. Terenul de sport are formă de pătrat, cu latura de 30 m . Ce arie are terenul de sport?

Rezolvare:
 Notăm cu A aria terenului.
 Atunci: $A = 30^2 = 900$.
 Deci aria terenului este de 900 m^2 .

B. O placă de gresie de formă pătrată are aria de 900 cm^2 . Ce lungime are latura plăcii?

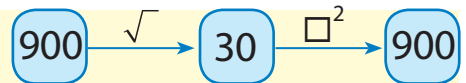
Rezolvare:
 Notăm cu L lungimea laturii plăcii.
 Atunci: $L^2 = 900$; $L^2 = 30^2$; $L = 30$.
 Deci placa de gresie are latura de 30 cm .

Observăm și definim!

Numărul 30 este soluție a ecuației $L^2 = 30^2$, cu necunoscuta L . Aceasta este unica soluție pozitivă a ecuației date. Spunem că 30 este rădăcina pătrată a lui 900 .

Notăm: $\sqrt{900} = 30$	Citim: radical din 900 este egal cu 30 .	Verificăm: $30 \geq 0$ și $30^2 = 900$.
-----------------------------	---	---

Extragerea rădăcinii pătrate este operația inversă ridicării la pătrat.



Rezolvăm situația-problemă!

Planul urbanistic zonal prevede construirea în cartierul Anei și a unui parc pe o suprafață de $22\,500 \text{ m}^2$. Care este lungimea laturii viitorului parc?

Rezolvare:
 Conform definiției de mai sus, lungimea laturii parcului este $\sqrt{22\,500}$. Pentru a afla cât este acest număr, descompunem numărul $22\,500$ în factori primi și evidențiem un pătrat perfect:
 $22\,500 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^4 = (2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^2)^2$. Numărul căutat este $2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^2 = 150$. Verificăm: $150^2 = 22\,500$.

Definiție

Dacă a este număr natural, pătrat perfect, numărul natural n pentru care $a = n^2$ se numește rădăcina pătrată a lui a . Scriem: $n = \sqrt{a}$.

Extindem ...

Se poate calcula rădăcina pătrată a unui număr care nu este număr natural?

$\sqrt{2,25} = ?$

Putem gândi astfel: Un teren de formă pătrată are aria de $2,25 \text{ hm}^2$. Avem $2,25 \text{ hm}^2 = 22\,500 \text{ m}^2$. Latura terenului măsoară $\sqrt{22\,500} = 150$ (metri), adică $1,5 \text{ hm}$. Așadar: $\sqrt{2,25} = 1,5$.

Evaluăm nivelul de bază

- ① Scrie numărul 36 ca un produs de doi factori:
 a) egali;
 b) diferiți.

② $\sqrt{36} = ?$

③ Adevărat sau fals? $\sqrt{64} = 32$.

Problemă rezolvată

Geamul unui tablou de formă pătrată are aria de 49 dm^2 . Ce lungime minimă are șipca din care se confecționează rama tabloului?

Rezolvare:

Calculăm lungimea uneia dintre laturile tabloului: $L = \sqrt{49} = 7 \text{ dm}$.

Lungimea minimă a ramei tabloului este egală cu perimetrul acestuia, adică $4 \cdot 7 \text{ dm} = 28 \text{ dm}$.



- De ce crezi că, în problema de mai sus, se cere lungimea *minimă* a ramei?
- Putem aplica același procedeu pentru a calcula lungimea minimă a ramei unui tablou dreptunghiular când cunoaștem aria acestuia?

**Gândim critic
și constructiv!**

Probleme propuse

1. Calculează:

- a) $28,2 \cdot 2,14$; b) $2,0 \cdot 1,24$; c) $0,13^3$; d) $0,4^5$;
e) $0,1^2$; f) $2,3^2$; g) $1,5^2$; h) $3,2^3$; i) $10,3^3$.

2. Calculează:

- a) $0,5 \cdot \frac{4}{5}$; b) $2\frac{1}{5} \cdot 0,75$; c) $1,25 \cdot 4 \cdot \frac{2}{5}$.

3. Care dintre numerele următoare sunt pătrate perfecte? De ce?

- $2 \cdot 5$; $3^2 \cdot 5^2$; $2^4 \cdot 5^2$; $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^4$; 100^0 ; $(7 \cdot 11)^2$.

4. Calculează: $\sqrt{16}$; $\sqrt{64}$; $\sqrt{144}$; $\sqrt{256}$.

5. Arată că numărul $a = 2^5 \cdot 3^7 \cdot 6^3$ este pătrat perfect, apoi calculează \sqrt{a} .

6. Descompune în factori primi, apoi află rădăcina pătrată a numerelor care sunt pătrate perfecte: 3600; 288; 1250; 1125; 432; 8100; 1764.

7. Care dintre propozițiile următoare sunt adevărate?

- A. $\sqrt{49} = 7$; B. $\sqrt{36} = 18$; C. $\sqrt{25} = -5$; D. $\sqrt{1} = 0$.

8. Calculează:

- a) $5 - 0,5^3$; b) $5^3 - 0,5$; c) $5 + 0,5^3$;
d) $0,5^3 \cdot 5$; e) $5^3 \cdot 0,5$; f) $0,5^3 + 5^3$;
g) $5^3 \cdot 0,5^3$; h) $5^3 - 0,5^3$.

9. Află aria figurii roșii dacă rețeaua are latura de 0,5 cm.



10. O placă de gresie de formă pătrată are latura de 15 cm. Cât este aria plăcii?

11. Perimetrul unui covor de formă pătrată este de 18 m. Ce suprafață acoperă covorul?

12. O grădină de formă pătrată are aria de 1600 ha. Cât este lungimea gardului care înconjoară grădina?

13. Calculează cu două zecimale exacte:

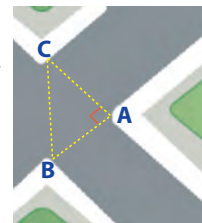
- a) $70 : 19$; b) $15,26 : 13$; c) $57,8 : 9$;
d) $0,45 : 0,7$; e) $0,03 : 0,5$; f) $106,6 : 1,7$.

14. Un dreptunghi are dimensiunile de 12 m și 75 m. Calculează lungimea laturii unui pătrat care are aceeași arie cu acest dreptunghi.

15. Lungimile laturilor unui triunghi sunt 10 m, 10 m și 12 m. Calculează aria triunghiului.

16. Pentru intersecția din imagine se știe că $AB = 12 \text{ m}$, $AC = 16 \text{ m}$, $AB \perp AC$.

Calculează BC .



17. a) Arată că $a \cdot 0,25 = a : 4$;

b) Efectuează cât mai simplu: $120 \cdot 0,25$;
 $0,25 \cdot 3600$; $4,12 \cdot 0,25$; $9,6 \cdot 0,25$.

18. Calculează rădăcina pătrată a numărului: $N = 1 + 2 + 3 + \dots + 288$.

19. a) Arată că, după efectuarea calculelor $44 - 8$ și $4444 - 88$, obținem ca rezultate două pătrate perfecte.

b) Calculează $\sqrt{444444} - 888$.



Alege și rezolvă în 5 minute!

A

Calculează $\sqrt{36}$ și $\sqrt{81}$.

B

Calculează $\sqrt{144}$ și $\sqrt{2500}$.

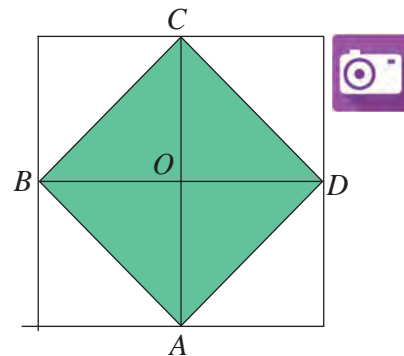
C

Determină cifrele a și b dacă

$$\sqrt{3ab} = 19.$$

O situație-problemă

Tic a desenat figura colorată în verde din imagine, notată $ABCD$, pe un caroiaj de pătrățele cu latura de 1 cm. A îndoit apoi colțurile albe exterioare și a constatat că acestea acoperă perfect figura verde. A ajuns astfel la concluzia că $ABCD$ este un pătrat cu aria de 2 cm^2 . Care este lungimea laturii?



Într-adevăr, $ABCD$ este pătrat, pot demonstra ușor, pentru că triunghiurile dreptunghice isoscele BOC , COD , DOA și AOB sunt congruente. Rezultă că $AB = \sqrt{2} \text{ cm}$.



Dar numărul 2 nu este pătrat perfect! Ce ar putea însemna $\sqrt{2}$? Observ că $\sqrt{2}$ este lungimea segmentului AB , deci $\sqrt{2}$ este și el un număr!



Aș putea să măsoz latura pătratului $ABCD$, dar măsurătoarea este imprecisă! (în mm, în zecimi de mm?)

Vrem să știm!

Cum aproximăm rădăcina pătrată a unui număr care nu este pătrat perfect?

Să analizăm!

În imaginea de mai sus, pătratul $ABCD$ are aria de 2 cm^2 . Despre lungimea laturii AB a acestui pătrat putem afirma:

- $AB > AO$ (ipotenuza unui triunghi este mai mare decât oricare dintre catete), deci $AB > 1 \text{ cm}$;
- $AB < AO + OB$ (o latură a unui triunghi este mai mică decât suma celorlalte două laturi), deci $AB < 2 \text{ cm}$.
Deducem că $\sqrt{2}$ este un număr cuprins între 1 și 2. Avem $1 < \sqrt{2} < 2$.

Definiție

Dacă a este un număr pozitiv, numărul pozitiv b pentru care $a = b^2$ se numește **rădăcina pătrată** a lui a . Scriem: $b = \sqrt{a}$.
Numărul \sqrt{a} este singurul număr pozitiv, al cărui pătrat este egal cu a .

Așadar, $\sqrt{5}$ este numărul pozitiv, al cărui pătrat este egal cu 5.

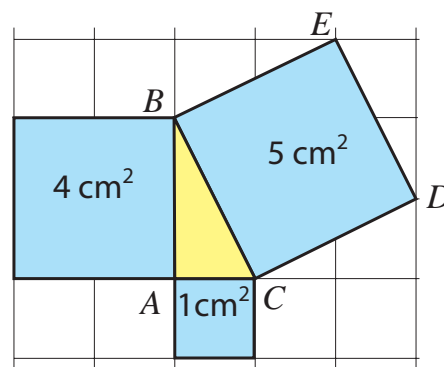


Ne amintim...

Știm că aria pătratului construit pe ipotenuza unui triunghi dreptunghic este egală cu suma ariilor pătratelor construite pe catetele triunghiului.

Pătratul $BCDE$ din figura alăturată are aria de 5 cm^2 ; de aceea, lungimea segmentului BC este $\sqrt{5} \text{ cm}$.

Deoarece $AB < BC < AB + AC$, numărul $\sqrt{5}$ este cuprins între 2 și 3.
 $2 < \sqrt{5} < 3$.



Evaluăm nivelul de bază

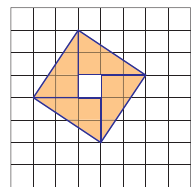
- ① Care este lungimea laturii dacă aria pătratului este: **a)** 25 cm^2 ; **b)** 100 cm^2 ; **c)** 5 cm^2 ; **d)** 17 cm^2 ?
- ② Încadrează $\sqrt{6}$: **a)** între două numere naturale oarecare; **b)** între două numere naturale consecutive.
- ③ Avem $4 + 9 = 13$. Desenează pătrate de arii 4 și 9 pe catetele unui triunghi dreptunghic și încadrează apoi $\sqrt{13}$ între două numere naturale consecutive.

Problemă rezolvată / Rezolvări comparative



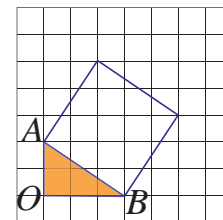
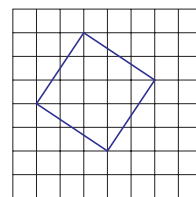
Elevii au avut de calculat lungimea laturii pătratului din dreapta, desenat pe o rețea de pătrățele cu latura de 1 cm. Iată două dintre rezolvările lor.

Tic: Calculez mai întâi aria pătratului, prin descompunerea acestuia în părți componente. Dacă rearanjăm cele 4 triunghiuri dreptunghice colorate pe figură, obținem un dreptunghi cu aria de 12 cm^2 . La mijloc, mai apare un pătrat cu latura de 1 cm.



Aria pătratului dat este 13 cm^2 . De aceea, lungimea laturii sale este $\sqrt{13} \text{ cm}$.

Liza: Conform teoremei lui Pitagora, în triunghiul dreptunghic AOB avem:
 $AB^2 = AO^2 + OB^2$,
 $AO = 2 \text{ cm}$ și $OB = 3 \text{ cm}$.
 Deci: $AB^2 = 2^2 + 3^2$
 $AB^2 = 13$.
 Rezultă $AB = \sqrt{13} \text{ cm}$.



- Ce alte triunghiuri dreptunghice ar fi putut folosi Liza pentru a calcula latura pătratului?
- Încadrează pătratul inițial într-un pătrat mai mare, ale cărui laturi sunt orizontale sau verticale. Folosește această figură pentru a calcula aria, apoi latura pătratului.

Gândim critic și constructiv!

Probleme propuse

1. Care dintre următoarele afirmații sunt corecte?

a) $\sqrt{6} = 3$; b) $\sqrt{25} = 5$; c) $\sqrt{3} \geq 1$; d) $\sqrt{7} \leq 2$.

2. Alege răspunsul corect! $(\sqrt{6})^2 =$

A. 36; B. 3; C. 12; D. 6; E. $\sqrt{6}$.

4. Află latura unei etichete pătrate care are aceeași arie ca a unei etichete dreptunghiulare cu laturile de 6 cm și de 2 cm.

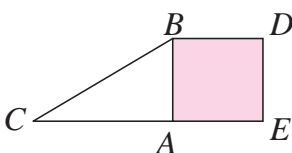
5. Cât este aria pătratului cu latura de $\sqrt{7} \text{ cm}$?

7. Pe cateta AB a triunghiului dreptunghic din imagine a fost construit pătratul $ABDE$.

Dacă $AC = 3 \text{ cm}$ și

$BC = 4 \text{ cm}$, calculează:

- aria pătratului $ABDE$;
- lungimea segmentului BD .



3. Aproximează la un număr întreg de milimetri perimetrul figurii albastre, știind că latura rețelei are 5 mm.

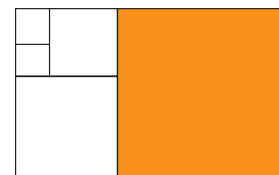


6. Pe caietul de matematică (în care pătrățelele au latura de 5 mm) construiește un pătrat cu aria de: a) 9 cm^2 ; b) 8 cm^2 ; c) 10 cm^2 . Care dintre aceste pătrate are latura mai mare? De ce?

8. Dan stă exact în centrul unei curți pătrate cu aria de 18 ari. La câți metri de fiecare colț al curții se află Dan?

9. Ana a luat trei foi pătrate de carton și le-a tăiat în mai multe piese ce formează, prin alăturare, un puzzle de formă pătrată. Foile inițiale au laturile de 4 dm, 6 dm și 9 dm. Cât de mare este latura jocului de puzzle confecționat de Ana?

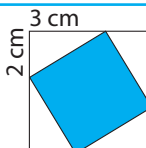
10. Figura din imaginea alăturată a fost obținută din 5 pătrate, așezate după o anumită regulă. a) Calculează lungimea laturilor fiecărui pătrat din imagine, știind că aria pătratului colorat pe figură este de 50 cm^2 . b) Copiază acest desen pe caietul tău și continuă figura, adăugând un nou pătrat, după aceeași regulă. Cât este lungimea laturii pătratului desenat de tine?



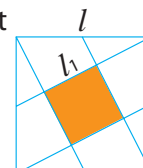
Alege și rezolvă în 5 minute!

A Scrie pe caietul tău toate numerele din lista de mai jos, cuprinse între 4 și 5: $3,45$; $4,5$; $\sqrt{7}$; $4,(5)$; $\sqrt{18}$; $-4,5$; $\sqrt{20,25}$.

B Calculează lungimea laturii pătratului colorat pe figura alăturată.



C Vârfurile unui pătrat cu $l = 10 \text{ cm}$ sunt unite cu mijloacele laturilor opuse. Calculează l_1 .



Recapitulăm prin probleme

1. Adevărat sau fals?

a) $\sqrt{25} = 5$; b) $\sqrt{16} = 8$; c) $\sqrt{1} = 1$.

2. Calculează: $\sqrt{225}$; $\sqrt{441}$; $\sqrt{5625}$; $\sqrt{6561}$.

3. Scrie toate numerele naturale de la 50 la 60 și subliniază numerele prime.

5. Determină numărul pozitiv y , dacă \sqrt{y} este egal cu: a) 2,6; b) 4,3; c) 1,(6).

6. Geo susține că $\sqrt{16} = -4$, deoarece $(-4)^2 = 16$. Are dreptate? De ce?

7. Un dreptunghi are laturile de 12 cm și 27 cm. Cât este latura unui pătrat de aceeași arie cu dreptunghiul dat?

4. a) Scrie în formă zecimală numerele raționale: $\frac{11}{2}$; $\frac{11}{3}$; $\frac{11}{6}$; $\frac{11}{18}$.

b) Scrie în formă fracționară numerele raționale: 0,25; 0,(25); 0,2(5).

c) Scrie sub formă de radical numărul 4.

8. a) Scrie toți divizorii naturali ai numărului 44.

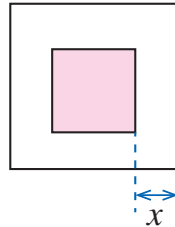
b) Află numărul divizorilor naturali ai lui 160.

c) Scrie un număr natural care are exact 6 divizori naturali.

9. Verifică dacă:

a) $\sqrt{25} + \sqrt{16} = \sqrt{81}$; b) $\sqrt{16} + \sqrt{9} = \sqrt{25}$.

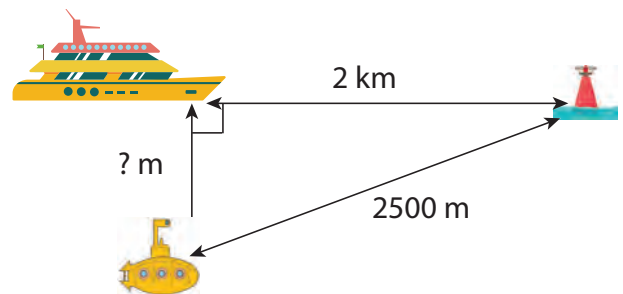
10. Pentru piața din imagine, află valoarea lui x , dacă pătratul interior are aria de 784 m^2 , cel exterior are aria de 1296 m^2 , iar pătratele au același centru.



11. Încadrează fiecare dintre numerele următoare între două numere naturale consecutive: $\sqrt{14}$; $\sqrt{29}$; $\sqrt{53}$; $\sqrt{85}$.

12. Pentru câte numere n , de 3 cifre, este adevărată afirmația: $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$?

13. Un submarin detectează o baliză maritimă la o depărtare de 2500 de metri. Un vapor aflat exact deasupra submarinului detectează baliza la 2 km. La ce adâncime se află submarinul?



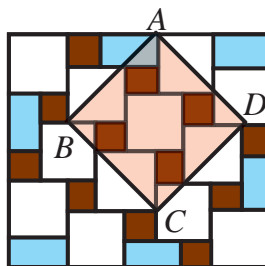
14. a) Calculează:

$\sqrt{15+1}$; $\sqrt{1155+1}$; $\sqrt{111555+1}$.

b) Cât crezi că va fi $\sqrt{111111555555+1}$?

Anticipează rezultatul, apoi verifică prin calcul dacă ai avut dreptate!

15. Ema a confecționat o felicitare lipind pe un carton albastru pătrate albe cu latura de 6 cm și pătrate maro cu latura de 3 cm, ca în imagine.



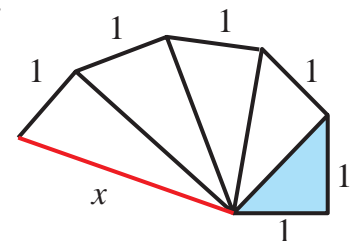
a) Ce dimensiuni are felicitarea Emei?

b) Calculează aria și perimetrul patrulaterului $ABCD$, marcat pe figură.

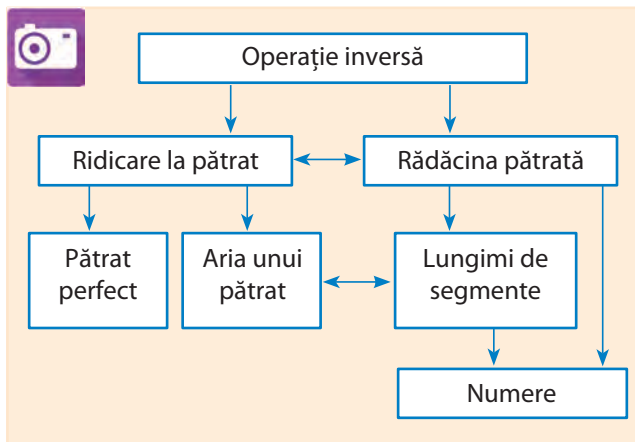
16. Demonstrează că, pentru orice număr natural, nenul n , $n > 1$, numărul $2^n - 1$ nu poate fi pătrat perfect.

17. Cele cinci triunghiuri din figura de mai jos sunt dreptunghice, iar una dintre catetele fiecăruia dintre aceste triunghiuri este egală cu 1.

Triunghiul mic, de pornire, este isoscel. Calculează lungimea segmentului notat cu x pe figură.



Ce am învățat?

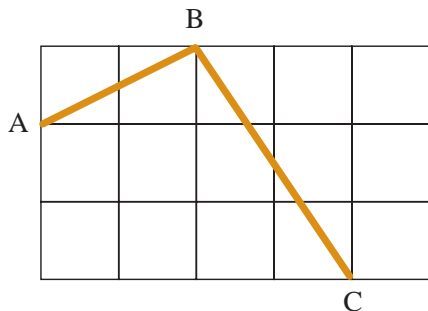


Rezolv testele pentru a verifica dacă pot:

- să identific rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect, utilizând scrierea acestuia sub formă de putere cu exponent 2;
- să recunosc numere naturale, întregi, raționale;
- să scriu un număr real în diverse forme;
- să utilizez în calcule ordinea operațiilor cu numere raționale sau operația inversă;
- să rezolv probleme cu conținut practic.

TESTUL 1

1. Descompune în produs de factori primi numărul 5184, apoi calculează rădăcina sa pătrată.
2. Adevărat sau fals? Numărul $\sqrt{576}$ este număr natural.
3. Scrie numărul 0,25:
 - a) în formă fracționară;
 - b) ca rădăcină pătrată a unui număr rațional pozitiv.
4. Dă un exemplu numeric pentru a arăta că, dacă x și y sunt numere naturale nenule, atunci $\sqrt{x} + \sqrt{y} \neq \sqrt{x+y}$.
5. Pe rețeaua de pătrate cu latura de 1 cm din figură au fost desenate segmentele AB și BC .



Demonstrează că
 $AB = \sqrt{5}$ cm și $BC = \sqrt{13}$ cm.

TESTUL 2

1. Descompune în produs de factori primi numărul 2916, apoi calculează rădăcina sa pătrată.
2. Adevărat sau fals? Numărul $\sqrt{2020}$ este număr natural.
3. Scrie numărul 0,16:
 - a) în formă fracționară;
 - b) ca rădăcină pătrată a unui număr rațional pozitiv.
4. Cu ce număr au fost începute calculele?

?

→

× 0,4

→

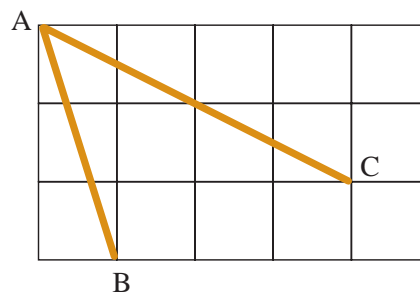
?

→

- 2,3

→

11,7
5. Pe rețeaua de pătrate cu latura de 1 cm din figură au fost desenate segmentele AB și AC .



Demonstrează că
 $AB = \sqrt{10}$ cm și $AC = \sqrt{20}$ cm.



Paralelism și covorașe

Plan de lucru

- ✓ **Materiale necesare:** coli de hârtie colorată, foarfecă.
- ✓ **Scop:** Veți realiza „covorașe” care pun în evidență proprietățile patrulaterelor.

Realizarea proiectului

Lucrați în echipe de câte trei, patru sau cinci colegi!

- ✓ Realizați modele asemănătoare celor din dreapta, folosind benzi de hârtie colorată, pe care le tăiați la o grosime convenabilă, de 1-3 cm.
- ✓ Observați figurile geometrice determinate de intersecțiile benzilor. Notați pe o fișă atașată fiecărui model realizat denumirea și proprietățile figurii identificate.
- ✓ Propuneți și răspundeți la diferite întrebări legate de forma patrulaterelor obținute la intersecția benzilor.

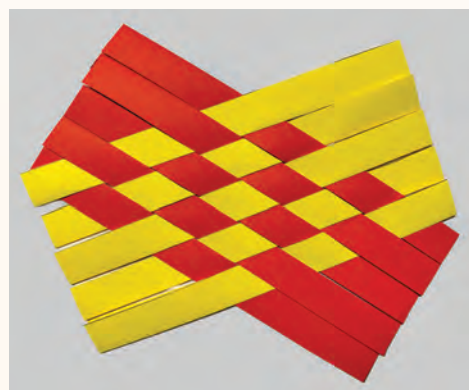
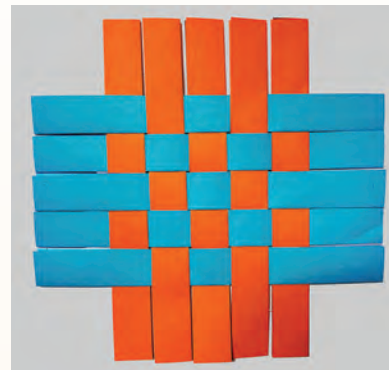
De exemplu:

- Cum trebuie tăiate benzile pentru a obține:
a) pătrate; b) rombur; c) trapeze?
Demonstrați practic răspunsurile propuse.
- Există vreo legătură între numărul de benzi folosite și numărul de figuri generate prin intersecția benzilor?
Dacă da, explorați această legătură.

- ✓ Includeți aceste întrebări și răspunsuri în fișele atașate modelelor realizate. Adăugați și alte probleme care v-au plăcut.
- ✓ Creați un poster cu toate lucrările realizate.

Pentru început:

- ✓ Observați cele două modele alăturate și răspundeți la întrebări.
 - Ce figuri geometrice au fost generate la intersecția benzilor de hârtie, în fiecare caz?
 - Cum credeți că au fost realizate modelele?
- ✓ Imaginați-vă că eliminați una dintre benzile de pe margine. Câte patrulare se elimină în acest mod? Dar dacă, în loc să eliminați o bandă, adăugați una, câte patrulaterare vor fi în total?



Interacțiune

În echipa voastră

- ✓ Discutați etapele proiectului și împărțiți sarcinile în cadrul echipei.
- ✓ Fiecare rezolvă propria sarcină, dar colaborează și cu ceilalți pentru a obține la final un produs cât mai bun al întregii echipe.
- ✓ Căutați să realizați modele care conduc la figuri geometrice diferite.
- ✓ Discutați și stabiliți forma finală a posterului pe care aplicați toate materialele realizate.

Prezentare

Lucrați cu toată clasa!

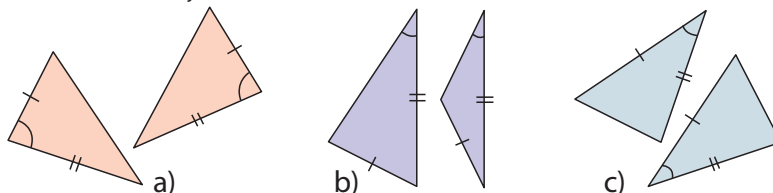
- ✓ Expuneți posterele realizate.
- ✓ Fiecare echipă va evalua posterele celorlalte echipe.
 - Alegeți prin vot posterul care v-a plăcut cel mai mult.
 - Atenție! Nicio echipă nu votează propriul poster.
- ✓ Stabiliți clasamentul final, totalizând punctele propuse de fiecare echipă.

Rezolvând exercițiile următoare, îți vei aminti noțiuni și rezultate necesare pentru parcurgerea acestei Unități de învățare. Fiecare problemă propusă valorează 1 punct. Se acordă 1 punct din oficiu.

I. Scrie pe foaia de rezolvare cuvintele sau rezultatele care, înscrise în spațiile punctate, formează enunțuri adevărate.

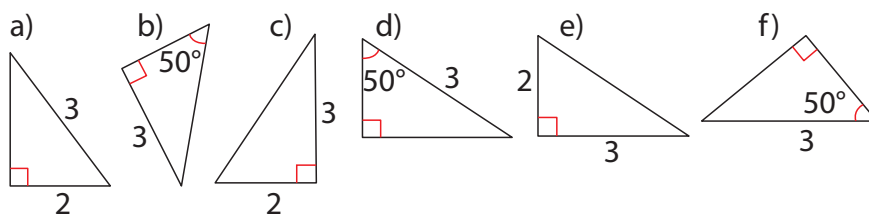
Congruența triunghiurilor oarecare

1. Tic a afirmat că două triunghiuri sunt congruente dacă au câte un unghi și două laturi respectiv congruente. Dintre desenele care urmează acela care arată că afirmația este falsă este ...



Congruența triunghiurilor dreptunghice

2. Perechile de triunghiuri congruente sunt: În fiecare situație, precizează cazul de congruență.



Axă de simetrie

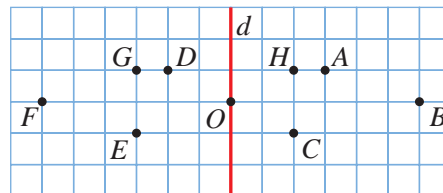
3. Triunghiul care admite o singură axă de simetrie este

II. Scrie pe foaia de rezolvare litera corespunzătoare răspunsului corect pentru următoarele exerciții:

Simetria față de un punct

4. Se consideră figura alăturată. Simetricul lui A față de O este punctul:

- A. D; B. E; C. G; D. H.



Simetria față de o dreaptă

5. În figura de la exercițiul precedent, simetricul segmentului AB în raport cu dreapta d este segmentul:

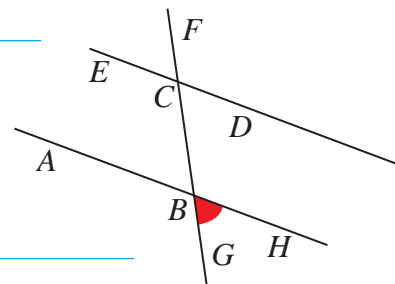
- A. EF; B. CD; C. GF; D. OG.

Unghiuri formate de două drepte paralele cu o secantă

6. În figura alăturată, dreptele AB și CD sunt paralele.

Unghiul $\sphericalangle GBH$ este congruent cu:

- A. $\sphericalangle ABG$; B. $\sphericalangle FCD$;
C. $\sphericalangle ABE$; D. $\sphericalangle BCD$.



III. Scrie pe foaia de rezolvare soluțiile complete ale exercițiilor următoare:

Proprietăți ale triunghiurilor

7. Ce tip de triunghi are toate înălțimile congruente? Desenează figura geometrică corespunzătoare.
8. Ce tip de triunghi are exact două mediane congruente? Desenează figura geometrică corespunzătoare.
9. Ce tip de triunghi are două înălțimi care coincid cu două laturi? Desenează figura geometrică corespunzătoare.

Dacă ai obținut mai puțin de jumătate din punctaj la acest test, este util să revezi definițiile și proprietățile verificate mai sus, pentru a înțelege mai bine ceea ce urmează.

O situație-problemă

Elevii au adus imagini în care apare forma de poligon. Iată câteva dintre ele:



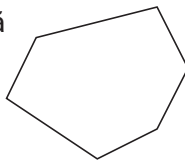
Care dintre imagini reprezintă poligoane?

Vrem să știm!

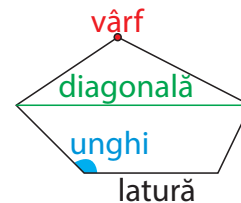
Prin ce se aseamănă și prin ce se deosebesc poligoanele?

Ne amintim și definim!

Numim **poligon** o linie frântă închisă ale cărei laturi se intersectează cel mult în extremitățile lor și fiecare extremitate este comună pentru exact două laturi.

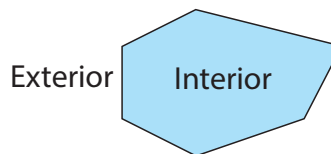


Elementele unui poligon sunt:
laturi, vârfuri, unghiuri, diagonale.

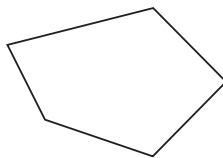


Un poligon împarte planul în două regiuni:

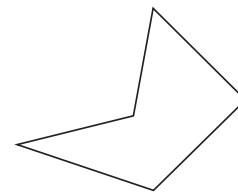
- interiorul poligonului
- exteriorul poligonului



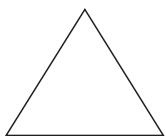
Un poligon se numește **convex** dacă toate vârfurile sale sunt situate în același semiplan determinat de orice dreaptă ce include o latură a poligonului.



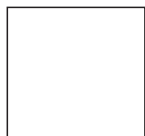
Un poligon se numește **concau** dacă există cel puțin două vârfuri situate de o parte și de alta a unei drepte ce include o latură a poligonului.



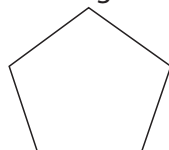
Poligonul care are toate laturile congruente și toate unghiurile congruente se numește **poligon regulat**. Poligoanele următoare sunt poligoane regulate:



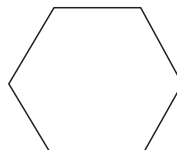
Triunghi echilateral



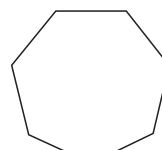
Pătrat



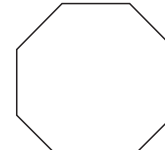
Pentagon regulat



Hexagon regulat



Heptagon regulat



Octogon regulat

Evaluăm nivelul de bază

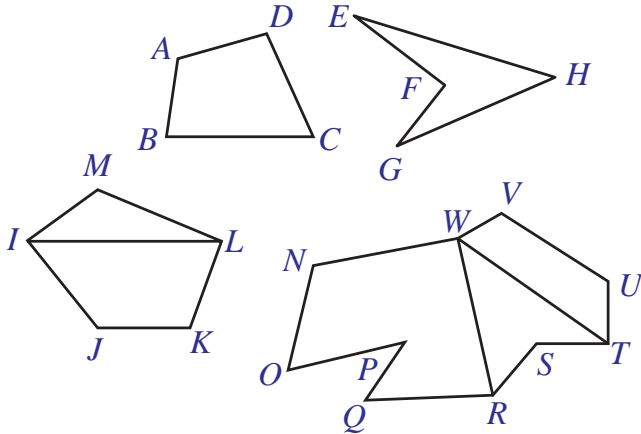
Identifică poligoanele sugerate în fiecare imagine de mai sus, adusă de copii.

Desenează: **a)** un patrulater convex și unul concav;

b) un hexagon convex și unul concav.

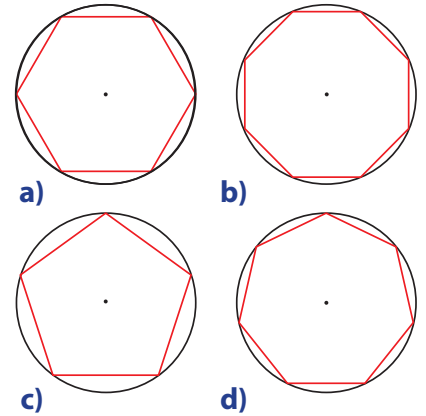
Probleme propuse

1. a) Numește poligoanele următoare și precizează denumirea fiecăruia.
Exemplu: Patrulaterul $ABCD$.
- b) Câte poligoane sunt în fiecare figură?

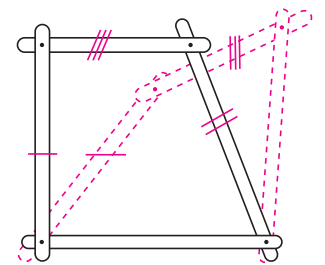


2. Pentru patrulateralele convexe din exercițiul 1, numește: a) laturile; b) perechile de laturi opuse; c) perechile de laturi consecutive; d) diagonalele; e) unghiurile.

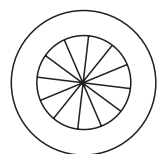
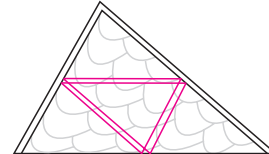
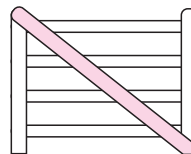
3. Poligoanele alăturate marcate cu roșu sunt poligoane regulate. Precizează numărul de laturi ale fiecăruia.



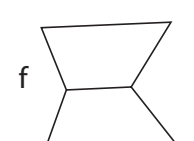
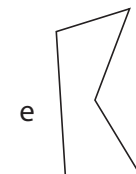
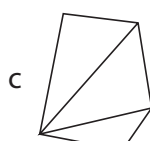
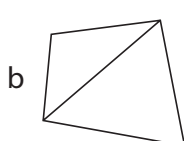
4. Grăbit să rezolve o problemă, Mati a formulat următorul raționament: Două triunghiuri care au laturile respectiv congruente sunt congruente. Atunci, analog, două patrulatere care au laturile respectiv congruente sunt congruente. Cum Mati era știut drept matematicianul clasei, nu a ridicat nimeni nicio obiecție. A doua zi însă, Geo a scos din ghiozdan un mecanism pe care îl meșterise acasă. Privindu-l, Mati și-a recunoscut greșeala. Alăturat, este construcția lui Geo. Explică în ce constă greșeala lui Mati.



5. Proprietatea triunghiurilor de a nu se deforma (de a fi rigide) permite ca acestea să fie des folosite în construcții, de exemplu, la susținerea unei porți, a unui acoperiș, a unei roți.



Dacă ai construi modelele figurilor următoare, care ar fi rigide?



Scurt demers de cercetare

1. Desenează și completează tabelul următor pentru poligoane convexe cu n laturi.

n	3	4	5	6	7	8	9	10
Numărul de diagonale								

2. Câte diagonale crezi că are un poligon convex cu 11 laturi?

Alege și rezolvă în 5 minute!

A

Desenează un poligon convex cu 4 laturi.

B

Desenează un poligon concav cu 5 laturi.

C

Există poligoane concave cu trei laturi? Justifică răspunsul.

O situație-problemă

Geo a făcut următorul experiment: a decupat unghiurile unui patrulater desenat pe hârtie și le-a pus unul lângă altul, ca mai jos.



Ce surpriză! Parcă „se lipesc” în jurul unui punct! Deci suma lor este de 360° ! Oare cu alt patrulater se întâmplă la fel?

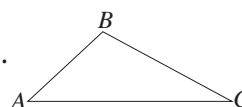


Vrem să știm!

Putem determina suma măsurilor unghiurilor oricărui patrulater convex?

Ne amintim ...

Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este egală cu 180° .



$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^\circ.$$

Demonstrăm!

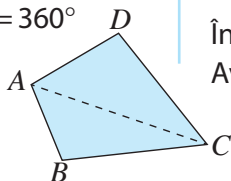
Teoremă: Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este egală cu 360° .

Ipoteză:

$ABCD$ este un patrulater convex

Concluzie:

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D = 360^\circ$$



Demonstrație:

Diagonala AC determină două triunghiuri: ABC și ADC .

În triunghiul ABC : $\sphericalangle BAC + \sphericalangle ACB + \sphericalangle CBA = 180^\circ$

În triunghiul ADC : $\sphericalangle DAC + \sphericalangle ACD + \sphericalangle CDA = 180^\circ$

Avem: $\sphericalangle BAD + \sphericalangle ADC + \sphericalangle DCB + \sphericalangle CBA =$

$$= (\sphericalangle BAC + \sphericalangle ACB + \sphericalangle CBA) + (\sphericalangle DAC + \sphericalangle ACD + \sphericalangle CDA) = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$$

Ce legătură este între suma măsurilor unghiurilor unui triunghi și suma măsurilor unghiurilor unui patrulater? Putem aplica această legătură pentru calculul sumei măsurilor unghiurilor unui pentagon, hexagon, ... ?

Gândim critic și constructiv!

Evaluăm nivelul de bază

- 1) Câte diagonale are un patrulater convex?
- 2) Adevărat sau fals? 135° , 27° , 112° și 86° pot fi măsurile unghiurilor unui patrulater convex.

Problemă rezolvată

Fiind dată figura alăturată, calculează măsura unghiului DEF .

Rezolvare: Avem $\sphericalangle DAB = 180^\circ - (30^\circ + 35^\circ) = 115^\circ$;

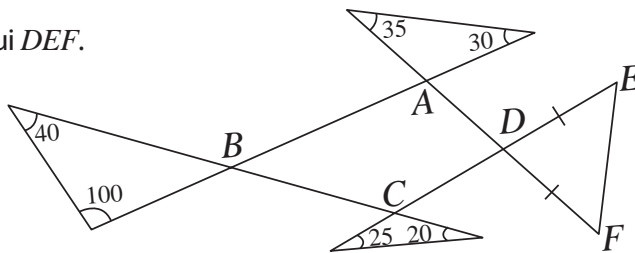
$$\sphericalangle ABC = 180^\circ - (40^\circ + 100^\circ) = 40^\circ;$$

$$\sphericalangle BCD = 180^\circ - (25^\circ + 20^\circ) = 135^\circ;$$

$$\sphericalangle CDA = 360^\circ - (115^\circ + 40^\circ + 135^\circ) = 70^\circ.$$

În triunghiul isoscel DEF , obținem:

$$\sphericalangle DEF = (180^\circ - 70^\circ) : 2 = 110^\circ : 2 = 55^\circ.$$

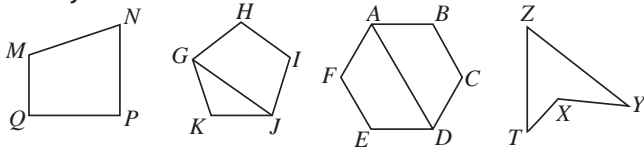


Exprimare orală

Enunță teoremele folosite în rezolvarea problemei de mai sus.

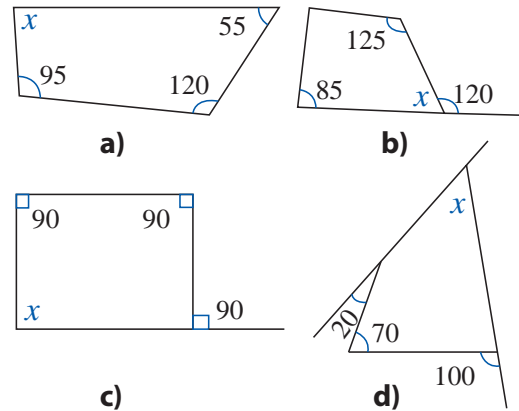
Probleme propuse

1. Numește patruleterele convexe din figurile de mai jos.

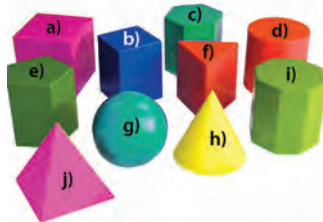


2. Pentru patruleterele convexe de la problema 1, numește: **a)** laturile; **b)** unghiurile; **c)** perechile de laturi opuse; **d)** perechile de laturi consecutive; **e)** perechile de unghiuri opuse; **f)** diagonalele.
3. Verifică dacă 110° , 25° , 37° , 140° pot fi măsurile unghiurilor unui patruleter convex.

4. Folosind informațiile din fiecare figură, calculează x (măsura în grade a unghiului).

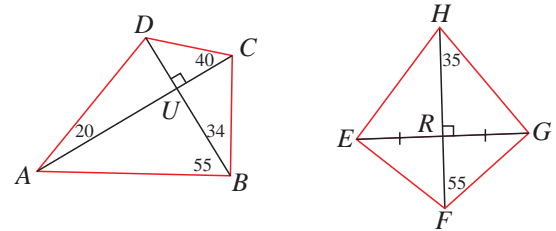


5. Scrie litera corespunzătoare corpurilor geometrice alăturate, care au ca fețe patruleter convexe.



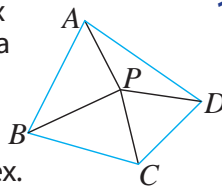
6. În patruleterul convex $MNPQ$ măsurile unghiurilor M , N și P sunt mai mari decât măsura celui de-al patrulea unghi cu 25° , 31° , respectiv 48° . Calculează măsurile unghiurilor patruleterului.

7. Folosește informațiile din figurile următoare pentru a determina unghiurile fiecărui patruleter.

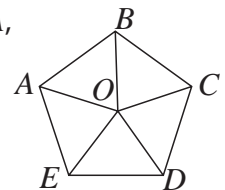


8. Află măsurile unghiurilor unei arene de forma unui patruleter $ABCD$ în care unghiurile A și C , respectiv A și B sunt suplementare, iar unghiurile A și D sunt complementare.
10. Într-un patruleter convex $MNPQ$ diagonala QN este bisectoarea unghiului $\sphericalangle MQP$, $\sphericalangle MNQ = 35^\circ$, $\sphericalangle QNP = 60^\circ$ și $\sphericalangle NPQ = 55^\circ$. Află măsurile unghiurilor patruleterului $MNPQ$.

9. În interiorul patruleterului convex $ABCD$ se consideră punctul P ca în figura alăturată. Pornind de la această situație, demonstrează teorema referitoare la suma unghiurilor unui patruleter convex.



11. **a)** Se consideră cinci triunghiuri isoscele congruente, OAB , OBC , OCD , ODE și OEA , ca în figura alăturată. Calculează măsurile unghiurilor poligonului $ABCDE$.
b) Rezolvă problema similară pentru zece triunghiuri isoscele.
c) Rezolvă problema similară pentru n triunghiuri isoscele, cu n număr natural, $n \geq 3$.



Alege și rezolvă în 5 minute!

A Un patruleter convex are un unghi cu măsura de 65° și două unghiuri cu măsura de 76° . Calculează măsura celui de-al patrulea unghi.

B Stabilește dacă există patruleter convexe având toate unghiurile obtuze. Explică modul în care ai gândit.

C Într-un patruleter convex $MNPQ$, măsura unghiului N este dublul măsurii unghiului M , măsura unghiului P este dublul măsurii unghiului N și măsura unghiului Q este triplul măsurii unghiului M . Calculează măsura unghiului M .

O situație-problemă

Lampa de birou flexibilă permite iluminarea optimă a spațiului de lucru. Ce formă păstrează cadrul lămpii când ea își modifică poziția?



Laturile opuse ale patrulaterelor formate de brațele mobile rămân mereu paralele!

Lungimile laturilor opuse rămân egale? Dar măsurile unghiurilor opuse?



Vrem să știm!

Ce proprietăți are patrulaterul cu laturile opuse paralele?

Definiție

Patrulaterul cu laturile opuse paralele se numește **paralelogram**.

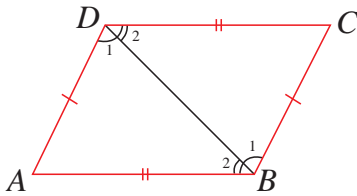
Demonstrăm!

Proprietatea 1 (P1) Dacă un patrulater este paralelogram, atunci laturile lui opuse sunt congruente.

Ipoteză:

$ABCD$ paralelogram

Concluzie: $AB \equiv CD$ și $AD \equiv BC$



Demonstrație:

Considerăm diagonala BD .

Pentru triunghiurile, ABD, CDB avem:

$BD = BD$ (latură comună)

$\sphericalangle B_1 \equiv \sphericalangle D_1$ (alterne interne formate de $AD \parallel BC$ cu secanta BD)

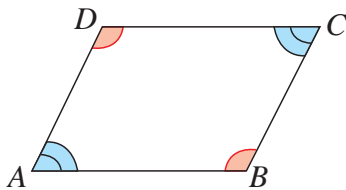
$\sphericalangle B_2 \equiv \sphericalangle D_2$ (alterne interne formate de $AB \parallel CD$ cu secanta BD)

Conform cazului *U.L.U.* avem $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$, de unde deducem că $AB \equiv CD$ și $AD \equiv BC$.

P2. Dacă un patrulater este paralelogram, atunci unghiurile opuse sunt congruente.

Ipoteză: $ABCD$ paralelogram

Concluzie: $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$ și $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle D$



Demonstrație:

$\sphericalangle A$ și $\sphericalangle D$ sunt suplementare (ca interne de aceeași parte a secantei, formate de $AB \parallel CD$ cu secanta AD).

$\sphericalangle C$ și $\sphericalangle D$ sunt suplementare (ca interne de aceeași parte a secantei, formate de $AD \parallel BC$ cu secanta CD).

Deducem că $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$ (ca unghiuri care au același suplement). În același mod, deducem că $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle D$.

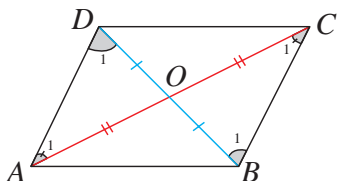
P3. Dacă un patrulater este paralelogram, atunci diagonalele se intersectează în mijlocul fiecăreia.

Ipoteză:

$ABCD$ paralelogram

$AC \cap BD = \{O\}$

Concluzie: $AO \equiv OC$ și $DO \equiv OB$



Demonstrație:

Pentru triunghiurile AOD și COB avem:

$\sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle C_1$ (alterne-interne formate de $AD \parallel BC$ cu secanta AC)

$AD \equiv BC$ (**P1**)

$\sphericalangle D_1 \equiv \sphericalangle B_1$ (alterne-interne formate de $AD \parallel BC$ cu secanta BD)

Conform cazului *U.L.U.* avem $\triangle AOD \equiv \triangle COB$.

Deducem că $AO \equiv OC$ și $DO \equiv OB$.

Evaluăm nivelul de bază

- ① Dacă în paralelogramul $ABCD$, $AB = 4$ cm și $BC = 5,5$ cm, ce lungime au laturile AD și DC ?
- ② Dacă $\sphericalangle BAD = 115^\circ$, ce măsură au celelalte trei unghiuri ale paralelogramului $ABCD$?
- ③ Dacă în paralelogramul $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$ și $AC = 8$ cm, iar $OD = 2,5$ cm, ce lungime au segmentele AO și BD ?



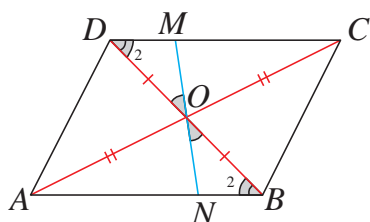
P4. Dacă un patrulater este paralelogram, atunci punctul de intersecție a diagonalelor este centrul de simetrie a paralelogramului.

Ipoteză:

$ABCD$ – paralelogram

$AC \cap BD = \{O\}$

Concluzie: O – centru de simetrie



Demonstrație:

Arătăm că simetricul fiecărui punct al paralelogramului față de O se află pe paralelogram.

Simetricul unui vârf al paralelogramului este tot un vârf, conform **P3**

Fie M arbitrar pe paralelogram (pe CD , de exemplu).

Notăm cu N punctul în care dreapta OM intersectează latura opusă.

$\sphericalangle DOM \equiv \sphericalangle BON$ (ca unghiuri opuse la vârf)

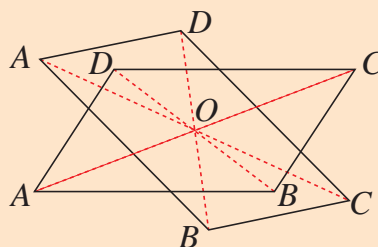
$\sphericalangle D_2 \equiv \sphericalangle B_2$ (alterne interne formate de $AB \parallel CD$ cu secanta BD)

$DO \equiv OB$ (**P3**)

Conform cazului *U.L.U.* avem $\triangle DOM \equiv \triangle BON$. Rezultă $OM \equiv ON$, și cum O este un punct al segmentului MN , deducem că N este simetricul lui M față de O .

Deoarece simetricul unui punct față de alt punct este unic, proprietatea este demonstrată.

Care dintre proprietățile paralelogramului se verifică folosind două paralelograme identice, decupate din hârtie, pe care le suprapunem și le rotim în jurul unui ac fixat în punctul de intersecție a diagonalelor?



Gândim critic și constructiv!



Pe această proprietate se bazează morișca de hârtie!



Are dreptate Mati? Formulează o explicație.

Problemă rezolvată

Fie $ABCD$ un paralelogram, AF, BE bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle DAB$ și respectiv $\sphericalangle ABC$, $E, F \in CD$. Demonstrează că bisectoarele sunt perpendiculare.

Ipoteză:

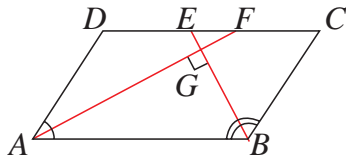
$ABCD$ un paralelogram

AF bisectoarea $\sphericalangle DAB$, $E \in CD$

BE bisectoarea $\sphericalangle ABC$, $F \in CD$

Concluzie:

$AF \perp BE$



Demonstrație:

Fie $AF \cap BE = \{G\}$.

$ABCD$ paralelogram $\Rightarrow \sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC = 180^\circ$ (1)
(unghiurile adiacente unei laturi sunt suplementare)

AF este bisectoarea $\sphericalangle DAB$ (ipoteză)

$$\Rightarrow \sphericalangle DAG = \sphericalangle GAB = \frac{\sphericalangle DAB}{2} \quad (2)$$

BE bisectoarea $\sphericalangle ABC$

$$\Rightarrow \sphericalangle ABG = \sphericalangle GBC = \frac{\sphericalangle ABC}{2} \quad (3)$$

Din (1), (2), (3) $\Rightarrow \sphericalangle GAB + \sphericalangle GBA = 90^\circ$, deci

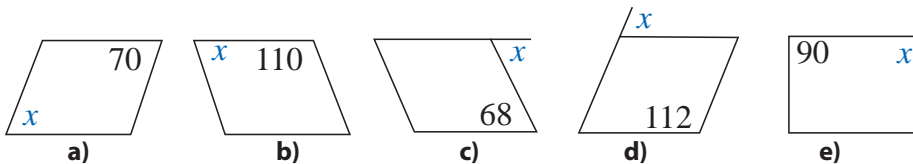
$$\sphericalangle AGB = 180^\circ - (\sphericalangle GAB + \sphericalangle GBA) = 90^\circ \Rightarrow AF \perp BE.$$

Exprimare orală

Ce proprietate a paralelogramului s-a utilizat în rezolvarea problemei de mai sus? Explică unde intervine aceasta.

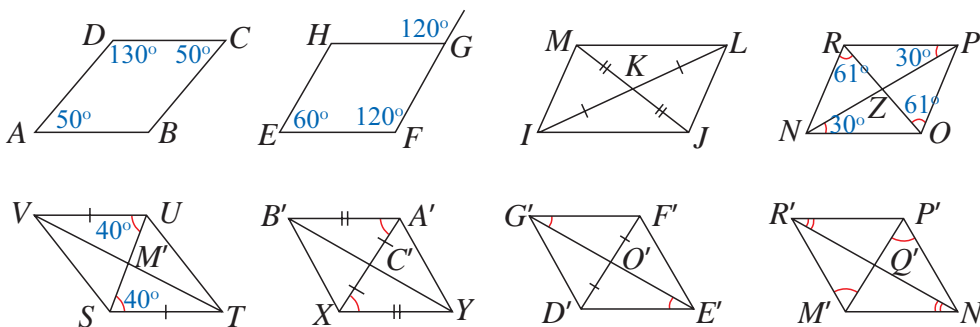
Probleme propuse

1. Pentru paralelogramele din figura de mai jos, calculează x (măsura în grade a unghiului marcat).

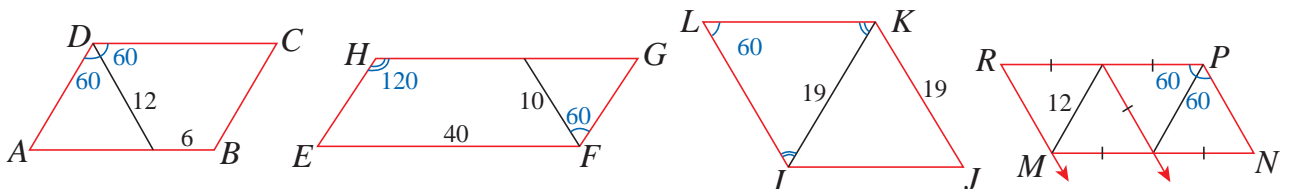


2. Demonstrează că, dacă un patrulater este paralelogram, atunci el are două unghiuri consecutive suplementare.

3. Folosind informațiile notate pe figurile de mai jos, numește segmentele congruente din fiecare paralelogram. Justifică de ce sunt congruente.



4. Calculează perimetrul fiecărui paralelogram de mai jos folosind informațiile notate pe figură și teoremele învățate. Lungimile segmentelor sunt date în milimetri, iar \Rightarrow indică drepte paralele.



5. Se consideră paralelogramul $ABCD$.

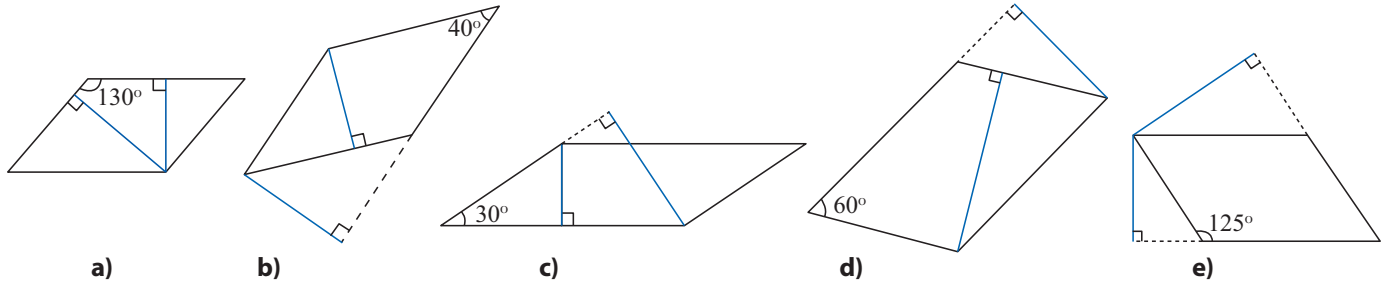
a) Dacă $AB = 5$ cm și $BC = 3$ cm, află lungimile laturilor AD și CD .

b) Dacă $\sphericalangle A = 76^\circ$, determină măsurile unghiurilor B , C și D .

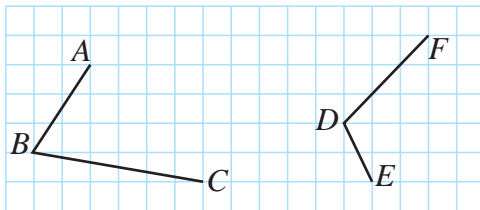
c) Dacă $AC \cap BD = \{O\}$ și $OA = 3,5$ cm, află lungimea diagonalei AC .

6. Folosește benzile de hârtie colorată din proiect pentru a evidenția proprietățile paralelogramului. Discută cu un coleg sau o colegă.

7. Determină măsura unghiului ascuțit format de cele două înălțimi ale paralelogramelor de mai jos.



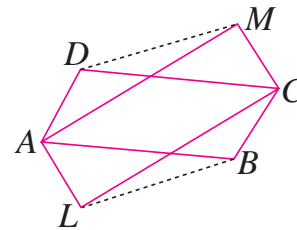
8. Transpune desenul de mai jos pe caietul tău și plasează punctele M și N astfel încât $ABCM$ și $DENF$ să fie paralelograme.



9. În paralelogramul $ABCD$, măsura $\sphericalangle A$ reprezintă $\frac{4}{5}$ din măsura $\sphericalangle D$. Calculează măsurile unghiurilor paralelogramului.

10. Fie ABC un triunghi. Ducem prin B dreapta d , paralelă cu AC și prin C dreapta d' , paralelă cu AB . Dreptele d și d' se intersectează în D . Este $ABDC$ paralelogram? De ce? Dar $ABCD$?

11. În figură, $ABCD$ și $ALCM$ sunt paralelograme. Arată că $DM = LB$.



12. În paralelogramul $ABCD$ cu $AD < DC$, fie $E \in AB$ și $F \in CD$, cu $DE \perp AC$ și $BF \perp AC$. Arată că $BEDF$ este paralelogram.

13. În paralelogramul $ABCD$, $AB = 7$ cm, $AC = 16$ cm și $BD = 18$ cm. Calculează perimetrul triunghiului AOB , unde O este punctul de intersecție a diagonalelor.

14. Se consideră paralelogramul $ABCD$. Demonstrează că distanța de la punctul A la dreapta DC este egală cu distanța de la punctul C la dreapta AB .

15. Se consideră paralelogramele $ABCD$ și $ABEF$. Demonstrează că: a) $DF \equiv CE$; b) $DF \parallel CE$; c) $\sphericalangle DCE \equiv \sphericalangle DFE$.

Alege și rezolvă în 5 minute!

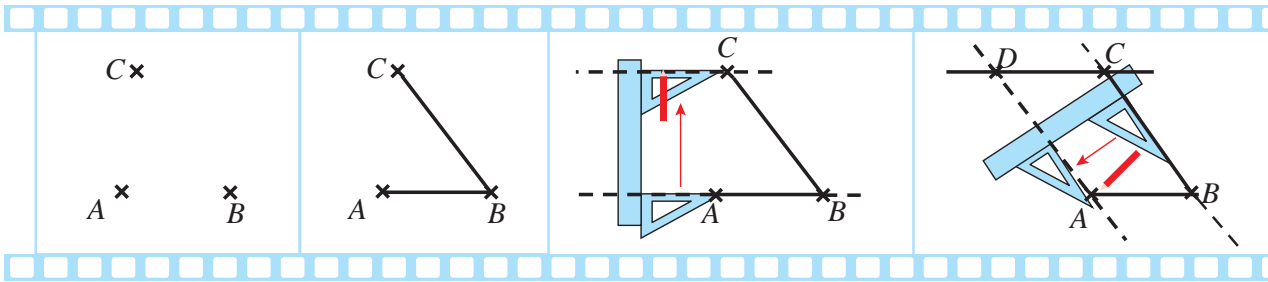
A Prin vârfurile unui triunghi, trasează paralele la laturile opuse, care se intersectează două câte două. Notează paralelogramele formate.

B Un unghi al unui paralelogram are măsura de 33° . Calculează măsurile celorlalte trei unghiuri ale acestuia.

C În paralelogramul $ABCD$, cu $AB = 4$ dm, se notează cu O punctul de intersecție a diagonalelor sale. Determină lungimea, exprimată în dm, a diagonalei AC , știind că diagonala $BD = 120$ cm și perimetrul $\triangle AOB$ este de 15 dm.

O situație-problemă

Geo a construit un paralelogram pornind de la 3 puncte date. Iată filmul construcției lui.



Am folosit rigla și echerul ca să trasez paralela prin C la AB și apoi paralela prin A la BC.

Într-adevăr, ai obținut un paralelogram. Dar e destul de complicat ...



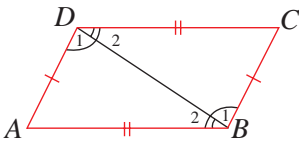
Vrem să știm!

Care sunt condițiile minime necesare pentru a construi un paralelogram?

Demonstrăm!

Reciproca 1 (R1) Dacă laturile opuse ale unui patrulater convex sunt congruente, atunci patrulaterul este paralelogram.

Ipoteză: $ABCD$ patrulater convex,
 $AB \equiv CD$, $BC \equiv AD$
Concluzie: $ABCD$ paralelogram

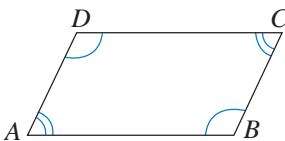


Demonstrație:

Trasăm una dintre diagonale, BD de exemplu. Comparăm triunghiurile ABD și CDB . Avem $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ (L.L.L.), deci $\sphericalangle D_1 \equiv \sphericalangle B_1$ și $\sphericalangle D_2 \equiv \sphericalangle B_2$. Aceste unghiuri au poziții de unghiuri alterne interne formate de dreptele AD și BC cu secanta BD , respectiv de dreptele AB și CD cu secanta BD . Rezultă că $AD \parallel BC$ și $AB \parallel CD$.

R2. Dacă unghiurile opuse ale unui patrulater convex sunt congruente, atunci patrulaterul este paralelogram.

Ipoteză: $ABCD$ patrulater convex
 $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle D$.
Concluzie: $ABCD$ paralelogram

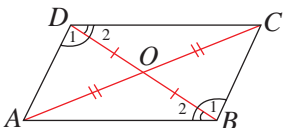


Demonstrație:

Suma măsurilor unghiurilor patrulaterului $ABCD$ este egală cu 360° . Conform ipotezei $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$ și $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle D$, deci $2\sphericalangle A + 2\sphericalangle D = 360^\circ$ de unde $\sphericalangle A + \sphericalangle D = 180^\circ$. Unghiurile A și D sunt suplementare și interne de aceeași parte a secantei AD , deci $AB \parallel CD$. Analog se arată că $AD \parallel BC$.

R3. Dacă într-un patrulater convex diagonalele au același mijloc, atunci patrulaterul este paralelogram.

Ipoteză: $ABCD$ patrulater convex,
 $AC \cap BD = \{O\}$,
 $AO \equiv OC$, $BO \equiv OD$
Concluzie: $ABCD$ paralelogram



Demonstrație:

Conform cazului L.L.L. avem $\triangle AOD \equiv \triangle COB$, de unde deducem că $\sphericalangle D_1 \equiv \sphericalangle B_1$. Cum aceste unghiuri sunt alterne interne formate de dreptele AD și BC cu secanta BD , rezultă că $AD \parallel BC$. Analog, din $\triangle COD \equiv \triangle AOB$ (L.L.L.), deducem că $\sphericalangle D_2 \equiv \sphericalangle B_2$, deci $AB \parallel CD$.

Exprimare orală

Reformulează R3 folosind expresia centru de simetrie.

Analizează lecția anterioară și compară: **P1** și **R1**; **P2** și **R2**; **P3** și **R3**.

Ce observi?

Spunem că teorema **R1** este **reciproca** teoremei **P1**, teorema **R2** este **reciproca** teoremei **P2** și teorema **R3** este **reciproca** teoremei **P3**. În fiecare caz, putem formula cele două enunțuri într-o singură frază sub forma unor **condiții necesare și suficiente**:

P1 \Leftrightarrow **R1** Un patrulater convex este paralelogram **dacă și numai dacă** laturile opuse sunt congruente.
sau
Condiția necesară și suficientă ca un patrulater convex să fie paralelogram este ca patrulaterul să aibă două perechi de laturi opuse congruente.

Exprimare orală

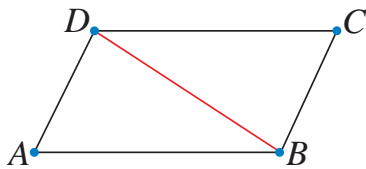
Formulează enunțuri similare pentru **P2** \Leftrightarrow **R2**; **P3** \Leftrightarrow **R3**.

Alte condiții necesare și suficiente pentru ca un patrulater să fie paralelogram

Teoremă Un patrulater convex este paralelogram dacă și numai dacă două laturi opuse ale lui sunt paralele și congruente.

" \Rightarrow "

Ipoteză: $ABCD$ paralelogram
Concluzie: $AB \parallel CD$, $AB \equiv CD$



Demonstrație:

Știm deja că $AB \parallel CD$ (din ipoteză).

Construim diagonala BD .

Comparăm triunghiurile ABD , CDB . Avem:

$BD = BD$ (latură comună)

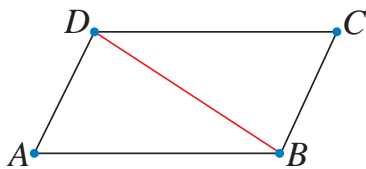
$\sphericalangle CDB \equiv \sphericalangle ABD$ (alterne interne formate de $AB \parallel CD$ cu secanta BD)

$\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CBD$ (alterne interne formate de $AD \parallel BC$ cu secanta BD)

Conform cazului (*U.L.U.*) rezultă $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$. Deci: $AB \equiv CD$.

" \Leftarrow "

Ipoteză: $ABCD$ patrulater convex,
 $AB \parallel CD$, $AB \equiv CD$
Concluzie: $ABCD$ paralelogram



Demonstrație:

Construim diagonala BD .

Comparăm triunghiurile ABD și CDB . Avem:

$BD = BD$ (latură comună)

$\sphericalangle CDB \equiv \sphericalangle ABD$ (alterne interne formate de $AB \parallel CD$ cu secanta BD)

$AB \equiv CD$ (ipoteză)

Conform cazului (*L.U.L.*) rezultă $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$.

Deci $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CBD$ fiind unghiuri alterne interne, rezultă $AD \parallel BC$.

Evaluăm nivelul de bază

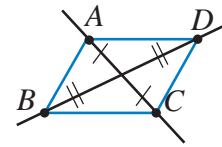
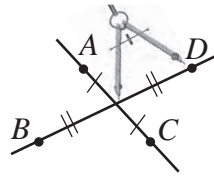
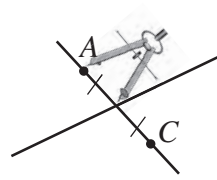
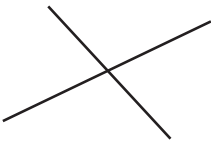
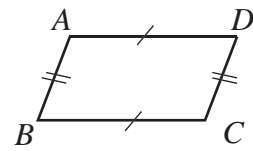
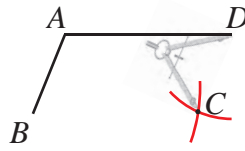
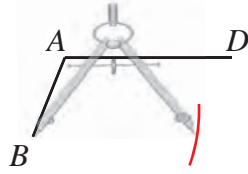
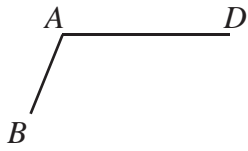
- Un patrulater convex $ABCD$ are $AB \equiv CD$ și $BC \parallel AD$. Este acest patrulater paralelogram?
- Desenează un patrulater convex $MNPQ$, cu $MP \cap NQ = \{T\}$, $MT = TP = 3$ cm și $NT = QT = 4$ cm. Este patrulaterul $MNPQ$ paralelogram?
- Este adevărată afirmația „dacă știu măsura unui unghi al unui paralelogram, atunci știu măsurile tuturor unghiurilor paralelogramului”?

Exprimare orală

Argumentează răspunsurile date la întrebările de mai sus.

Construim!

Aplicând teoremele anterioare, putem construi paralelograme cu rigla negradată și compasul.



Exprimare orală

Observă, analizează și discută: De ce, în fiecare dintre construcțiile de mai sus, se obține un paralelogram?

Problemă rezolvată

În paralelogramul $ABCD$, se consideră pe laturile AB și CD punctele E și F , astfel încât $AE = CF$. Arată că $AECF$ este paralelogram și că mijlocul segmentului EF coincide cu mijlocul segmentului BD .

Ipoteză:

$ABCD$ paralelogram;

$E \in AB$, între A și B ;

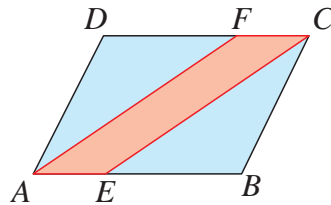
$F \in CD$, între C și D .

$AE = CF$

Concluzie:

$AECF$ paralelogram;

mijlocul lui EF coincide cu mijlocul lui BD .



Demonstrație:

$AE = CF$

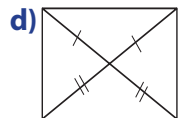
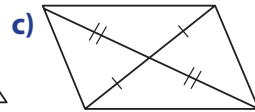
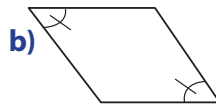
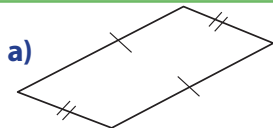
$AB \parallel CD \Rightarrow AE \parallel CF \Rightarrow AECF$ paralelogram.

$AECF$ paralelogram \Rightarrow diagonalele AC și EF se înjumătățesc; fie O mijlocul lor.

$ABCD$ paralelogram și O mijlocul lui $AC \Rightarrow O$ este și mijlocul lui $BD \Rightarrow EF$ și BD au același mijloc.

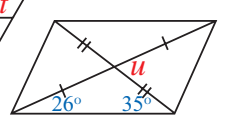
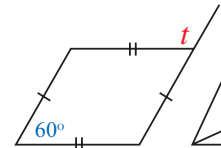
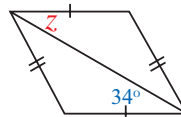
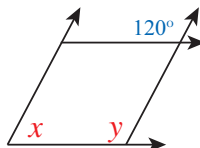
Probleme propuse

1. Folosește notațiile pentru a decide care dintre patruleterele alăturate sunt paralelograme.



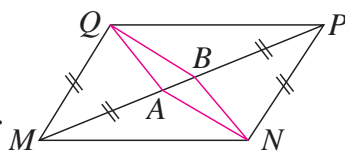
2. Explică de ce, atunci când intersectăm benzi dreptunghiulare de hârtie se determină un paralelogram.

3. Află măsurile notate cu litere pentru unghiurile din patruleterele alăturate.



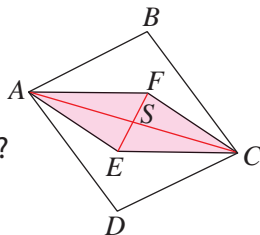
4. Construiește paralelogramele următoare și precizează câte soluții sunt în fiecare caz:
- un paralelogram $ABCD$, cu $AB = 7$ cm și $AD = 4$ cm;
 - un paralelogram $ABCD$, cu $AB = 7$ cm, $AD = 4$ cm și $\sphericalangle DAB = 50^\circ$
 - un paralelogram cu diagonalele de lungime 8 cm și, respectiv 6 cm;
 - un paralelogram cu diagonalele de 8 cm și, respectiv 6 cm și unul dintre unghiurile formate de acestea cu măsura de 55° ;
 - un paralelogram $MNPQ$ cu centrul de simetrie O , știind că $OM = 2$ cm, $ON = 3$ cm și $\sphericalangle MON = 30^\circ$.
5. Fie paralelogramul $ABCD$ și punctul E astfel încât D este mijlocul lui AE . Arată că $BCED$ este paralelogram.
6. Desenează două paralelograme care să aibă, fiecare, distanța dintre laturile mari de 2 cm, și distanța dintre laturile mici de 3 cm.

7. În figura alăturată, $MNPQ$ este paralelogram, iar $MQ = MA$ și $BP = NP$. Arată că $ANBQ$ este paralelogram.



8. $MNPQ$ și $NRSP$ sunt paralelograme cu o latură comună. Demonstrează că:
- $MRSQ$ este paralelogram.
 - $MR = SQ$.
9. În paralelogramul $ABCD$ se consideră punctul M pe latura AD și punctul N pe latura BC , astfel încât $AM \equiv BN$. Demonstrează că $ABNM$ și $MNCD$ sunt paralelograme.
10. În paralelogramul $ABCD$ se construiesc DE bisectoarea unghiului D , cu $E \in AB$ și BF bisectoarea unghiului B , cu $F \in DC$. Arată că $DEBF$ este paralelogram.

11. Patrulaterul $ABCD$ și $AECF$ din figura alăturată sunt paralelograme, iar S este centrul lui $AECF$.



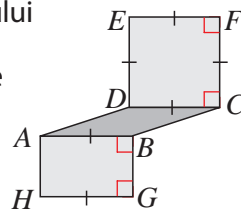
- Ce reprezintă S pentru BD ?
- Demonstrează că $DEBF$ este paralelogram.

12. Fie triunghiul ascuțitunghic ABC , D piciorul înălțimii din A pe BC , M mijlocul lui BC , E simetricul lui D față de M și F simetricul lui A față de M . Demonstrează că $ADFE$ și $ABFC$ sunt paralelograme.

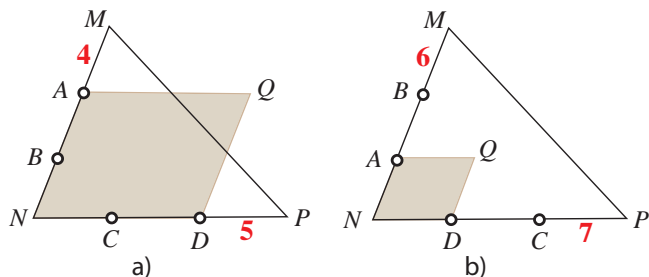
14. Punctele A, B, C, D împart laturile MN și NP ale triunghiului MNP în câte trei segmente congruente. Calculează perimetrul paralelogramului $ANDQ$, folosind datele numerice de pe figură, în fiecare dintre cazurile descrise alăturat.



13. În exteriorul paralelogramului $ABCD$ din figura alăturată, se construiesc patrulaterul $ABGH$ și $CDEF$ astfel încât $AB = GH = CF = EF = ED$ și unghiurile $\sphericalangle ABG$, $\sphericalangle HGB$, $\sphericalangle DCF$ și $\sphericalangle EFC$ sunt drepte.



Demonstrează că $EFGH$ este paralelogram.



15. Se consideră paralelogramul $ABCD$ și E punctul de intersecție a bisectoarelor unghiurilor ADC și BCD . Demonstrează că: $E \in AB$ dacă și numai dacă $AB = 2 \cdot BC$.

16. Fie $ABCD$ paralelogram cu $AB \neq 2BC$, AM și BM bisectoarele unghiurilor BAD , respectiv ABC , $\{E\} = AM \cap CD$, $\{F\} = BM \cap CD$, P mijlocul segmentului AB și N mijlocul lui EF . Arată că punctele M, N și P sunt coliniare.

Alege și rezolvă în 5 minute!

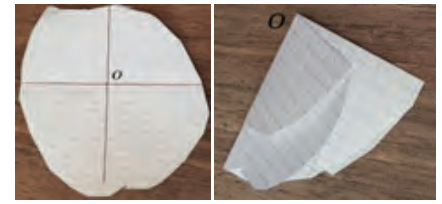
A Completează enunțul următor astfel încât acesta să fie adevărat: „Dacă $AB \parallel CD$ și ..., atunci patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.”

B Construiești un patrulater convex $UVXY$, cu diagonalele $UX \perp VY$, $UX = 5$ cm, $VY = 7$ cm. Ce condiție suplimentară trebuie adăugată astfel încât $UVXY$ să devină paralelogram?

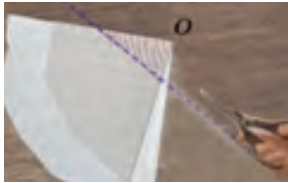
C În patrulaterul convex $ABCD$ se consideră $AM \parallel BC$, cu $M \in DC$ și $N \in BC$ astfel încât $AM \equiv BN$. Arată că $AB \equiv MN$.

O situație-problemă

Exercițiu de imaginație! Ce figură se obține când despăturim hârtia? Decupăm trei bucăți de hârtie. Trasăm pe fiecare dintre acestea două drepte perpendiculare al căror punct de intersecție este O și împăturim foaia de hârtie după aceste două drepte, ca în figură. →



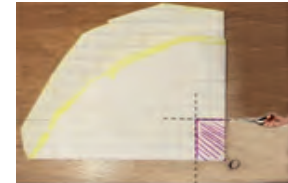
După ce am presat hârtia împăturită, decupăm fiecare coală astfel:



1 cu o tăietură după o dreaptă oarecare care nu trece prin punctul O ;



2 cu o tăietură după o dreaptă care face cu marginile hârtiei unghiuri de 45° ;



3 cu tăieturi care formează un dreptunghi.



Ce forme vor avea figurile decupate după ce despăturim hârtia în fiecare caz?

Vrem să știm! >>>

Ce paralelamente particulare identificăm și care sunt proprietățile acestora?

Definiție >>>

Paralelogramul cu un unghi drept se numește dreptunghi.



Dreptunghiul are toate proprietățile paralelogramului!

Ce alte proprietăți mai are dreptunghiul?



Cum recunoaștem un dreptunghi?



Condiții necesare și suficiente pentru ca un paralelogram să fie dreptunghi

T1. Un paralelogram este dreptunghi dacă și numai dacă are toate unghiurile drepte.

"⇒"

Ipoteză:

$ABCD$ paralelogram, $\sphericalangle A = 90^\circ$

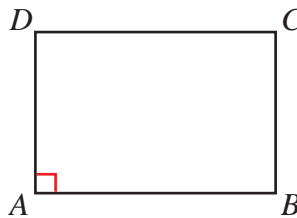
Concluzie: $\sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = 90^\circ$

Reciproc: "⇐"

Ipoteză:

$\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = 90^\circ$

Concluzie: $ABCD$ dreptunghi



"⇒"

Demonstrație:

Din $AB \parallel CD$ rezultă $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180^\circ$, deci $\sphericalangle B = 90^\circ$. Analog, rezultă $\sphericalangle C = 90^\circ$ și $\sphericalangle D = 90^\circ$.

Reciproc: "⇐"

Demonstrație:

Din $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$ și $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle D$ rezultă că $ABCD$ paralelogram. Cum $\sphericalangle A = 90^\circ$, rezultă că $ABCD$ este dreptunghi.

T2. Un paralelogram este dreptunghi dacă și numai dacă are diagonalele congruente.

"⇒"

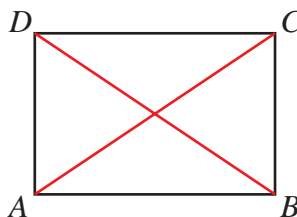
Ipoteză: $ABCD$ dreptunghi

Concluzie: $AC \equiv BD$

Reciproc: "⇐"

Ipoteză: $ABCD$ paralelogram,
 $AC \equiv BD$

Concluzie: $ABCD$ dreptunghi



"⇒"

Demonstrație:

$\triangle DAB \equiv \triangle CBA$ (C.C.).

Rezultă $BD \equiv AC$.

Reciproc: "⇐"

Demonstrație:

$\triangle DAB \equiv \triangle CBA$ (L.L.L.).

Rezultă $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle CBA$. Aceste unghiuri sunt suplementare, deci $\sphericalangle DAB = 90^\circ$.

Acum știi sigur că la 3 am obținut un dreptunghi!



- De ce punctul de intersecție a diagonalelor este centru de simetrie pentru dreptunghi?
- Câte axe de simetrie are dreptunghiul? Cum justificăm răspunsul?

Definiție

Paralelogramul cu două laturi consecutive congruente se numește **romb**.



Rombul are toate proprietățile paralelogramului!

Un patrulater este romb dacă și numai dacă are toate laturile congruente!



Ce proprietăți mai are un romb și cum îl recunoaștem?



Condiții necesare și suficiente pentru ca un paralelogram să fie romb

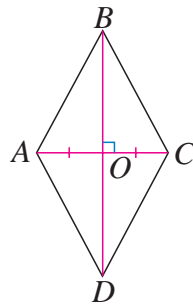
T3. Un paralelogram este romb dacă și numai dacă are diagonalele perpendiculare.

" \Rightarrow "

Ipoteză:
 $ABCD$ romb
Concluzie: $AC \perp BD$

Reciproc: " \Leftarrow "

Ipoteză: $ABCD$ paralelogram,
 $AC \perp BD$
Concluzie: $ABCD$ romb



" \Rightarrow "

Demonstrație:
Triunghiul ABC este isoscel cu vârful în B , deci mediana BO este și înălțime, adică $BD \perp AC$.

Reciproc: " \Leftarrow "

Demonstrație:
În triunghiul ABC , segmentul BO este mediană și înălțime. Rezultă că $AB \equiv BC$, deci $ABCD$ este romb.

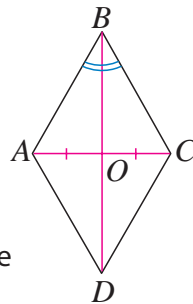
T4. Un paralelogram este romb dacă și numai dacă una dintre diagonale este bisectoarea unghiului din care pleacă.

" \Rightarrow "

Ipoteză:
 $ABCD$ romb, $AC \cap BD = \{O\}$
Concluzie:
 BD bisectoarea $\sphericalangle ABC$

Reciproc: " \Leftarrow "

Ipoteză: $ABCD$ paralelogram,
 $AC \cap BD = \{O\}$, BD bisectoare pentru $\sphericalangle ABC$
Concluzie: $ABCD$ romb



" \Rightarrow "

Demonstrație:
Triunghiul ABC este isoscel cu vârful în B , deci mediana BO este și bisectoare.

Reciproc: " \Leftarrow "

Demonstrație:
În triunghiul ABC , BO este mediană și bisectoare. Rezultă că $AB \equiv BC$, deci $ABCD$ este romb.

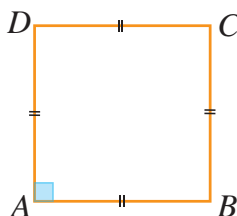
Acum știi sigur că la 1 și 2 obțin romburi!



- De ce punctul de intersecție a diagonalelor este centru de simetrie pentru romb?
- Câte axe de simetrie are romb și care sunt?

Definiție

Patrulaterul care este și dreptunghi și romb se numește **pătrat**.



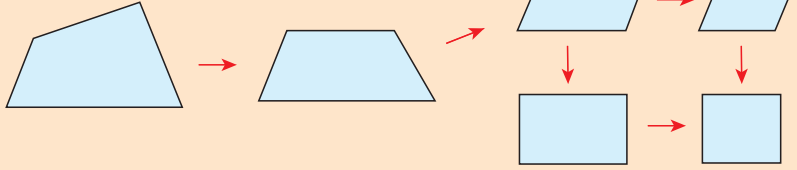
- Pătratul are toate proprietățile dreptunghiului și ale rombului.
- Pătratul are un centru de simetrie (intersecția diagonalelor) și patru axe de simetrie (mediatoarele laturilor și diagonalele).

Acum știi sigur că la 2 obțin chiar un pătrat!





Propune o interpretare a schemei alăturate.



Gândim critic și constructiv!

Evaluăm nivelul de bază

- 1 Distanța de la centrul unui dreptunghi la unul dintre vârfurile acestuia este de 2,5 cm. Ce lungime au diagonalele dreptunghiului?
- 2 Care este măsura unghiului format de diagonalele unui romb?
- 3 Ce proprietate trebuie să aibă diagonalele unui romb pentru ca acesta să devină pătrat?

Teorema medianei într-un triunghi dreptunghic

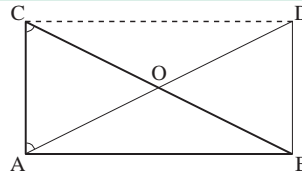
Teoremă

Într-un triunghi dreptunghic, mediana corespunzătoare ipotenuzei are lungimea egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.

Ipoteză:

$\triangle ABC$, $\sphericalangle A = 90^\circ$
 O mijlocul lui BC

Concluzie: $AO = \frac{BC}{2}$



Rezolvarea Anei

Demonstrația 1:

Prelungim segmentul AO cu un segment OD , astfel încât $AO \equiv OD$.

$AO \equiv OD$, $BO \equiv OC$, $\sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle BOD$ ^{L.U.L.} \Rightarrow

$\triangle AOC \equiv \triangle DOB \Rightarrow AC \equiv BD$, $\sphericalangle DBO \equiv \sphericalangle ACO$
 alterne interne, deci $AC \parallel BD$.

$AC \parallel BD$ și $CA \perp AB \Rightarrow DB \perp AB \Rightarrow \sphericalangle DBA = 90^\circ$.

$AC \equiv BD$, $AB \equiv AB$, $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle ABD = 90^\circ \Rightarrow$

$\triangle CAB \equiv \triangle DBA \Rightarrow AD \equiv BC \Rightarrow AO = \frac{AD}{2} = \frac{BC}{2}$.

Rezolvarea Lizei

Demonstrația 2:

Utilizăm același desen ca la soluția 1, dar de data aceasta construim $CD \parallel AB$ și $CA \parallel DB$.

Se formează astfel paralelogramul $CABD$ care are unghiul A drept, deci este dreptunghi.

AD și BC diagonale în dreptunghiul $ABDC$.

$\Rightarrow AD \equiv BC$
 $AD \cap BC = \{O\}$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} AD \equiv BC \\ AD \cap BC = \{O\} \end{matrix}} \right\} \Rightarrow AO = \frac{AD}{2} = \frac{BC}{2}$

Reciproca teoremei

Dacă într-un triunghi o mediană are lungimea cât jumătate din lungimea laturii căreia îi corespunde, atunci triunghiul este dreptunghic.

Ipoteză:

$\triangle ABC$,
 O - mijlocul lui BC

$AO = \frac{BC}{2}$

Concluzie:
 $\sphericalangle A = 90^\circ$

Demonstrația 1 (Ana)

$\triangle AOB$ și $\triangle AOC$ isoscele
 $\Rightarrow \sphericalangle ABO \equiv \sphericalangle OAB$ și $\sphericalangle CAO \equiv \sphericalangle OCA$.

$\sphericalangle AOC$ exterior $\triangle AOB \Rightarrow$
 $\sphericalangle AOC = \sphericalangle OAB + \sphericalangle OBA = 2 \cdot (\sphericalangle OAB)$.

În $\triangle AOC$:

$\sphericalangle OCA + \sphericalangle OAC + \sphericalangle AOC = 180^\circ \Rightarrow$

$2(\sphericalangle OAC + \sphericalangle OAB) = 180^\circ$

$\Rightarrow \sphericalangle CAB = 90^\circ$.

Demonstrația 2 (Liza)

Prelungim segmentul AO cu segmentul OD , astfel încât $AO \equiv OD$.

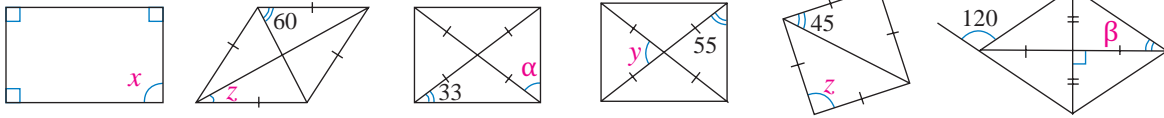
În patrulaterul $ABDC$, diagonalele au același mijloc și sunt congruente. Rezultă că $ABDC$ este dreptunghi și $\sphericalangle CAB = 90^\circ$.

Exprimare orală

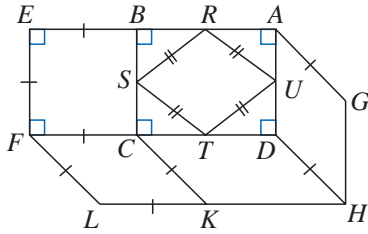
Care dintre demonstrațiile de mai sus consideri că este mai simplă în fiecare caz? Argumentează!

Probleme propuse

1. Folosește informațiile din desene pentru a calcula măsurile unghiurilor de mai jos.

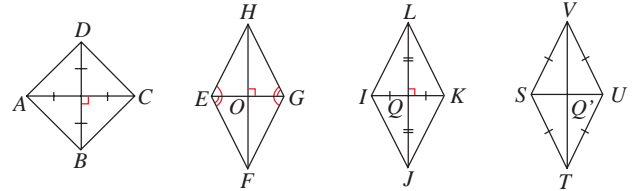


2. Găsește toate paralelogramele particulare din imaginea de mai jos și precizează tipul lor.



3. Determină măsurile unghiurilor unui romb $ABCD$, știind că $\sphericalangle DBC = 25^\circ$.

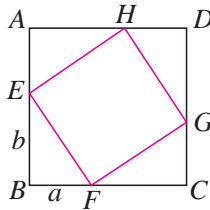
4. Numește segmentele congruente din figurile de mai jos. Justifică răspunsul.



5. Explică de ce intersecția a două benzi dreptunghiulare de aceeași grosime determină un romb sau un pătrat.

6. În dreptunghiul $ABCD$, cu centrul în O , unul dintre unghiurile obtuze determinate de diagonale are 106° . Calculează măsurile unghiurilor triunghiurilor AOB și BOC .

7. În figura alăturată, $ABCD$ este pătrat, iar E, F, G, H împart laturile în segmente de lungimi a , respectiv b . Arată că $EFGH$ este pătrat.



8. În rombul $MNPQ$ diagonala MP formează cu una dintre laturi un unghi cu măsura de 43° . Determină măsurile unghiurilor rombului $MNPQ$.

9. Fie M mijlocul ipotenuzei BC a triunghiului dreptunghic ABC și N simetricul său față de mijlocul catetei AC . Arată că $AMCN$ este romb.

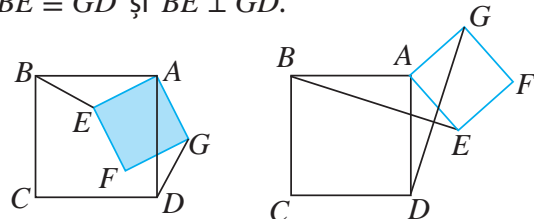
10. Se consideră pătratul $ABCD$ și punctul P pe dreapta BD , astfel încât $BP \equiv AB$. Calculează măsurile unghiurilor triunghiului BCP , dacă:
a) B este situat între D și P ;
b) P este situat între B și D .

11. Rombul $ABCD$ are $\sphericalangle D = 135^\circ$. Pe latura AB , în exteriorul rombului, se construiește pătratul $ABEF$. Demonstrează că $\triangle ACE$ este isoscel.

12. Într-un romb $ABCD$ fie E , respectiv F mijloacele segmentelor AD , respectiv CD . Segmentele BE și BF intersectează diagonala AC în M , respectiv N . Ce fel de patrulater este $BMDN$?

13. Două plăcuțe de faianță au forma a două romburi distincte $MNPQ$ și $MNSR$, cu latura MN comună. Arată că punctele R, N și Q nu pot fi coliniare.

14. Se consideră două pătrate $ABCD$ și $AEFG$, ca în figura alăturată. Demonstrează pentru ambele cazuri reprezentate că $BE \equiv GD$ și $BE \perp GD$.



15. Demonstrează că într-un triunghi dreptunghic înălțimea relativă la ipotenuză are lungimea egală cu un sfert din lungimea ipotenuzei dacă și numai dacă triunghiul are un unghi de 15° .

Alege și rezolvă în 5 minute!

Stabilește valoarea de adevăr a fiecărui enunț. Justifică.

A Orice romb este pătrat.

B Paralelogramul cu diagonalele congruente este dreptunghi.

C Un paralelogram în care o diagonală este bisectoarea unuia dintre cele două unghiuri corespunzătoare este romb.

O situație-problemă

De ce mesele din unele spații de lucru au formă de trapez?



La două mese îmbinate ar putea lucra foarte bine 6 copii!



Dacă laturile neparallele ale mesei sunt egale, le putem îmbina în mai multe moduri pentru lucrul în echipă!

Atunci și unghiurile s-ar „potrivi“...



Am putea aranja mesele câte 3	... câte 4	... câte 5	... sau câte 6

Vrem să știm!

Ce tipuri de trapeze putem identifica și ce proprietăți au acestea?

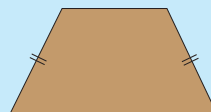
Definiție

Patrulaterul convex care are două laturi paralele și celelalte două neparallele se numește **trapez**.

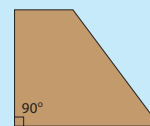


Trapeze particulare

Trapezul isoscel este un trapez care are laturile neparallele congruente.



Trapezul dreptunghic este trapezul care are un unghi drept.



Activitate în grup!

Analizați afirmațiile copiilor despre trapez și propuneți exemple, dacă afirmația este adevărată, sau contraexemplu, dacă afirmația este falsă.

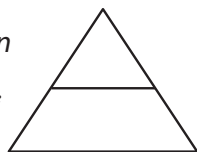


Într-un trapez, unghiurile alăturate fiecărei laturi neparallele sunt suplementare.

Corect, pentru că sunt unghiuri interne de aceeași parte a secantei formate de bazele paralele cu acea latură!



Ne putem imagina că un trapez isoscel provine dintr-un triunghi isoscel. Unghiurile alăturate unei baze ar trebui să fie congruente.



Și diagonalele cred că sunt congruente!



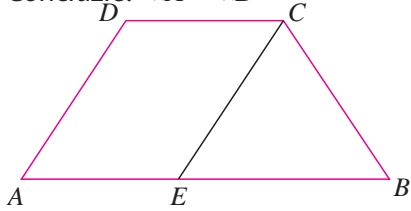
Condiții necesare și suficiente pentru ca un trapez să fie isoscel

T1. Un trapez este isoscel dacă și numai dacă trapezul are unghiurile alăturate unei baze congruente.

" \Rightarrow "

Ipoteză: $ABCD$ trapez isoscel,
 $AD \equiv BC$

Concluzie: $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$



Reciproc: " \Leftarrow "

Ipoteză: $ABCD$ trapez, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$

Concluzie: $AD \equiv BC$

" \Rightarrow "

Demonstrație:

Fie punctul E pe baza mare AB astfel încât $CE \parallel AD$. Patrulaterul $AECD$ are laturile opuse paralele, deci este paralelogram. Rezultă că: $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle BEC$ (ca unghiuri corespondente formate de dreptele paralele AD și CE cu secanta AB) și $AD \equiv CE$ (laturi opuse în paralelogram).

$AD \equiv BC$, deci $CE \equiv CB$. Triunghiul BEC este isoscel cu vârful în C , deci $\sphericalangle BEC \equiv \sphericalangle B$. În concluzie $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$.

Unghiurile alăturate bazei mici sunt suplementele unghiurilor congruente A și B , deci și ele sunt congruente.

Reciproc " \Leftarrow "

Demonstrație:

În triunghiul BEC avem $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle BEC$, deci $CE \equiv CB$.

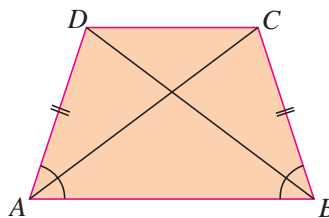
Rezultă $AD \equiv BC$.

T2. Un trapez este isoscel dacă și numai dacă trapezul are diagonalele congruente.

" \Rightarrow "

Ipoteză: $ABCD$ trapez isoscel,
 $AD \equiv BC$

Concluzie:
 $BD \equiv AC$



" \Rightarrow "

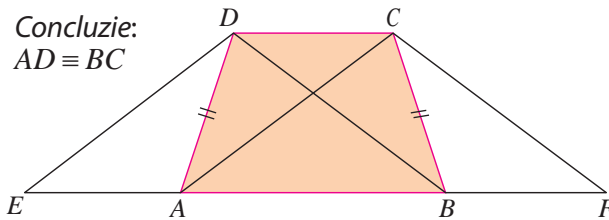
Demonstrație:

Conform teoremei anterioare $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle CBA$ și latura AB este comună, deci $\triangle DAB \equiv \triangle CBA$ (cazul $L.U.L.$). Rezultă $BD \equiv AC$.

Reciproc: " \Leftarrow "

Ipoteză: $ABCD$ trapez, $BD \equiv AC$

Concluzie:
 $AD \equiv BC$



Reciproc: " \Leftarrow "

Demonstrație:

Construim paralela prin D la AC care intersectează AB în E și paralela prin C la BD care intersectează AB în F . $AEDC$ și $BFC D$ sunt paralelograme.

Rezultă $DC \equiv AE$ și $DC \equiv BF$, apoi $AE \equiv BF$, de unde $BE \equiv AF$. Deducem $\triangle DEB \equiv \triangle CAF$ (cazul $L.L.L.$), deci $\sphericalangle DBE \equiv \sphericalangle CAF$.

Avem și $\triangle DAB \equiv \triangle CBA$ (cazul $L.U.L.$) $\Rightarrow AD \equiv BC$.

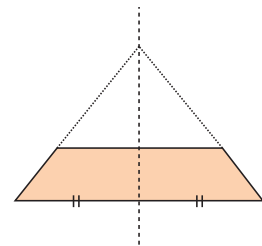
Activitate în grup

Analizați dialogurile și propuneți exemple sau contraexemplu, după caz.



Prelungind laturile neparallele ale trapezului isoscel, obținem un triunghi isoscel.

Mediatoarea bazei mari este atunci și mediatoarea bazei mici în trapezul isoscel!



Mediatoarea bazei mari conține atunci vârful triunghiului isoscel obținut.



...și această dreaptă este axa de simetrie a trapezului isoscel.



Exprimare orală

Care sunt proprietățile trapezului isoscel?

Evaluăm nivelul de bază

1. Dacă $ABCD$ este un trapez isoscel cu bazele AB și CD , ce se poate afirma despre pozițiile dreptelor AB și CD , respectiv despre lungimile laturilor AD și BC ?
2. Adevărat sau fals? Dacă un trapez dreptunghic are un unghi de 60° , atunci are și un unghi de 30° .

Probleme rezolvate

1. Pe cateta AC a unui triunghi dreptunghic isoscel ABC se construiește, în exterior, un alt triunghi dreptunghic isoscel ADC , cu $\sphericalangle ADC = 90^\circ$. Ce fel de patrulater este $ABCD$?

Rezolvare:

Ipoteză: $\triangle ABC$, $\sphericalangle A = 90^\circ$, $AB \equiv AC$

$\triangle ADC$, $\sphericalangle D = 90^\circ$, $AD \equiv DC$

Concluzie:

Natura patrulaterului $ABCD$?

Demonstrație:

Analizăm poziția dreptei AD față de dreapta BC .

$$\triangle ABC \text{ și } \triangle ADC \text{ dreptunghice isoscele} \Rightarrow \begin{cases} \sphericalangle BCA = \sphericalangle ABC = 45^\circ & (1) \\ \sphericalangle DAC = \sphericalangle DCA = 45^\circ & (2) \end{cases}$$

$$\text{Din relațiile (1) și (2)} \Rightarrow \sphericalangle BCD = \sphericalangle BCA + \sphericalangle ACD = 90^\circ \Rightarrow BC \perp CD \quad (3)$$

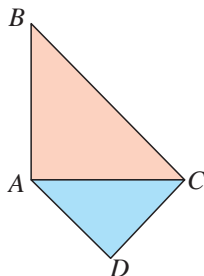
$$\sphericalangle ADC = 90^\circ \Rightarrow AD \perp DC \quad (4)$$

Din relațiile (3) și (4) $\Rightarrow AD \parallel BC$ (sunt perpendiculare pe aceeași dreaptă).

Analizăm poziția dreptei AB față de dreapta CD .

Din relația (1) $\Rightarrow \sphericalangle ABC = 45^\circ$, iar $\sphericalangle BCD = 90^\circ \Rightarrow AB \parallel CD$.

Din $AD \parallel CD$ și $AB \parallel CD \Rightarrow ABCD$ este trapez dreptunghic.



2. Demonstrează că, într-un trapez oarecare $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, au loc egalitățile

$$d(A, CD) = d(B, CD) = d(C, AB) = d(D, AB).$$

Rezolvare:

Ipoteză: $ABCD$ trapez oarecare $AB \parallel CD$

Concluzie: $d(A, CD) = d(B, CD) = d(C, AB) = d(D, AB)$

Demonstrație:

Notăm cu E, F, G și H picioarele perpendiculelor din A pe CD , din B pe CD , din C pe AB și respectiv din D pe AB . Atunci $d(A, CD) = AE$, $d(B, CD) = BF$, $d(C, AB) = CG$ și $d(D, AB) = DH$.

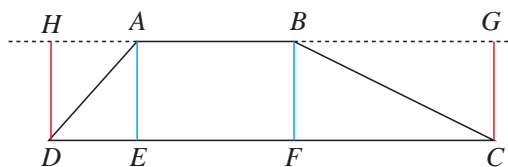
Vom demonstra că $ABFE$ este dreptunghi:

$AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel EF$; $AE \perp CD$ și $BF \perp CD \Rightarrow AE \parallel BF$;

din $AB \parallel EF$, $AE \parallel BF$ și $\sphericalangle AEF = 90^\circ \Rightarrow ABFE$ dreptunghi, cu $AE \equiv BF$.

Analog se demonstrează că $CGHD$ e dreptunghi, cu $CG \equiv DH$ și $AEDH$ este dreptunghi, cu $AE \equiv DH$.

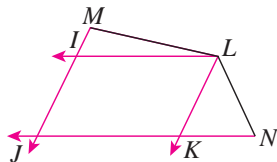
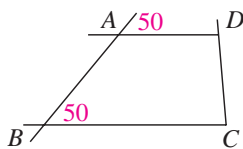
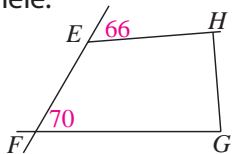
Atunci: $AE \equiv BF \equiv CG \equiv DH \Rightarrow d(A, CD) = d(B, CD) = d(C, AB) = d(D, AB)$.



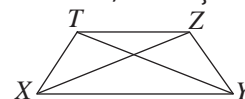
Ce condiții trebuie să îndeplinească laturile unui patrulater pentru ca acest patrulater să fie trapez isoscel?

**Gândim critic
și constructiv!**

1. Identifică și numește trapezele, ținând cont de datele menționate pe figură și de faptul că \rightleftarrows indică perechi de drepte paralele.



2. Pentru trapezul din figura alăturată, numește bazele, laturile neparalele, diagonalele și perechile de unghiuri suplementare.

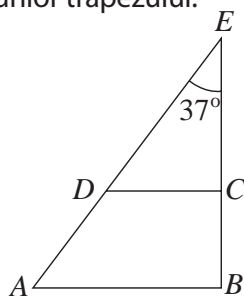


3. În trapezul $ABCD$ cu baza mare AB , $\sphericalangle B = 42^\circ 27'$. Calculează măsura unghiului C .
4. Un tâmplar a tăiat o scândură de forma unui trapez dreptunghic cu un unghi cu măsura de 70° . Calculează măsurile tuturor unghiurilor trapezului.



5. a) Desenează un trapez isoscel având bazele de 3 cm și de 8 cm. Măsoară lungimea proiecțiilor laturilor neparalele pe baza mare.
- b) Desenează un trapez isoscel cu proprietatea că lungimea proiecțiilor laturilor neparalele pe baza mare este de 2 cm.
6. Într-un trapez, unul dintre unghiurile adiacente bazei mari are 52° , iar celălalt unghi adiacent aceleiași baze este cu 8° mai mic decât primul. Calculează măsurile unghiurilor trapezului.

7. În trapezul dreptunghic $ABCD$, unghiurile B și C sunt drepte, iar laturile neparalele se intersectează în E . Știind că $\sphericalangle AEB = 37^\circ$, calculează măsurile celorlalte două unghiuri ale trapezului.



8. În trapezul dreptunghic $ABCD$ cu bazele AB și CD , $\sphericalangle A = 90^\circ$, iar diagonala AC separă trapezul într-un triunghi dreptunghic și un triunghi isoscel. Știind că $\sphericalangle ACB = 76^\circ$, calculează măsurile unghiurilor trapezului $ABCD$.
9. Ana a tăiat o coală de hârtie având forma unui trapez isoscel. Înălțimea formează un unghi cu măsura de 37° cu una dintre laturile neparalele. Calculează măsurile unghiurilor trapezului.
10. În trapezul isoscel $ABCD$ cu baza mică AB , se duc înălțimile AE și BF , astfel încât $AEFB$ este pătrat cu latura de 4 cm și $DE = 3$ cm. Calculează lungimea bazei mari și a laturilor neparalele.
11. Fie dreptunghiul $ABCD$ și punctele M și N pe dreapta CD , astfel încât $DM \equiv CN$. Stabilește în ce situație patrulaterul $ABMN$ este trapez isoscel.

12. Fie $ABCD$ paralelogram, cu $AD \equiv DB$. Se prelungeste segmentul AD cu segmentul DE , astfel încât $AD \equiv DE$ și se notează cu F punctul de intersecție al segmentelor DC și BE . Demonstrează că $ABFD$ este trapez dreptunghic și calculează raportul bazelor lui.

13. Fie $ABCD$ trapez dreptunghic cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $\sphericalangle A = 90^\circ$ și $AB \equiv AC$. Arată că bisectoarea $\sphericalangle ACD$ este perpendiculară pe BC .
14. Fie $ABCD$ trapez cu $AB \parallel CD$ și punctul P pe segmentul CD . Notăm cu M mijlocul lui BC și cu N simetricul lui P față de M . Arată că punctele A, B, N sunt coliniare.

15. Se consideră trapezul $ABCD$ în care $AB > CD$, $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90^\circ$, $AB \equiv AD$ și punctul E situat pe latura AD astfel încât $AE \equiv CD$. Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor AC , respectiv BE . Dacă $DM \equiv MN$, află măsura unghiului ABE .

Alege și rezolvă în 5 minute!

- A** Dacă $ABCD$ este un trapez isoscel cu baza mică AB , stabilește care dintre afirmațiile de mai jos sunt adevărate: a) $\sphericalangle D \equiv \sphericalangle C$; b) $AB \equiv AC$; c) $AC \equiv BD$.

- B** Se consideră trapezul dreptunghic $ABCD$, cu baza mică $AB = 3$ cm și E piciorul perpendicularei duse din B pe CD , iar $EC = 4$ cm. Calculează lungimea bazei mari a trapezului.

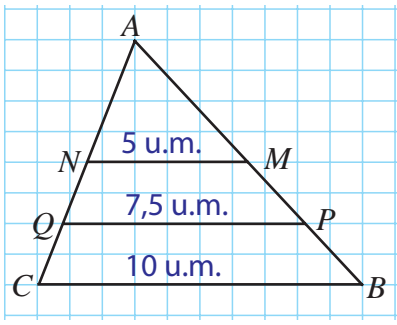
- C** În trapezul isoscel $ABCD$, cu baza mare AB , măsura unghiului A este egală cu patru cincimi din măsura unghiului D . Calculează măsurile unghiurilor trapezului $ABCD$.

O situație-problemă

Parapeții de siguranță ai podului din imagine au formă de trapez. Pentru a mări rezistența lor, constructorii vor să adauge câte o bârnă orizontală (cea roșie) care unește mijloacele laturilor neperalele. Ce lungime ar trebui să aibă aceste bârne?



Pe foaia cu pătrățele am desenat o schemă. În triunghiul ABC, M este mijlocul lui AB, P al lui MB, N al lui AC și Q al lui NC. Observ că lungimea lui MN este jumătate din lungimea lui BC.



Iar lungimea lui PQ este semisuma lungimilor segmentelor MN și BC. Este BCNM trapez? Oare pot calcula și lungimea bârnei de culoare roșie în același mod?



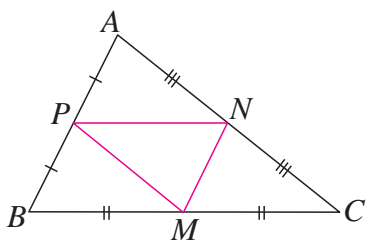
Vrem să știm!

Ce proprietăți are segmentul determinat de mijloacele a două laturi ale unui triunghi sau de mijloacele laturilor neperale ale unui trapez?

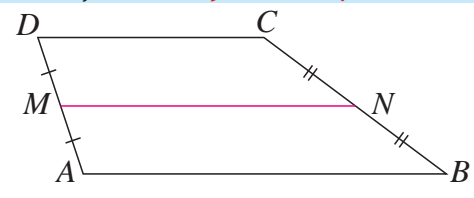
Definiție

Segmentul determinat de mijloacele a două laturi ale unui triunghi se numește **linie mijlocie în triunghi**.

În triunghiul ABC, de exemplu, segmentele MN, NP și PM sunt liniile mijlocii ale triunghiului ABC.



Segmentul determinat de mijloacele laturilor neperale ale unui trapez se numește **linia mijlocie a trapezului**.

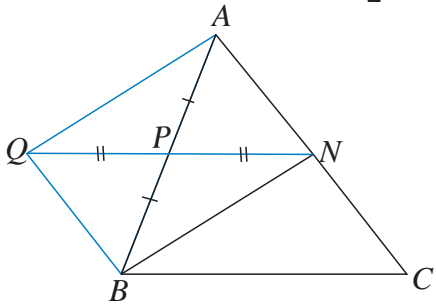


Segmentul MN este linia mijlocie a trapezului ABCD.

Demonstrăm!

T1. Linia mijlocie determinată de mijloacele a două dintre laturile unui triunghi este paralelă cu latura a treia și are lungimea egală cu jumătate din lungimea laturii a treia.

Ipoteză: ABC triunghi oarecare, P mijlocul lui AB, N mijlocul lui AC
Concluzie: $PN \parallel BC$ și $PN = \frac{1}{2} BC$



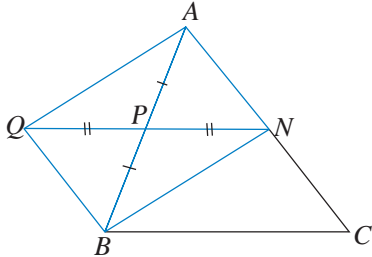
Demonstrație:

Fie Q simetricul lui N față de P.
 Patrulaterul ANBQ este paralelogram pentru că diagonalele sale au același mijloc.
 Rezultă că $AN \equiv BQ$ și cum $AN \equiv NC$, deducem $BQ \equiv NC$. Patrulaterul BQNC are laturile BQ și NC paralele și congruente, deci este paralelogram.
 Atunci $QN \parallel BC$ și $QN \equiv BC$,
 deci $PN \parallel BC$ și $PN = \frac{1}{2} QN = \frac{1}{2} BC$.

T2. Dacă prin mijlocul laturii unui triunghi ducem o paralelă la una dintre laturile triunghiului, atunci această paralelă intersectează a treia latură a triunghiului în mijlocul acesteia.

Ipoteză: ABC triunghi oarecare,
 P mijlocul lui AB , $PN \parallel BC$, $N \in AC$

Concluzie: N mijlocul lui AC



Demonstrație:

Fie triunghiul ABC , P mijlocul lui AB și N punctul în care paralela prin P la BC intersectează AC .

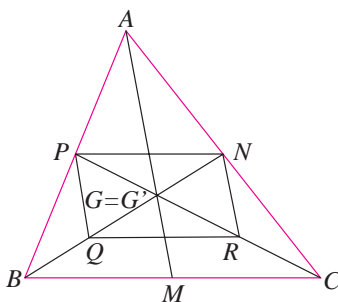
Construim Q simetricul lui N față de P .

Patrulaterul $ANBQ$ este paralelogram pentru că diagonalele sale au același mijloc. Atunci $QB \parallel AN$ și $QB \equiv AN$.

Patrulaterul $BCNQ$ este paralelogram pentru că are laturile opuse paralele, deci $QB \equiv NC$.

În concluzie, $AN \equiv NC$ și cum N este punct al laturii AC , rezultă că este mijlocul acesteia.

Aplicație: Medianele laturilor unui triunghi sunt concurente.



Demonstrație:

Considerăm triunghiul ABC , M, N, P mijloacele laturilor BC, AC , respectiv AB . Notăm cu G punctul de intersecție al medianelor BN și CP , cu Q și R mijloacele segmentelor BG , respectiv CG .

PN este linie mijlocie în triunghiul ABC , deci $PN \parallel BC$ și $PN = \frac{1}{2}BC$.

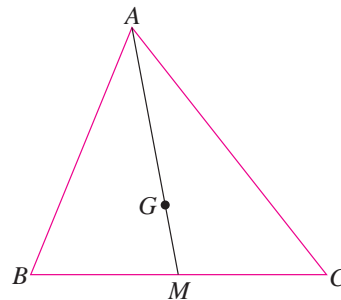
QR este linie mijlocie în triunghiul GBC , deci $QR \parallel BC$ și $QR = \frac{1}{2}BC$.

Rezultă $PN \parallel QR$ și $PN \equiv QR$, deci $PNRQ$ este paralelogram; diagonalele acestuia vor avea același mijloc, ca urmare $QG \equiv GN$ și $RG \equiv GP$.

Notăm cu G' punctul de intersecție a medianelor AM și BN . Analog demonstrăm că $QG' \equiv G'N$. Avem deci G, G' puncte din interiorul segmentului BN astfel încât $NG \equiv NG'$, deci $G = G'$, adică medianele triunghiului sunt concurente.

Definiție Punctul de intersecție a medianelor unui triunghi se numește **centrul de greutate al triunghiului**.

Centrul de greutate al unui triunghi este plasat pe fiecare mediană la o treime din lungimea medianei față de latura corespunzătoare ei.

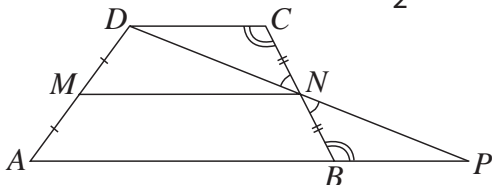


$$GM = \frac{AM}{3}$$

T3. Linia mijlocie a trapezului este paralelă cu bazele trapezului și are lungimea egală cu semisuma lungimilor bazelor trapezului.

Ipoteză: $ABCD$ trapez cu $AB \parallel CD$,
 M mijlocul lui AD , N mijlocul lui BC

Concluzie: $MN \parallel AB$, $MN = \frac{AB+CD}{2}$



Demonstrație:

Prelungim DN până când intersectează AB în P . Triunghiurile CND și BNP sunt congruente conform cazului *U.L.U.* Deducem $DC \equiv BP$.

MN este linie mijlocie în triunghiul ADP ,

deci $MN \parallel AB$ și $MN = \frac{AP}{2} = \frac{AB+CD}{2}$

Evaluăm nivelul de bază

Linia mijlocie determinată de mijloacele a două laturi ale unui triunghi are lungimea de 3 cm. Ce lungime are a treia latură a triunghiului?

Problemă rezolvată

Dacă într-un triunghi două mediane sunt congruente, atunci triunghiul este isoscel.

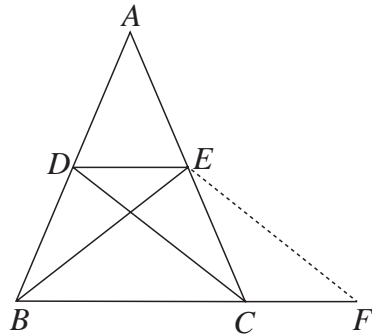
Ipoteză:

ABC triunghi, D mijlocul lui AB

E mijlocul lui AC , $CD \equiv BE$

Concluzie:

ΔABC isoscel



Demonstrație:

Pentru a arăta că ΔABC este isoscel, demonstrăm că $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$.

Construim $EF \parallel CD$, cu $F \in BC$.

DE linie mijlocie în $\Delta ABC \Rightarrow DE \parallel BC$ (1)

Din $DE \parallel BC$ și $EF \parallel DC \Rightarrow DEFC$ paralelogram

Obținem $DC \equiv EF$ (1) și $\sphericalangle EDC \equiv \sphericalangle F$ (2)

Din $CD \equiv BE$ și relația (1) $\Rightarrow BE \equiv EF \Rightarrow \Delta BEF$ isoscel

$\Rightarrow \sphericalangle EBC \equiv \sphericalangle F$ (3)

Din relațiile (2) și (3) $\Rightarrow \sphericalangle EDC \equiv \sphericalangle EBC$ (4)

$DE \parallel BC$ și CD secantă $\Rightarrow \sphericalangle EDC \equiv \sphericalangle DCB$ (alterne interne) \Rightarrow
 $\sphericalangle EBC \equiv \sphericalangle DCB$

$BC \equiv BC$, $CD \equiv BE$ și $\sphericalangle EBC \equiv \sphericalangle DCB \Rightarrow \Delta DBC \equiv \Delta ECB$ ^{L.U.L}

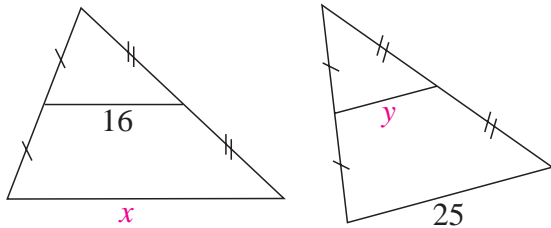
$\Rightarrow \sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle ECB \Rightarrow \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB \Rightarrow \Delta ABC$ este isoscel.

Exprimare orală

Ce proprietate a liniei mijlocii s-a folosit în rezolvarea problemei? Explică unde intervine aceasta.

Probleme propuse

1. Determină x și y în triunghiurile de mai jos știind că datele sunt exprimate în milimetri.



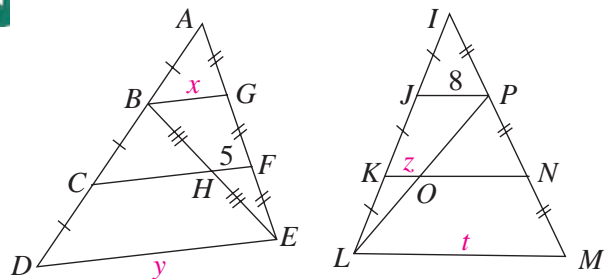
2. În triunghiul ABC , M este mijlocul laturii AB și N este mijlocul laturii AC .
- a) Dacă $BC = 6$ cm, află lungimea lui MN .
- b) Dacă $MN = 3,7$ cm, află lungimea laturii BC .

3. Papagalul Riki stă pe un suport ce are forma unui trapez cu baza mare de 11 cm și linia mijlocie de 7 cm. Calculează lungimea bazei mici.



4. În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, M mijlocul laturii AD și N mijlocul laturii BC . Ce lungime are segmentul MN , dacă $AB = 6$ cm și $CD = 9$ cm.

5. Calculează lungimile segmentelor notate cu litere în figurile următoare. Datele sunt în milimetri.



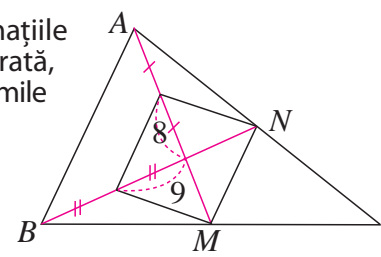
6. În triunghiul MNP se consideră punctele Q și R pe laturile MN și respectiv MP astfel încât $MQ = 2$ cm, $QN = 0,2$ dm, $MR = 30$ mm și $RP = 0,03$ m. Argumentează de ce $QR \parallel NP$ și $QR = \frac{1}{2} \cdot NP$.

7. În triunghiul echilateral ABC , MN este linie mijlocie. Dacă lungimea lui MN este de 4 cm, calculează perimetrul triunghiului ABC .

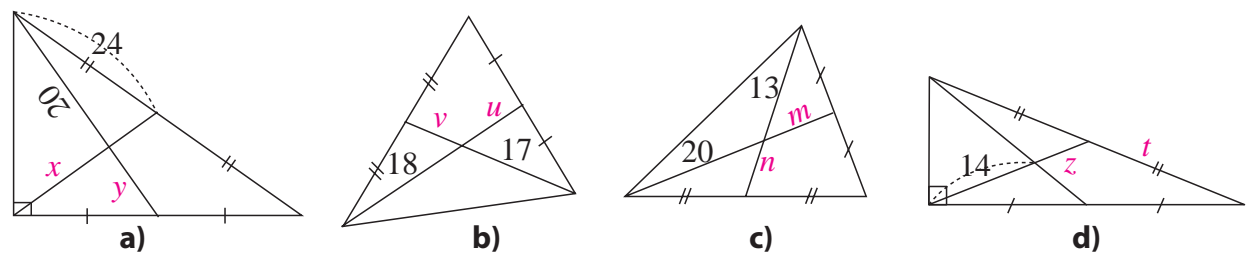
8. Desenează un triunghi cu laturile de 6 cm, 8 cm și 10 cm și cele trei linii mijlocii ale sale, precizând lungimea fiecăreia.

9. Desenează un trapez dreptunghic cu bazele de 5 cm și 9 cm și latura perpendiculară pe ele de 6 cm. Trasează linia sa mijlocie și precizează lungimea acesteia.
10. Perimetrul triunghiului isoscel ABC , cu $AB \equiv AC$, este de 22 cm. Dacă $AB + AC = 16$ cm, calculează lungimile liniilor mijlocii ale triunghiului ABC .
11. În triunghiul ABC se consideră mediana AM și G centrul său de greutate.
- Dacă $AM = 9$ cm, calculează lungimea segmentelor AG și GM .
 - Dacă $GM = 2$ cm, calculează lungimea segmentelor AM și AG .
 - Dacă $AG = 2,4$ cm, calculează lungimea segmentelor AM și GM .

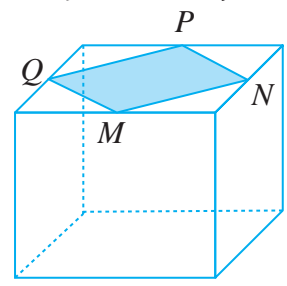
12. În paralelogramul $ABCD$, M și N sunt mijloacele laturilor AB și respectiv BC , iar O este punctul de intersecție al diagonalelor. Demonstrează că AN , CM și DO sunt concurente.
13. În triunghiul ABC , M și N sunt mijloacele laturilor AB , respectiv AC . Demonstrează că punctul A , mijlocul segmentului MN și mijlocul segmentului BC sunt coliniare.
14. Folosind informațiile din figura alăturată, calculează lungimile medianelor AM și BN .



15. Calculează lungimile notate cu litere în figurile de mai jos. Lungimile sunt date în milimetri.



16. În triunghiul ABC , D și E sunt mijloacele laturilor AB și AC . Demonstrează că mijloacele înălțimii, bisectoarei și mediane din A se află pe dreapta DE .
17. Pe fața superioară a unui paralelipiped dreptunghic s-a trasat patrulaterul $MNPQ$, cu proprietatea că fiecare vârf al său este mijlocul unei muchii a paralelipipedului.
- Demonstrează că $MNPQ$ este romb.
 - Pentru ca $MNPQ$ să fie pătrat, ce fel de paralelipiped ar fi necesar?



18. Fie triunghiul ABC , $AC = 5$ cm și M_1, N_1 mijloacele laturilor AB , respectiv BC .
- Calculează lungimea segmentului M_1N_1 .
 - Fie M_{i+1}, N_{i+1} mijloacele segmentelor M_iA , respectiv N_iC , unde $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Calculează lungimea segmentului M_nN_n .

Alege și rezolvă în 5 minute!

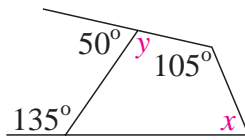
A În triunghiul ABC , DE este linie mijlocie și are lungimea de 3,5 cm, $DE \parallel BC$. Ce lungime are latura BC ?

B Suportul unui flipchart are forma unui trapez cu lungimea bazei mari de 6,5 dm, iar a bazei mici de 3,5 dm. Ce lungime are linia mijlocie a trapezului?

C Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC și M mijlocul lui AG . Paralela prin G la BC intersectează AB în punctul D . Demonstrează că paralela prin M la BC intersectează segmentul AD în mijlocul acestuia.

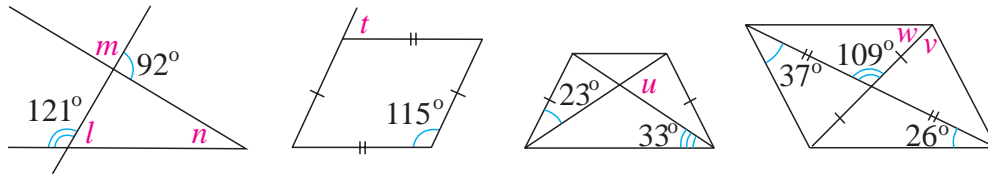
Recapitulăm prin probleme

1. Determină măsurile unghiurilor notate cu x și y din desenul alăturat.

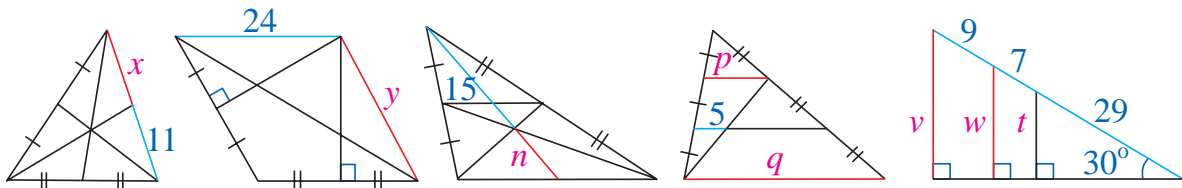


2. În patrulaterul convex $ABCD$, $\sphericalangle B = \sphericalangle A + 12^\circ$, $\sphericalangle C = \sphericalangle B + 12^\circ$ și $\sphericalangle D = \sphericalangle C + 12^\circ$. Calculează măsurile unghiurilor patrulaterului $ABCD$.

3. Folosind datele din fiecare figură, calculează măsurile notate cu litere.



4. Află lungimile notate cu litere pentru figurile de mai jos. Atenție la ipotezele precizate pe desen!



5. a) Demonstrează că patrulaterul determinat de mijloacele laturilor unui patrulater oarecare $ABCD$ este un paralelogram, numit *paralelogramul lui Varignon*.

b) În ce condiții paralelogramul lui Varignon este romb?

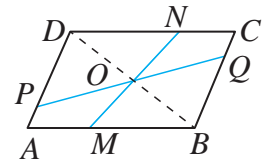
c) În ce condiții paralelogramul lui Varignon este dreptunghi?

6. Fie $MNPQ$ un trapez cu baza mare MN . Perpendiculara din Q pe MP intersectează MN în R și perpendiculara din N pe MP intersectează PQ în S . Arată că $RNSQ$ este paralelogram.

7. Trapezul $ABCD$ este isoscel, cu baza mare AB , iar $E, F \in AB$ astfel încât $CE \perp AB$ și $DF \perp AB$. Știind că $CDFE$ este pătrat, $AD = 5$ cm și $CE = 3$ cm, calculează lungimea liniei mijlocii a trapezului $ABCD$.

8. Se consideră un paralelogram $ABCD$, cu centrul O prin care se duc dreptele oarecare MN și PQ , ca în figura de mai jos.

Demonstrează că $MPNQ$ este paralelogram.



9. Fie un triunghi ABC , cu $\sphericalangle B = 2 \cdot (\sphericalangle C)$. Bisectoarea unghiului B intersectează segmentul AC în D . Fie E simetricul lui D în raport cu BC . Stabilește natura patrulaterului $BECD$.

10. În exteriorul pătratului $ABCD$ se construiesc triunghiurile echilaterale ADE și DCF . Arată că $EB = AF$ și $EB \perp AF$.

11. AB, AC și BC sunt alei într-un parc, iar D este mijlocul lui BC . Dovedește că distanța de la A la D nu poate fi mai mare decât media aritmetică a lui AB și AC .

12. (Teorema lui Thebault) În exteriorul paralelogramului $ABCD$ se construiesc pătratele $ABEF, BCGH, CDJI$ și $DALK$, având centrele M, N, O și respectiv P . Demonstrează că:

a) $\triangle ODP \equiv \triangle OCN$;

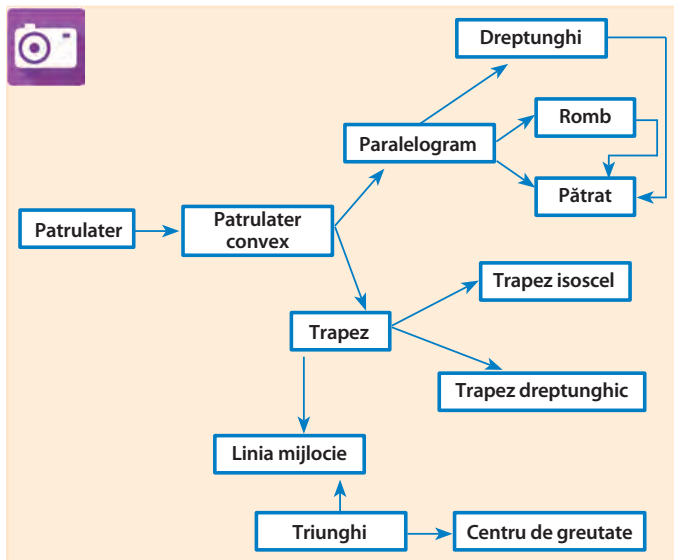
b) $MNOP$ este romb;

c) $MNOP$ este pătrat.

13. Fie $ABCD$ un patrulater convex, E mijlocul laturii AB și F mijlocul lui CD . Arată că $EF \leq \frac{AD+BC}{2}$.



Ce am învățat?



Rezolv testele pentru a verifica dacă pot:

- să folosesc proprietățile patrulaterelor când rezolv probleme;
- să identific linia mijlocie a unui triunghi sau a unui trapez și să utilizez proprietățile acestuia în rezolvarea unor probleme;
- să aplic în rezolvarea unor probleme cu patrulater rezultate studiate la paralelism, perpendicularitate și proprietăți ale triunghiurilor;
- să aleg reprezentări potrivite pentru a calcula lungimile unor segmente și măsurile unor unghiuri;
- să demonstrez, utilizând proprietățile specifice, că un patrulater dintr-o reprezentare geometrică este unul particular.

TESTUL 1

1. Un patrulater convex are două unghiuri drepte și un alt unghi cu măsura de 30° . Calculează măsura celui de-al patrulea unghi al patrulaterului.
2. Determină lungimea liniei mijlocii a unui trapez cu lungimile bazelor de 4 cm și 7 cm.
3. Într-un paralelogram, suma lungimilor laturilor sale este egală cu 48 cm, iar lungimea unei laturi este egală cu dublul lungimii alteia. Calculează lungimile laturilor paralelogramului.
4. Un plic are formă dreptunghiulară. O diagonală formează cu o latură un unghi cu măsura de 40° . Determină măsurile unghiurilor formate de cele două diagonale.
5. Fie triunghiul ABC dreptunghic în A , M mijlocul laturii BC și N simetricul lui M în raport cu mijlocul laturii AC . Demonstrează că $AMCN$ este romb.

TESTUL 2

1. Un romb are un unghi de 60° și diagonala opusă acestuia are lungimea de 6 cm. Calculează suma lungimilor laturilor rombului.
2. În triunghiul ABC , M este mijlocul laturii AB , iar N al laturii AC . Dacă $MN = 5,6$ dm, determină lungimea laturii BC .
3. Banca unui elev are formă de trapez isoscel cu un unghi de 50° . Determină măsurile celorlalte unghiuri ale trapezului.
4. Demonstrează că distanțele de la centrul unui paralelogram la două din laturile opuse ale acestuia sunt egale.
5. Fie $ABCD$ dreptunghi, P și Q situate pe latura CD astfel încât $CQ = DP < \frac{CD}{2}$ și $\{E\} = AP \cap BQ$. Arată că:
 - a) $APQB$ este trapez isoscel;
 - b) punctele E , F , G și O sunt coliniare, unde F este mijlocul lui CD , G mijlocul lui AB și O punctul de intersecție a diagonalelor dreptunghiului.



Spirala radicalilor

Plan de lucru

- ✓ **Materiale necesare:** coli de hârtie, riglă, echer, compas, foarfecă.
- ✓ **Scop:** Veți realiza modele decorative folosind spirala radicalilor.

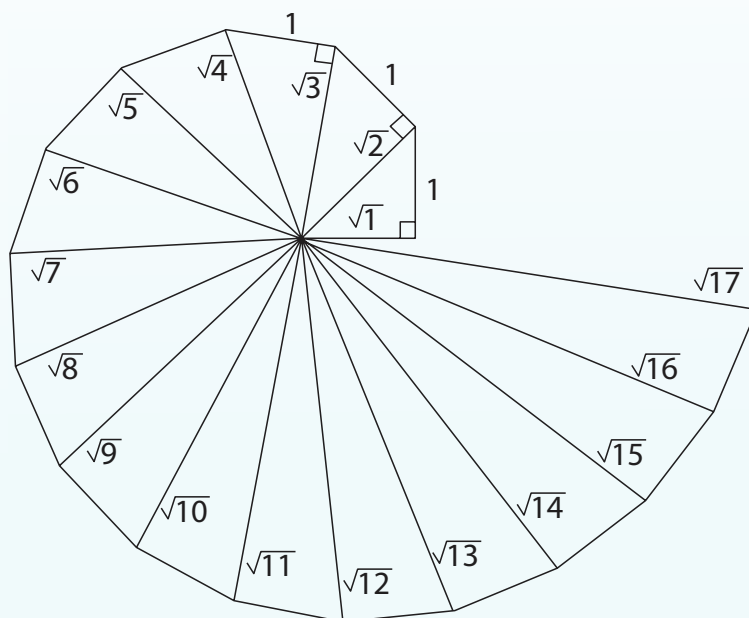
Realizarea proiectului

Lucrați în echipe de câte trei, patru sau cinci colegi!

- ✓ Realizați modele ale spiralei radicalilor, folosind culoare și imaginație. Puteți continua spirala cât doriți de mult.
- ✓ Alegeți o altă dimensiune a catetei triunghiului isoscel de la care ați pornit, construiți noua spirală și notați pe ipotenuze lungimile acestora în forma cea mai simplă (extrăgând factorii de sub radical).
- ✓ Combinați spiralele într-o compoziție interesantă și plăcută privirii.

Pentru început:

- ✓ Desenați separat primele 5 triunghiuri care apar în spirala din imagine.
- ✓ Aplicați teorema lui Pitagora și notați în dreptul fiecărui triunghi relația folosită pentru a determina ipotenuza acestuia.



Interacțiune

În echipa voastră:

- ✓ Discutați etapele proiectului și împărțiți sarcinile în cadrul echipei.
- ✓ Rezolvați fiecare propria sarcină, dar colaborați și cu ceilalți pentru a obține la final un produs al întregii echipe.
- ✓ Căutați să realizați modele care conduc la figuri geometrice diferite.
- ✓ Discutați și stabiliți forma finală a posterului pe care aplicați toate materialele realizate.

Prezentare

Lucrați cu toată clasa!

Expuneți posterele realizate.

- ✓ Fiecare echipă va evalua posterele celorlalte echipe.
 - Alegeți prin vot posterul care v-a plăcut cel mai mult.
 - Atenție! Nicio echipă nu votează propriul poster.
- ✓ Stabiliți clasamentul final, totalizând punctele propuse de fiecare echipă.

Rezolvând exercițiile următoare, îți vei aminti noțiuni și rezultate necesare pentru parcurgerea acestei Unități de învățare. Fiecare exercițiu se punctează cu 1 punct. Se acordă 1 punct din oficiu.

I. Scrie pe foaia de rezolvare litera corespunzătoare răspunsului corect pentru următoarele exerciții:

Se consideră mulțimea $A = \left\{ -4; -2\frac{1}{3}; -1,02; -1; 0,(4); 1\frac{24}{25}; 2; 6; 23 \right\}$.

Mulțimea numerelor naturale

1. Mulțimea $A \cap \mathbb{N}$ este egală cu:

A. $\{-4; -1; 2; 6; 23\}$; B. $\{2; 6; 23\}$; C. $\{0; 2; 6; 23\}$; D. $\{-4; -1,02; 2; 6\}$.

Mulțimea numerelor întregi

2. Mulțimea $A \cap \mathbb{Z}$ este egală cu:

A. $\{-4; -1; 2; 6; 23\}$; B. $\{-4; -1\}$; C. $\{2; 6; 23\}$; D. $\left\{ -2\frac{1}{3}; 1\frac{24}{25} \right\}$.

Mulțimea numerelor raționale

3. Mulțimea $(A \cap \mathbb{Q}) \setminus \mathbb{Z}$ este egală cu:

A. $\{-1,02; 0,(4)\}$; B. $\left\{ -2\frac{1}{3}; 1\frac{24}{25} \right\}$; C. $\{2; 6; 23\}$; D. $\left\{ -2\frac{1}{3}; -1,02; 0,(4); 1\frac{24}{25} \right\}$.

II. Scrie pe foaia de rezolvare soluțiile complete ale exercițiilor următoare:

Aproximarea numerelor raționale

4. Aproximează prin lipsă, apoi prin adaos la o zecime, apoi la o sutime, numărul 231,17094.

Compararea numerelor raționale

5. Determină cel mai mic dintre numerele $\left(\frac{2}{3}\right)^{33}$ și $\left(\frac{1}{4}\right)^4$.

Ordonarea și reprezentarea pe axă a numerelor raționale

6. Ordonează crescător și reprezintă pe axa numerelor următoarele numere: $-4,5; 6; 1\frac{1}{2}; -5; 2,(6); -\frac{14}{4}; 3; 0; 2,6$.

III. Scrie pe foaia de rezolvare litera corespunzătoare răspunsului corect pentru următoarele exerciții:

Operații cu numere întregi

7. Rezultatul calculului $-44 : \left\{ [(-8 - 5 \cdot 4) : (-14) + 4] + 5 \right\} + 4$ este:

A. 8; B. -8; C. 0; D. -4.

Modulul unui număr rațional

8. Rezultatul calculului $\left| 2\frac{1}{6} - \frac{1}{3} \right| + \left| -\frac{4}{9} - \frac{1}{2} \right| - |-7| \cdot \left| -\frac{1}{9} \right|$ este:

A. 1; B. $\frac{23}{9}$; C. 2; D. $\frac{1}{3}$.

Ordinea efectuării operațiilor cu puteri

9. Rezultatul calculului $\left(-\frac{3}{8}\right) \cdot (-2)^4 : \left(-\frac{1}{0,5}\right)^2$ este:

A. -1,5; B. 3; C. -3; D. -6.

Dacă ai obținut mai puțin de jumătate din punctaj la acest test, este util să revezi definițiile și proprietățile verificate mai sus, pentru a înțelege mai bine ceea ce urmează.

O situație-problemă

La un magazin, păpușile Matrioska se vând separat. Cea mai mare dintre ele costă 120 lei și fiecare costă o treime din prețul celei imediat mai mari. Ce preț are cea de-a șasea păpușă?

Rezolvare

Folosim un calculator de buzunar pentru a face calcule; de fiecare dată împărțim rezultatul afișat la 3. Obținem prețul în lei pentru:

- Prima păpușă: 120
- A doua păpușă: 40
- A treia păpușă: 13,33333333...
- A patra păpușă: 4,44444444...
- A cincea păpușă: 1,481481481481.....
- A șasea păpușă: 0,49382716049382.....



Am observat că obținem numere care au, după virgulă, zecimale care se repetă periodic!

Vrem să știm! >>>

Există numere ale căror zecimale nu se repetă periodic?

Ne amintim ...

Numerele raționale se pot scrie cu linie de fracție (reprezentare fracționară) sau cu virgulă (reprezentare zecimală).

Reprezentare fracționară	Reprezentare zecimală	Exemplu
✓ prin fracție al cărei numitor este de forma $2^n \cdot 5^p$ ($n, p \in \mathbb{N}$)	cu număr finit de cifre nenule	$\frac{3}{5} = 0,6$
✓ prin fracție ireductibilă al cărei numitor conține numai factori primi diferiți de 2 și de 5	periodică simplă	$\frac{19}{11} = 1,(72)$
✓ prin fracție ireductibilă al cărei numitor conține factorii 2 sau 5 precum și alți factori primi, diferiți de aceștia	periodică mixtă	$\frac{7}{12} = 0,58(3)$



Observăm și definim!

Considerăm următoarele două exemple de numere:

1,101001000100001000001000000100000001...
 2 cifre 3 cifre 4 cifre 5 cifre 6 cifre 7 cifre

$\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887242097...$

Matematicienii au demonstrat că exprimarea zecimală a lui $\sqrt{2}$ continuă fără ca zecimalele să se repete periodic.



După virgulă, aceste numere au o succesiune nesfârșită de zecimale, însă fără perioadă.

Nu pot fi scrise nici ca fracții ordinare, pentru că o fracție ordinară se transformă într-o fracție zecimală finită sau într-o fracție zecimală periodică.



Cele două numere din exemplele de mai sus nu sunt numere raționale: ele sunt **numere iraționale**. Scrise în formă zecimală, numerele iraționale au o infinitate de cifre nenule, care nu se repetă periodic.

Evaluăm nivelul de bază

Scrive pe caiet următoarele numere și subliniază-le pe cele iraționale:

2,111...; 2,121122111222...; 2,121122; 2,121212...; 2,121121112...

Numărul $\sqrt{2}$ este irațional, dar numărul $\sqrt{4}$ este rațional. Pentru ce valori $n \in \mathbb{N}$, numărul \sqrt{n} este irațional?

Gândim critic și constructiv!

Exercițiu rezolvat

Se consideră mulțimea $M = \left\{ -\frac{36}{4}; -\sqrt{5}; -0,(23); 0; 1; 1,1(2); \sqrt{7}; \sqrt{\frac{225}{16}} \right\}$.

Determină următoarele submulțimi ale lui M : submulțimea formată numai din numere naturale, cea formată numai din numere întregi, cea formată numai din numere raționale și, respectiv, iraționale.

Rezolvare:

Observăm că $-\frac{36}{4} = -9$, $\sqrt{\frac{225}{16}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{15^2}}{\sqrt{4^2}} = \frac{15}{4}$. Deoarece 5 și 7 nu sunt pătrate perfecte, rezultă că

$-\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ sunt iraționale. În consecință: submulțimea alcătuită numai din numere naturale este $\{0; 1\}$,

cea formată numai cu numere întregi este $\left\{ -\frac{36}{4}; 0; 1 \right\}$, cea alcătuită din numere raționale este

$\left\{ -\frac{36}{4}; -0,(23); 0; 1; 1,1(2); \sqrt{\frac{225}{16}} \right\}$ și cea care conține numai numere iraționale este $\{-\sqrt{5}; \sqrt{7}\}$.

Exerciții propuse

1. Scrie:

- patru numere întregi negative;
- patru numere naturale pătrate perfecte;
- patru numere raționale care nu sunt întregi;
- patru numere iraționale.

2. Scrie patru fracții ordinare care se transformă în fracții zecimale neperiodice. Scrie transformarea.

3. Scrie patru fracții ordinare care se transformă în fracții zecimale periodice simple. Efectuează transformarea.

4. Scrie patru fracții ordinare care, transformate în fracții zecimale, sunt periodice mixte. Efectuează transformarea respectivă.

5. Transformă fracțiile zecimale următoare în fracții ordinare:

- a) 11,3; b) 0,234; c) -4,59; d) 0,(2);
e) 2,(28); f) 3,2(1); g) 11,23(3).

Stabilește dacă aceste numere sunt raționale sau iraționale.



6. Se consideră mulțimea

$$A = \left\{ \sqrt{3}; \sqrt{\frac{9}{4}}; -5; 8,2(5); -\sqrt{\frac{75}{12}}; -\sqrt{8}; -6,5 \right\}$$

Precizează elementele naturale, întregi, raționale și iraționale ale lui A .

7. Observă o regulă de formare a numerelor următoare și stabilește dacă sunt raționale sau iraționale:

- a) 0,123456789000000...;
b) 0,111111111...;
c) 0,12121212...;
d) 0,1011121314151617181911011112...

8. Identifică numerele iraționale dintre următoarele numere:

$$a = \sqrt{2^5}; \quad b = \sqrt{3^2 \cdot 5}; \quad c = \sqrt{5^2 \cdot 3^2}; \quad d = \sqrt{6 \cdot 6}; \quad e = \sqrt{2^4 \cdot 0,01}; \quad f = \sqrt{5^3 \cdot 0,1}.$$

9. Câte numere iraționale se află în șirul: $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{98}, \sqrt{99}$?

10. Stabilește dacă următoarele numere sunt raționale sau iraționale, fără a calcula efectiv radicalii:

- a) $\sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 10 + 8}$; b) $\sqrt{234 \ 645}$; c) $\sqrt{9 \ 231}$; d) $\sqrt{5 \ 256 \ 520}$; e) $\sqrt{746}$.

11. Arată că $\sqrt{5n+2}$ este irațional pentru orice număr natural n .

12. Arată că numărul 3,454455444555... este irațional. Care este a o suta zecimală a sa?

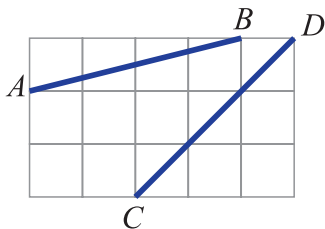
Alege și rezolvă în 5 minute!

A Stabilește dacă numărul $\sqrt{81}$ este rațional sau irațional.

B Determină $n \in \mathbb{N}$ pentru care numărul $\sqrt{89-n^2} \in \mathbb{Q}$.

C Arată că numărul $\sqrt{11^{100} + 66^{1000}}$ este irațional.

O situație-problemă



Pe caietul său de matematică, Mati a desenat segmentele AB și CD , ca în imagine. El ar vrea să compare aceste segmente, fără să calculeze lungimile lor.



Ar trebui să suprapui cele două segmente, astfel încât să aibă un capăt comun!

Ceea ce propui seamănă cu reprezentarea numerelor pe axă!



Vrem să știm!

Cum poziționăm numere iraționale pe axa numerelor?

Ne amintim ...

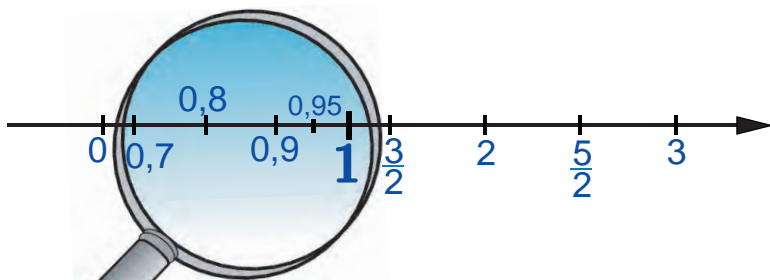
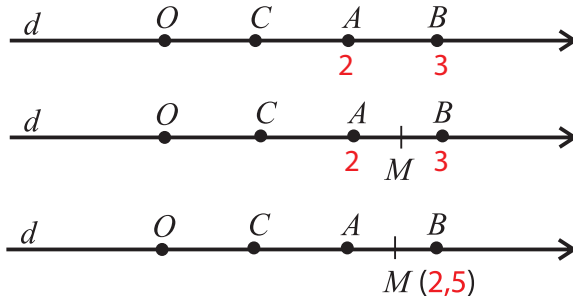
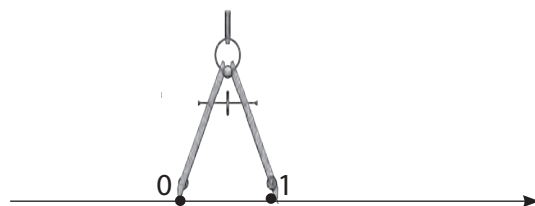
O dreaptă pe care au fost fixate: un punct O (numit origine), un sens de parcurgere (indicat printr-o săgeată) și un segment de lungime $1u$ (unitatea de măsură) este o axă a numerelor.

Folosim axa pentru a reprezenta pe ea numere.

Am învățat să reprezentăm pe axă numere naturale, numere întregi și numere raționale.

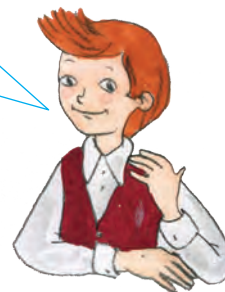
De exemplu, pentru a reprezenta pe axă numărul $2,5$, procedăm astfel:

- reprezentăm pe axă numerele 2 și 3, prin punctele A și B ;
- determinăm mijlocul M al segmentului AB ;
- numărul $2,5$ se reprezintă pe axă prin punctul M .



Dar astfel nu rămân și locuri goale pe axa numerelor?

E oare adevărat că oricărui punct de pe axă îi corespunde un număr rațional?



Putem găsi oricât de multe numere raționale între 0 și 1; la fel între 2 și 3, sau între oricare doi întregi consecutivi.

Evaluăm nivelul de bază

Trasează pe caietul tău o axă a numerelor și reprezintă pe aceasta numerele: -4 ; $1,25$; $-2,5$.

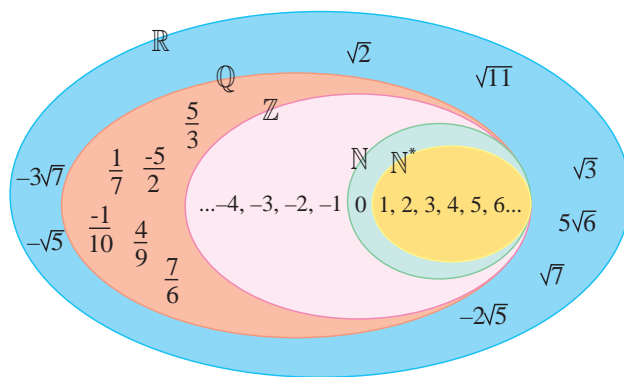
Exprimare orală

Ce informații ne oferă lupa din imagine? Ce concluzii sugerează acest desen? Ce ai putea „vedea” cu această lupă dacă o poziționezi între 2 și $2,5$?

Mulțimea numerelor reale este formată din toate numerele raționale, la care se adaugă cele iraționale. Notăm această mulțime cu \mathbb{R} .

Avem: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Notăm mulțimea numerelor iraționale ca pe o diferență de mulțimi, adică $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.



Explorăm ...

Considerăm un pătrat de latură 1, având un vârf în originea axei numerelor, ca în figura alăturată.

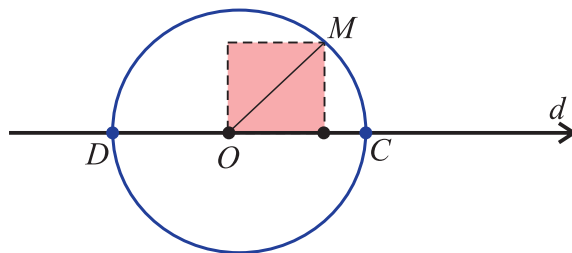
Diagonala OM a acestui pătrat are lungimea egală cu $\sqrt{2}$.

Cercul de centru O și rază OM intersectează dreapta d în punctele C și D . Pe axa numerelor, aceste puncte

corespund numerelor reale $\sqrt{2}$, respectiv $-\sqrt{2}$.

Punctele C și D sunt simetrice față de O : simetria

exprimă faptul că numerele $\sqrt{2}$ și $-\sqrt{2}$, ce corespund acestor puncte, sunt *opuse*.



Teoremă

Numerele reale se reprezintă pe axă cu ajutorul unor segmente cu o extremitate în origine. Un număr real determină un punct unic pe axa numerelor. Orice punct de pe axa numerelor corespunde unui număr real.

Cum putem reprezenta pe axă numărul $\sqrt{5}$? Dar numărul $-\sqrt{5}$?

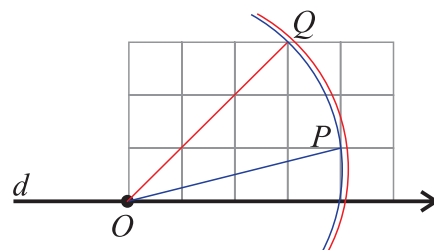
Gândim critic și constructiv!

Rezolvăm situația-problemă!

Pornind din originea axei numerelor, construim segmentele OP și OQ , congruente cu segmentele AB , respectiv CD , desenate de Mati.

Reprezentăm lungimile acestor segmente pe axă cu ajutorul cercurilor de centru O și raze OP , respectiv OQ .

Figura ne arată că $4 < OP < OQ < 5$.



Definim ...

Modulul unui număr real reprezintă distanța de la origine la punctul de pe axa numerelor corespunzător aceluși număr.

Notăm:
 $|a|$

Citim:
modulul numărului a

Citește definiția, apoi explică de ce:

- Modulul oricărui număr real este un număr pozitiv sau este zero.
- Modulul unui număr real este 0 dacă și numai dacă numărul este egal cu 0.
- Două numere opuse au același modul.

Gândim critic și constructiv!

Evaluăm nivelul de bază

- 1 Reprezintă pe axă numerele: -2 ; $0,5$; $-\sqrt{2}$.
- 2 Calculează modulul numărului $-\sqrt{2}$.

Problemă rezolvată

Geo a efectuat construcția geometrică din figură, prin care a obținut pe axa numerelor punctele A și B .

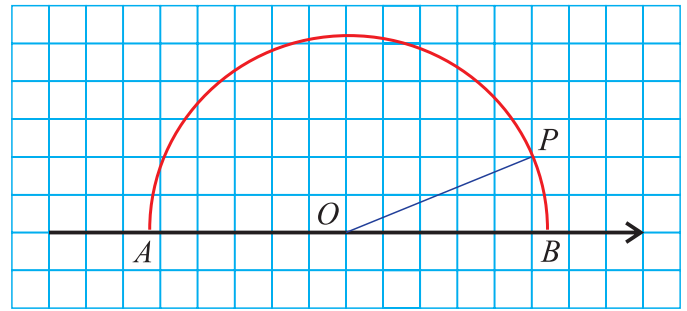
Dacă unitatea de măsură pe axă este latura pătrățelului de pe caiet, care sunt numerele reale corespunzătoare punctelor A și B de pe axă?

Rezolvare:

Ținând cont de orientarea axei, vedem că numărul a , corespunzător punctului A , este negativ, iar numărul b , corespunzător punctului B , este pozitiv.

Deoarece segmentul OP are lungimea de $\sqrt{5^2 + 2^2}u = \sqrt{29}u$, deducem că $b = \sqrt{29}$ și $a = -\sqrt{29}$.

Este oare adevărat că, pentru numerele de mai sus, avem $|a| = |b|$?



Gândim critic și constructiv!

Probleme propuse

1. Încadrează între două numere întregi consecutive fiecare dintre numerele reale:

a) $\frac{27}{5}$; b) $\frac{-84}{132}$; c) $\sqrt{23}$; d) $\sqrt{42}$; e) $-\sqrt{26}$.

2. Stabilește care dintre următoarele propoziții sunt adevărate:

a) $-\frac{1}{4} \in \mathbb{Q}$; b) $\sqrt{4} \notin \mathbb{Z}$; c) $\frac{1}{\sqrt{4}} \in \mathbb{Q}$; d) $\sqrt{5} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

3. Găsește 3 numere raționale situate între:

a) -4 și -3 ; b) -1 și 0 ; c) -20 și -10 .

7. Scrie cinci numere iraționale cuprinse între:

a) -6 și -5 ; b) -4 și -3 .

8. Calculează:

a) $|-4|$; b) $|65|$; c) $|-267|$; d) $\left|\frac{27}{35}\right|$;
e) $|\sqrt{32}|$; f) $|\sqrt{64}|$; g) $|\sqrt{2}|$.

4. Fie mulțimea:

$$A = \left\{ \frac{1}{9}; -\frac{\sqrt{9}}{1}; -1, (9); -\sqrt{10}; 1,9; \frac{0}{1,9}; 1 \right\}$$

- a) Scrie numerele întregi din A ;
b) Scrie numerele raționale din A ;
c) Scrie numerele iraționale din A .

5. Reprezintă pe axă numerele: -3 ; $\sqrt{5}$; $-1,5$.

6. Determină opusele următoarelor numere:

a) 7 ; b) $-\sqrt{2}$; c) $-\frac{23}{14}$.

9. Care dintre propozițiile următoare sunt adevărate?

a) $|-2,5| < 0$; b) $|\sqrt{5}| = |\sqrt{5}|$; c) $\left|-\frac{7}{2}\right| = \frac{7}{2}$;

d) $|-10^{101}| \geq 0$; e) $|-10+4| \leq |-10|+|4|$.

10. Ordonează crescător numerele reale:

$\sqrt{3}$; -3 ; $-2,5$; $2, (41)$; $-\sqrt{11}$.

11. Propune câte un exemplu pentru:

- a) un număr întreg, care nu este natural;
b) un număr real, care nu este rațional.

12. a) Determină $q \in \mathbb{Q}$, astfel încât $\sqrt{5} < q < \sqrt{6}$.

b) Determină $n \in \mathbb{N}$, astfel încât $n < \sqrt{75} < n+1$



Scurt demers de cercetare

13. Arată că dacă $n \in \mathbb{N}$ și $|1-\sqrt{2}| + |\sqrt{2}-\sqrt{3}| + \dots + |\sqrt{n}-\sqrt{n+1}| = 100$ atunci $n = 51$.

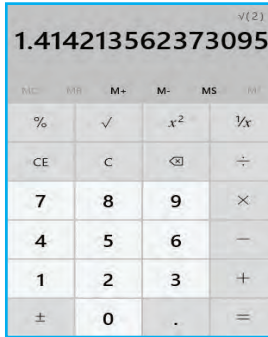
Alege și rezolvă în 5 minute!

A Ordonează crescător numerele: $\sqrt{3}$; $-\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$.

B Scrie două numere iraționale cuprinse între 4 și 5.

C Determină trei numere iraționale, negative, x , pentru care $|x| \leq 4$.

O situație-problemă



Pe calculatorul meu de buzunar, am obținut o valoare pentru rădăcina pătrată a lui 2:

$$\sqrt{2} = 1,414213562373095$$

Mama mi-a spus că știe un procedeu de calcul pentru un astfel de număr! Cum se procedează oare?



Vrem să știm!

Cum putem aproxima rădăcina pătrată a unui număr pozitiv?

Algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate

Separăm cifrele numărului, de la dreapta spre stânga, în grupe de câte două cifre.

$$\sqrt{44'89}$$



Etapă I

Calculăm *prima cifră a rădăcinii*:

căutăm cel mai mare număr natural al cărui pătrat este mai mic sau egal decât prima grupă de cifre;

$$\sqrt{44'89} \begin{array}{l} 6 \\ \hline \end{array}$$

ridicăm la pătrat numărul reprezentând prima cifră a rădăcinii, scriem rezultatul sub prima grupă și efectuăm scăderea.

$$\begin{array}{r} \sqrt{44'89} \begin{array}{l} 6 \\ \hline \end{array} \\ 36 \\ \hline =8 \end{array}$$

Etapă a II-a

Calculăm următoarea *cifră a rădăcinii*:

coborâm următoarea grupă de cifre;

$$\begin{array}{r} \sqrt{44'89} \begin{array}{l} 6 \\ \hline \end{array} \\ 36 \\ \hline =889 \end{array}$$

dublăm numărul obținut deja la rădăcină și scriem rezultatul sub linia orizontală, în dreapta celei verticale;

$$\begin{array}{r} \sqrt{44'89} \begin{array}{l} 6 \\ \hline \end{array} \\ 36 \quad 12 \\ \hline =889 \end{array}$$

căutăm o cifră care, scrisă alături de numărul obținut deja la rădăcină, formează un număr care, înmulțit cu această cifră, dă *cel mai mare număr natural mai mic sau egal cu „restul”* obținut la etapa anterioară;

$$\begin{array}{r} \sqrt{44'89} \begin{array}{l} 6 \\ \hline \end{array} \\ 36 \quad 12 \quad ? \cdot ? = \square \\ \hline =889 \\ \text{REST} \end{array}$$

scriem sub „rest” produsul obținut și efectuăm scăderea, obținând un „nou” rest. Cifra găsită o scriem lângă numărul găsit anterior la rădăcină, deasupra liniei orizontale, lângă cifra corectă, scrisă la prima etapă.

$$\begin{array}{r} \sqrt{44'89} \begin{array}{l} 67 \\ \hline \end{array} \\ 36 \quad 128 \cdot 8 = 1024 \\ \hline =889 \quad 127 \cdot 7 = 889 \\ 889 \\ \hline = \\ \text{REST } 0 \end{array}$$

1024 este prea mare

Să observăm!

Atunci când ridicăm la pătrat un număr de o cifră, rezultatul are una sau două cifre, iar când ridicăm la pătrat un număr de două cifre, rezultatul are trei sau patru cifre. Ca urmare, dacă numărul este pătrat perfect, cu un număr par de cifre, atunci numărul de cifre ale lui \sqrt{N} este jumătate din numărul de cifre ale lui N . Folosește observația și explică de ce, în prima etapă a algoritmului de extragere a rădăcinii pătrate, facem grupe de câte două cifre.

Etapă a III-a

Reluăm operațiile din etapa a II-a pentru următoarea pereche de cifre. Continuăm la fel până au fost „coborâte” toate perechile de cifre ale numărului. Dacă după ultima coborâre s-a obținut zero, înseamnă că numărul dat este pătrat perfect.

$$\sqrt{44'89} \begin{array}{r} 67 \\ \underline{36} \\ =889 \\ \underline{889} \\ === \end{array} \quad 127 \cdot 7 = 889$$

Dacă algoritmul nu conduce la un rest nul, continuăm aplicarea acestuia, pentru calculul cu aproximație al rădăcinii pătrate!

Pentru aproximarea la zecimi se adaugă o grupă de două zerouri.

Exemplu:

$$\sqrt{275,00} \begin{array}{r} 16,5 \\ \underline{1} \\ 175 \\ \underline{156} \\ 1900 \\ \underline{1625} \\ 275 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Etapa I} \\ \text{Etapa II} \\ \text{Etapa III} \end{array}$$

Proba: $16,5^2 + 2,75 = 272,25 + 2,75 = 275$
Deci $16,5 < \sqrt{275}$

Pentru aproximarea la sutimi se adaugă două grupe de două zerouri.

Exemplu:

$$\sqrt{275,0000} \begin{array}{r} 16,58 \\ \underline{1} \\ 175 \\ \underline{156} \\ 1900 \\ \underline{1625} \\ 27500 \\ \underline{26464} \\ 1036 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Etapa I} \\ \text{Etapa II} \\ \text{Etapa III} \\ \text{Etapa IV} \end{array}$$

Proba: $16,58^2 + 0,1036 = 275$
Deci $16,58 < \sqrt{275}$

Rezolvăm situația-problemă!

Calculăm primele două zecimale ale numărului $\sqrt{2}$:

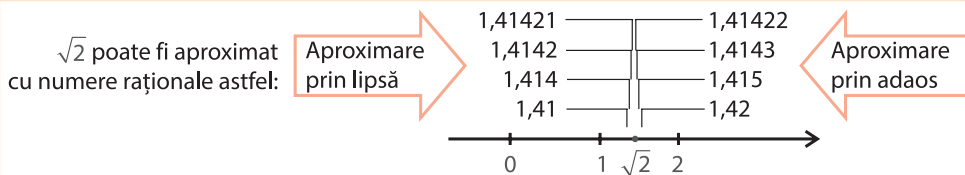
$$\sqrt{2,00'00''} \begin{array}{r} 1,41 \\ \underline{1} \\ 100 \\ \underline{96} \\ 400 \\ \underline{281} \\ 119 \end{array} \quad \begin{array}{l} 24 \cdot 4 = 96 \\ 281 \cdot 1 = 281 \end{array}$$

Acum știi cum să aproximez numărul real $\sqrt{2}$!



Un număr real poate fi aproximat cu numere raționale prin lipsă sau prin adaos.

Exemplu:



Gândim critic și constructiv!

Continuă calculul de mai sus cu încă un pas. Ce număr obții prin rotunjirea lui $\sqrt{2}$ la ordinul milionimilor?

Evaluăm nivelul de bază

Calculează, cu două zecimale exacte, numerele: $\sqrt{3}$ și $\sqrt{13}$.



Problemă rezolvată / Rezolvări comparative

Elevii au avut de calculat trunchierea lui $\sqrt{5}$ la ordinul zecimilor, fără a avea voie să folosească un calculator. Iată două dintre rezolvările lor.

Ana:

Am utilizat algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate.

$$\begin{array}{r} \sqrt{5,00} \quad 2,2 \\ 4 \quad | \quad 42 \cdot 2 = 84 \\ \hline 1 \quad 00 \\ 84 \\ \hline 16 \end{array}$$

Deci $\sqrt{5} \approx 2,2$.

Geo:

Am folosit încadrări din ce în ce mai bune ale numărului $\sqrt{5}$.

$$4 \leq 5 < 9, \text{ deci } 2 \leq \sqrt{5} < 3$$

Compar $\sqrt{5}$ cu 2,5 (acesta este numărul aflat la mijloc, între 2 și 3):

$$\sqrt{5} < 2,5 \Leftrightarrow 5 < 2,5^2 \Leftrightarrow 5 < 6,25 \quad (\text{A}) \text{ Deci } 2 \leq \sqrt{5} < 2,5.$$

Compar acum $\sqrt{5}$ cu 2,3:

$$\sqrt{5} < 2,3 \Leftrightarrow 5 < 2,3^2 \Leftrightarrow 5 < 5,29 \quad \text{Deci } 2 \leq \sqrt{5} < 2,3.$$

Continui la fel și mă opresc atunci când numerele zecimale din dreapta și din stânga diferă printr-o zecime.

Obțin $2,2 \leq \sqrt{5} < 2,3$ și deduc: $\sqrt{5} \approx 2,2$.

Care dintre cele două rezolvări ți se pare mai simplă? De ce?

Gândim critic și constructiv!

Probleme propuse

1. Compară numerele:

- a) $\sqrt{3}$ și 2,5; b) $-\sqrt{11}$ și -3;
c) 2,7(3) și 2,(73); d) $\frac{-5}{3,5}$ și $-\frac{15}{4,9}$.

2. Ordonează crescător numerele:

- a) $5\sqrt{7}$; $-3\sqrt{7}$; $\frac{3}{4}\sqrt{7}$; b) $\sqrt{3}$; $-\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{13}$;
c) $3\sqrt{2}$; $2\sqrt{3}$; $-4\sqrt{2}$; $-3\sqrt{3}$.

3. Propune exemple de câte două numere:

- a) raționale, cuprinse între 1 și -1;
b) iraționale, cuprinse între 2 și 3;
c) întregi, cuprinse între -2,4 și 1,5.

4. Stabilește care număr este mai mare pentru fiecare dintre perechile de numere:

- a) $\sqrt{256}$ și $1\frac{1}{3}$; b) $\sqrt{5^{-4}}$ și $\frac{1}{\sqrt{625}}$.

5. Aproximează, apoi ordonează crescător numerele:

$$3\sqrt{10}; \quad -2\sqrt{11}; \quad -5\sqrt{10}; \quad -3\sqrt{11}.$$

6. Utilizează calculatorul pentru a determina aproximarea prin lipsă, cu două zecimale exacte, a rădăcinilor pătrate ale numerelor naturale de la 1 la 20. Alcătuieste în caietul tău un tabel după modelul de mai jos și completează-l cu rezultatele obținute:

n	aproximarea lui \sqrt{n} prin lipsă cu 2 zecimale exacte
1	1
2	1,41
...	
20	4,47

7. Calculează prin aproximare cu două zecimale numărul $a = \frac{\sqrt{3}+1}{2,5} - \frac{0,4}{\sqrt{3}-1}$. Utilizează calculatorul pentru a verifica rezultatul obținut.

Alege și rezolvă în 5 minute!

A

Încadrează $\sqrt{5}$ între doi întregi consecutivi.

B

Aproximează prin adaos, la zecimi, numărul $\sqrt{13}$.

C

Aproximează prin lipsă, la sutimi, numărul $3\sqrt{10}$.

O situație-problemă



Dreptunghiul $ABCD$ a fost desenat pe o rețea de pătrate cu latura de 1 cm. Cât este aria lui?

Rezolvare:

Laturile dreptunghiului sunt ipotenuze în triunghiuri dreptunghice formate pe rețea. Conform teoremei lui Pitagora, avem:

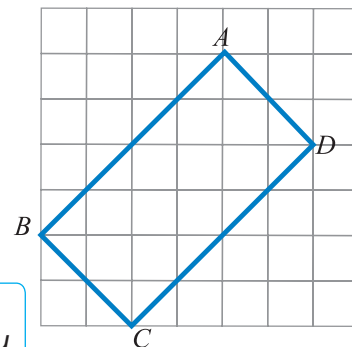
$$BC = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$AB = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32}$$

Așadar, aria dreptunghiului este $\sqrt{8} \cdot \sqrt{32}$.



Cum am putea explica mai simplu acest rezultat?



Vrem să știm!

Ce reguli de calcul ne permit să aducem la o formă cât mai simplă exercițiile cu radicali?

Să explorăm!

Ecuția $x^2 = 4$ are ca soluții 2 și -2 . Verificăm:

- pentru $x = 2$ obținem $x^2 = 2^2 = 4$;
- pentru $x = -2$ obținem $x^2 = (-2)^2 = 4$.

În general, ecuația de formă $x^2 = a$, $a > 0$ are două soluții: \sqrt{a} și $-\sqrt{a}$.

Exemplu:

Ecuția $x^2 = 7$ are soluțiile: $\sqrt{7}$ și $-\sqrt{7}$ în \mathbb{R} .

Ecuția $x^2 = 3$ are ca soluții $\sqrt{3}$ și $-\sqrt{3}$. Verificăm:

- pentru $x = \sqrt{3}$ obținem $x^2 = (\sqrt{3})^2 = 3$;
- pentru $x = -\sqrt{3}$ obținem $x^2 = (-\sqrt{3})^2 = 3$.

Dacă $x \geq 0$, atunci din $x^2 = a$ rezultă $x = \sqrt{a}$. Numărul \sqrt{a} este singurul număr pozitiv al cărui pătrat este egal cu a .

Exemplu:

Ecuția $x^2 = 11$, $x > 0$ are o singură soluție, $\sqrt{11}$.

Demonstrăm!

Reguli de calcul cu radicali: Pentru orice două numere reale, pozitive a și b , avem:

1. $a = \sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2$;
2. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$;
3. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ pentru $b \neq 0$.

Demonstrație:

Ecuția $x^2 = p$, cu $x \geq 0$ și $p \geq 0$, are o unică soluție reală, și anume $x = \sqrt{p}$.

De aceea, dacă z și t sunt numere reale, pozitive, atunci $z = t \Leftrightarrow z^2 = t^2$.

Folosim această echivalență pentru a demonstra regulile de calcul din enunț.

1. Egalitățile $a = (\sqrt{a})^2$ și $a = \sqrt{a^2}$ sunt consecințe ale definiției radicalului.

2. Fie $x = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ și $y = \sqrt{a \cdot b}$. Calculăm:

$$x^2 = (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = a \cdot b; \quad y^2 = (\sqrt{a \cdot b})^2 = a \cdot b.$$

Deoarece $x^2 = y^2$, iar x și y sunt numere reale, pozitive (sau 0), deducem că $x = y$. Așadar: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$.

3. Fie $p = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ și $q = \sqrt{\frac{a}{b}}$. Numerele p și q sunt numere reale, pozitive (sau 0).

Calculăm: $p^2 = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}$; $q^2 = \left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 = \frac{a}{b}$. Deoarece $p^2 = q^2$, iar p și q sunt numere reale, pozitive (sau 0), deducem că $p = q$. Așadar: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Scoaterea factorilor de sub radical

Aplic regulile de calcul cu radicali pentru dreptunghiul din situația-problemă. Iată ce am obținut!



$$\text{Avem: } \sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{32} = \sqrt{2^5} = \sqrt{2^4 \cdot 2} = \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{2} = 2^2 \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

Spunem că **am scos de sub radical** factorul 2, respectiv 4. Deci, aria dreptunghiului dat este:

$$\sqrt{8} \cdot \sqrt{32} = 2\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = 8 \cdot 2 = 16$$

Introducerea factorilor sub radical

Care număr este mai mare: $5\sqrt{7}$ sau $7\sqrt{5}$?



Aflu $\sqrt{5}$ și $\sqrt{7}$ cu două zecimale, folosind calculatorul, fac produsele și compar!

Eu aș încadra pe 7, respectiv pe 5, între două pătrate perfecte.



Eu am altă idee: compar pătratele acestor numere!



Dacă pot să scot factorii de sub radical, nu pot proceda și invers, adică să introduc factorii sub radical?

$$5\sqrt{7} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{25 \cdot 7} = \sqrt{175}$$

$$7\sqrt{5} = \sqrt{7^2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{49 \cdot 5} = \sqrt{245}$$

Gândim critic și constructiv!

Comentați ideile copiilor. Care metodă vi se pare cea mai potrivită?

Exemplu: Să comparăm $3\sqrt{2}$ cu $2\sqrt{3}$:

$$\text{Avem: } 3\sqrt{2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{18}$$

$$2\sqrt{3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{12}$$

Cum $18 > 12$, rezultă $\sqrt{18} > \sqrt{12}$, deci $3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}$

Spunem că **am introdus sub radical** factorul 3, respectiv 2.

În concluzie:

- Scoaterea unui factor de sub radical:

Dacă numărul de sub radical are un factor pătrat perfect, atunci radicalul acestuia se poate efectua, iar calculele devin mai simple:

$$\sqrt{a^2 \cdot b} = a\sqrt{b}, \text{ oricare ar fi } a \geq 0, b \geq 0.$$

- Introducerea unui factor sub radical:

Uneori, este util să introducem sub radical unul sau mai mulți factori ai numărului din fața radicalului. Factorul care se introduce sub radical se scrie la pătrat, adică:

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b}, \text{ oricare ar fi } a \geq 0, b \geq 0.$$

Activitate de grup

Descoperiți greșeala în fiecare exercițiu!

1 $10\sqrt{2} = \sqrt{10^2 \cdot 2} = \sqrt{100 \cdot 2} = \sqrt{200}$

$$-10\sqrt{2} = \sqrt{(-10)^2} \cdot 2 = \sqrt{100 \cdot 2} = \sqrt{200}$$

Rezultă că $10\sqrt{2} = -10\sqrt{2}$???

$$-10\sqrt{2} \neq \sqrt{(-10)^2} \cdot 2 \quad \text{De ce?}$$

Corect, scriem astfel:

$$-10\sqrt{2} = -\sqrt{10^2 \cdot 2} = -\sqrt{100 \cdot 2} = -\sqrt{200}$$

2 Comparați numerele: $2\sqrt{13}$ și $-3\sqrt{11}$.

$$(2\sqrt{13})^2 = 4 \cdot 13 = 52$$

$$(-3\sqrt{11})^2 = 9 \cdot 11 = 99$$

Știm că $52 < 99$

$$\text{Rezultă } 2\sqrt{13} < -3\sqrt{11}$$

Adică un număr pozitiv este mai mic decât unul negativ?!



Atenție! Se introduc sub radical numai factorii pozitivi, deoarece factorii negativi, prin ridicare la puterea a doua devin pozitivi.

Evaluăm nivelul de bază

- ① Scoate factorii de sub radical pentru $\sqrt{18}$ și $\sqrt{54}$. ② Introdu factorii sub radical pentru $3\sqrt{6}$ și $5\sqrt{5}$.

Problemă rezolvată / Rezolvări comparative

Comparați numerele: $2\sqrt{5}$ și $5\sqrt{2}$. Sunt egale? Dacă nu, care este mai mare?

Rezolvare. Copiii au rezolvat această problemă prin metode diferite.

Rezolvarea Anei:

Pentru că $2\sqrt{5} > 0$ și $5\sqrt{2} > 0$, comparăm pătratele celor două numere: $(5\sqrt{2})^2 = 20$, $(2\sqrt{5})^2 = 20$ și $20 < 50 \Rightarrow 2\sqrt{5} < 5\sqrt{2}$.

Rezolvarea Emei:

Prin aproximări, avem:
 $2,2 < \sqrt{5} < 2,3 \Rightarrow 4,4 < 2\sqrt{5} < 4,6$
 $1,4 < \sqrt{2} < 1,5 \Rightarrow 7 < 5\sqrt{2} < 7,5$,
 deci $2\sqrt{5} < 5\sqrt{2}$.

Rezolvarea lui Mati:

Introducem factorii sub radical și avem:
 $2\sqrt{5} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = \sqrt{20}$;
 $5\sqrt{2} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = \sqrt{50}$;
 deoarece $20 < 50 \Rightarrow$
 $\sqrt{20} < \sqrt{50} \Rightarrow 2\sqrt{5} < 5\sqrt{2}$.

Exprimare orală

Analizează cele trei metode de rezolvare a exercițiului de mai sus și alege-le pe cele pe care le consideri mai simple. Argumentează alegerea.

Probleme propuse



1. Scoate factorii de sub radical: **a)** $\sqrt{3^2}$; **b)** $\sqrt{3^2 \cdot 5}$; **c)** $\sqrt{5^3}$; **d)** $\sqrt{12}$; **e)** $\sqrt{24}$; **f)** $\sqrt{27}$.

2. Introdu factorii sub radical: **a)** $2\sqrt{3}$; **b)** $3\sqrt{5}$; **c)** $-5\sqrt{2}$; **d)** $2\sqrt{2}$; **e)** $3\sqrt{3}$; **f)** $6\sqrt{11}$; **g)** $-4\sqrt{6}$.

3. Calculează: **a)** $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}$; **b)** $\sqrt{5} \cdot \sqrt{11}$; **c)** $\sqrt{3} \cdot \sqrt{8}$; **d)** $\sqrt{6} \cdot \sqrt{12}$; **e)** $\sqrt{15} \cdot \sqrt{6}$.

4. Calculează: **a)** $\sqrt{8} : \sqrt{2}$; **b)** $\sqrt{15} : \sqrt{5}$; **c)** $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{5}}$; **d)** $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{14}}$; **e)** $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$; **f)** $\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{21}}$.



5. Scoate factorii de sub radical: **a)** $\sqrt{108}$; **b)** $\sqrt{500}$; **c)** $\sqrt{2^4}$; **d)** $\sqrt{3 \cdot 5^4}$; **e)** $\sqrt{(-7)^2 \cdot 3^4}$; **f)** $\sqrt{2^5 \cdot 5^3 \cdot 7^2}$; **g)** $\sqrt{\frac{63}{50}}$; **h)** $\sqrt{\frac{405}{12}}$; **i)** $\sqrt{3 \frac{2}{16}}$.

6. Calculează: **a)** $\sqrt{2^3} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$; **b)** $\sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt{\frac{5}{3}}$; **c)** $\sqrt{\frac{18}{7}} : \sqrt{\frac{2}{7}}$.

7. Introdu factorii sub radical: **a)** $2^2\sqrt{3}$; **b)** $2^3\sqrt{5}$; **c)** $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{2}}$; **d)** $\frac{16}{11}\sqrt{\frac{1}{3}}$; **e)** $\frac{1}{49}\sqrt{7}$.

8. Compară: **a)** $2\sqrt{3}$ cu $3\sqrt{2}$; **b)** 6 cu $2\sqrt{7}$; **c)** $\sqrt{3 \cdot 2^3}$ cu $-3\sqrt{6}$; **d)** $-\sqrt{19}$ cu $-3\sqrt{2}$.



9. Descoperă greșeala:

$$\left. \begin{aligned} 5\sqrt{3} &= \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{75} \\ -5\sqrt{3} &= \sqrt{(-5)^2 \cdot 3} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{75} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 5\sqrt{3} = -5\sqrt{3}$$

10. Ordonează crescător numerele:

- a)** $\sqrt{4}$; $2\sqrt{2}$; 3 ; $\sqrt{3}$;
b) -3 ; $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; 3 ; $\sqrt{3}$; $-2\sqrt{3}$.

11. Mulțimea A are ca elemente numerele a ; b ; c ; d ; e ; f ; g , unde $a = 3\sqrt{20}$, $b = \sqrt{180}$, $c = 2\sqrt{45}$, $d = \sqrt{12} \cdot \sqrt{15}$, $e = 6\sqrt{5}$, $f = 6 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$ și $g = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5}$. Determină cardinalul mulțimii A .

Alege și rezolvă în 5 minute!

A

- a)** Scoate factorii de sub radical: $\sqrt{45}$
b) Introdu factorul sub radical: $5\sqrt{3}$.

B

- Compară
 $5\sqrt{11}$ cu $4\sqrt{13}$.

C

Calculează

$$\sqrt{\frac{3^{41} \cdot 2^{15}}{5^{31}}} : \sqrt{\frac{2^{11} \cdot 3^{39}}{5^{29}}}$$

O situație-problemă

Paralelogramul $ABCD$ a fost desenat pe o rețea de pătrate cu latura de 1 cm. Cât este perimetrul paralelogramului?

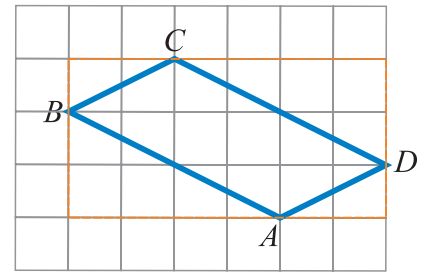
Rezolvare:

Laturile paralelogramului sunt ipotenuze în triunghiuri dreptunghice formate pe rețea. Conform teoremei lui Pitagora, avem:

$$AD = \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}; \quad BC = \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5};$$

$$AB = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20}; \quad CD = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20}.$$

Așadar, perimetrul paralelogramului este $\sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{20} + \sqrt{20}$.



Oare am putea scrie mai simplu acest rezultat?

Vrem să știm!

Cum efectuăm adunarea numerelor reale? Se păstrează proprietățile din \mathbb{Q} ? Cum definim scăderea numerelor reale?

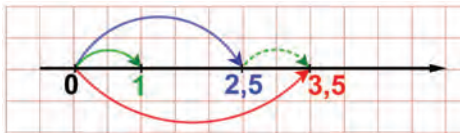
Evaluăm nivelul de bază

- ① Calculează: $2,5 + 1$; $-2,5 + (-1)$; $2,5 + (-3)$; $-2,5 + 3$.
- ② Scrie opusul fiecărui număr real: $-\frac{1}{10}$; $\sqrt{2}$; $-3,5$; 1 ; $2,(5)$.

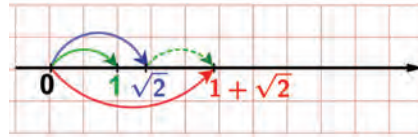
Cum adunăm două numere reale?

Suma a două numere reale pozitive

$a = 2,5, b = 1; a + b = 2,5 + 1 = 3,5$



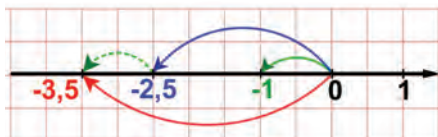
$a = \sqrt{2}, b = 1; a + b = \sqrt{2} + 1$



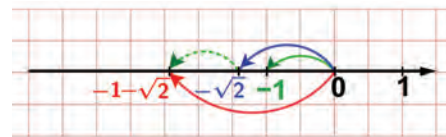
Suma a două numere reale pozitive este un număr real pozitiv.

Suma a două numere reale negative

$a = -2,5, b = -1; a + b = -2,5 + (-1) = -3,5$

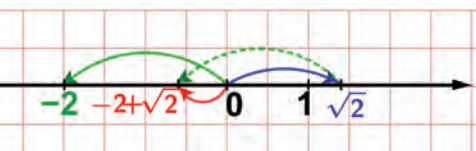


$a = -\sqrt{2}, b = -1; a + b = -\sqrt{2} + (-1) = -\sqrt{2} - 1$



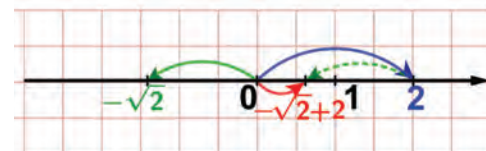
Suma a două numere reale negative este un număr real negativ.

Suma a două numere reale de semne contrare



$a = \sqrt{2}, b = -2$
 $a + b = \sqrt{2} + (-2) = \sqrt{2} - 2$

Suma este negativă pentru că modulul numărului negativ este mai mare.



$a = -\sqrt{2}, b = 2$
 $a + b = -\sqrt{2} + 2$

Suma este pozitivă pentru că modulul numărului pozitiv este mai mare.

Să analizăm!

Proprietățile adunării numerelor reale

Comutativitate

$$(-2,5) + (-1) = (-1) + (-2,5)$$

$$a + b = b + a \quad \text{pentru orice numere reale } a \text{ și } b.$$

$$(-\sqrt{2}) + \sqrt{3} = \sqrt{3} + (-\sqrt{2})$$

Asociativitate

$$\left[\left(-\frac{1}{2} \right) + (-1) \right] + (+3) = \left(-\frac{1}{2} \right) + [(-1) + (+3)]$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{pentru orice numere reale } a, b \text{ și } c.$$

$$[3 + (-\sqrt{2})] + 2\sqrt{3} = 3 + [(-\sqrt{2}) + 2\sqrt{3}]$$

Numărul real zero este element neutru la adunare

$$1,6 + 0 = 1,6$$

$$a + 0 = a \quad \text{pentru orice număr real } a.$$

$$\sqrt{5} + 0 = \sqrt{5}$$

Orice număr real are un opus, tot număr real

$$3,7 + (-3,7) = 0$$

$$a + (-a) = 0 \quad \text{pentru orice număr real } a.$$

$$\sqrt{7} + (-\sqrt{7}) = 0$$

Scurt demers de cercetare

Știm că suma a două numere raționale este un număr rațional. Ce fel de număr este suma dintre un număr rațional și un număr irațional?

$5 \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. $5 + \sqrt{2}$ este rațional sau irațional?

Presupunem că $5 + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Notăm $5 + \sqrt{2} = a$, $a \in \mathbb{Q}$. Rezultă $\sqrt{2} = a - 5$.

Dar $a - 5 \in \mathbb{Q}$ și $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Am ajuns la o contradicție. Așadar $5 + \sqrt{2}$ este irațional.

Adunând un număr rațional cu un număr irațional, obținem alte exemple de numere iraționale.



Explorează și tu, cu numere diferite!

Există numere iraționale a căror sumă să fie număr rațional? Există numere iraționale a căror sumă să fie număr irațional? Dați exemple pentru ambele situații.

Gândim critic și constructiv!

Evaluăm nivelul de bază

Calculează: ① $\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$; ② $6\sqrt{5} - 4\sqrt{5}$; ③ $2\sqrt{3} + \sqrt{27} - 5\sqrt{3}$.

Rezolvări comparative

Elevii au comparat numerele $a = \sqrt{5} + \sqrt{45}$ și $b = 4\sqrt{5}$.

Rezolvarea lui Tic $a = \sqrt{5} + \sqrt{45} = \sqrt{5+45} = \sqrt{50}$

$$b = 4\sqrt{5} = \sqrt{4^2 \cdot 5} = \sqrt{80}$$

$$50 < 80 \Rightarrow \sqrt{50} < \sqrt{80} \Rightarrow a < b$$

Rezolvarea lui Geo

$$a = \sqrt{5} + \sqrt{45} = \sqrt{5} + \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

deci $a = b$

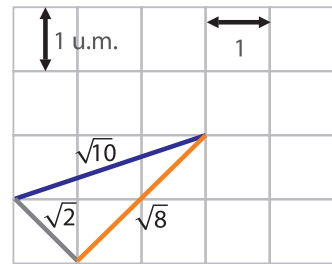
Exprimare orală

Spune care dintre cei doi copii a rezolvat corect exercițiul de mai sus și precizează ce a greșit celălalt elev.

Observație

Din desenul alăturat, observăm că $\sqrt{2} + \sqrt{8} > \sqrt{10}$ pentru că suma lungimilor a două laturi ale unui triunghi este mai mare decât lungimea celei de-a treia.

În concluzie, dacă a și b sunt două numere reale, strict pozitive, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.



Exerciții propuse

1. Calculează: **a)** $213 + 79$; **b)** $34 - 29$;

c) $-21 + 32$; **d)** $\frac{1}{2} + \frac{7}{2}$; **e)** $\frac{9}{5} - \frac{3}{5}$; **f)** $\frac{3}{2} + \frac{1}{5}$;

g) $6 + (-11)$ **h)** $0,2 + 5$; **i)** $3,5 - 2,09$;

j) $(-3,52) + (+5,74) - (+3,28)$; **k)** $5 - \frac{7}{2}$;

l) $-\frac{11}{6} + \frac{1}{3}$; **m)** $\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{6}\right) - \left(-\frac{5}{18}\right)$.

5. Scrie mai simplu, grupând convenabil termenii:

a) $3\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 10\sqrt{2}$; **b)** $6\sqrt{13} - 4\sqrt{13} + 5\sqrt{13}$;

c) $-34\sqrt{7} + 6\sqrt{7} + 18\sqrt{7} - 9\sqrt{7}$;

d) $4\sqrt{3} + 7\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$; **e)** $\frac{2}{3}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{5}\sqrt{6} + \frac{3}{2}\sqrt{6}$.

6. Calculează: **a)** $6\sqrt{3} + (3\sqrt{3} - 4\sqrt{3}) + 3\sqrt{3}$;

b) $(9\sqrt{5} - 12\sqrt{5}) - (6\sqrt{5} - 8\sqrt{5})$;

c) $4\sqrt{7} - 2\sqrt{7} - (2\sqrt{7} - 4\sqrt{7})$; **d)** $5\sqrt{2} - (3\sqrt{2} - 7\sqrt{2})$;

e) $-4,5\sqrt{5} - (6\sqrt{5} - 4\sqrt{5})$;

f) $8\sqrt{7} - \left(\frac{1}{2}\sqrt{7} + 8\sqrt{7} - \frac{5}{6}\sqrt{7}\right)$.

9. Scrie în forma cea mai simplă:

a) $3\sqrt{2} + \sqrt{18} - \sqrt{50}$;

b) $\sqrt{27} + 2\sqrt{3} - \sqrt{75}$.

10. Calculează:

a) $\sqrt{\frac{12}{49}} - \sqrt{\frac{27}{25}} + \sqrt{\frac{48}{121}}$; **b)** $\sqrt{\frac{32}{27}} + \sqrt{\frac{8}{27}} - \sqrt{\frac{50}{48}}$.

Scurt demers de cercetare

13. Considerăm suma: $\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{12}} + \dots + \frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{\sqrt{9900}}$.

a) Ce legături există între numărătorii și numitorii termenilor sumei?

b) Scrie altfel fiecare termen pentru a putea calcula rezultatul.

2. Calculează: **a)** $7\sqrt{2} + 8\sqrt{2}$; **b)** $9\sqrt{5} - 3\sqrt{5}$;
c) $0,8\sqrt{3} - 0,5\sqrt{3}$; **d)** $12\sqrt{11} - (-7\sqrt{11})$.

3. Compară numerele:

a) $\sqrt{7}$ și $1 + \sqrt{7}$; **b)** $\sqrt{3}$ și $\sqrt{2} + \sqrt{3}$;

c) $\sqrt{5} - 2$ și $\sqrt{5}$; **d)** $\sqrt{11} + \sqrt{6}$ și $\sqrt{11} - \sqrt{6}$.

4. Calculează: $b = a - 2,5$; $c = 3,5 - b$;
 $d = \sqrt{2} + c - b$, pentru $a = -2,5$.

7. Aplică proprietățile adunării numerelor reale și precizează care dintre egalitățile următoare este adevărată: **a)** $(-\sqrt{5} + 1) + 2 = -\sqrt{5} + 4$;

b) $(1,3 - \sqrt{7}) + \sqrt{7} = 1,3 + (-7 + 7)$;

c) $2\sqrt{54} + (-2\sqrt{54}) - (-\sqrt{96}) = 5\sqrt{6}$;

d) $2,25\sqrt{\frac{1}{25}} - 1,45 + \sqrt{3} = 1 + \sqrt{3}$.

8. Dacă $a = \frac{5}{22}$, $b = -\frac{6}{55}$, $c = -\frac{7}{35}$ și $d = \frac{7}{66}$, calculează $a - b$, $b - c$, $c - d$, $d - a$ și apoi $A = (a - b) + (b - c) + (c - d) + (d - a)$. Ce observi?

11. Calculează $(a - \sqrt{3})(\sqrt{3} - a)$ pentru $a = \sqrt{3} - 1$.

12. Aproximează prin lipsă cu o zecimală exactă și compară numerele:

a) $2 + \sqrt{3}$ și $3 + \sqrt{2}$; **b)** $4 - \sqrt{3}$ și $3 - \sqrt{2}$;

c) $4 + \sqrt{2}$ și $4\sqrt{2}$; **d)** $\sqrt{6} + \sqrt{3}$ și $\sqrt{5} + \sqrt{2}$.

Alege și rezolvă în 5 minute!

A

Calculează $6\sqrt{7} - 3\sqrt{7}$.

B

Calculează $3\sqrt{2} - (6\sqrt{2} - 4\sqrt{2})$.

C

Calculează $\sqrt{252} + 3\sqrt{448} - 2\sqrt{700}$.

O situație-problemă

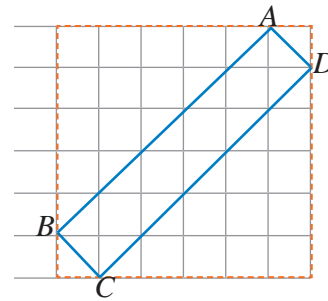
Dreptunghiul $ABCD$ a fost desenat pe o rețea de pătrate cu latura de 1 cm. Cât este aria lui?

Rezolvare:

Laturile dreptunghiului sunt ipotenuze în triunghiuri dreptunghice formate pe rețea. Conform teoremei lui Pitagora, avem:

$$BC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad AB = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}$$

Așadar, aria dreptunghiului este $\sqrt{2} \cdot \sqrt{50} = \sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = 10$ (cm²).



Vrem să știm!

Cum efectuăm înmulțirea numerelor reale? Se păstrează proprietățile din \mathbb{Q} ? Ce înseamnă media geometrică?

Să descoperim ...

În problema de mai sus, am văzut că numerele $\sqrt{2}$ și $\sqrt{50}$ pot reprezenta lățimea și respectiv lungimea unui dreptunghi. Aria acestuia este produsul dimensiunilor.

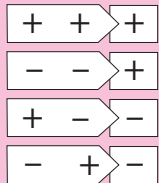
Asemănător, putem reprezenta produse de forma $a\sqrt{b} \cdot c\sqrt{d}$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $b, d \geq 0$.

În general, avem $a\sqrt{b} \cdot c\sqrt{d} = ac\sqrt{bd}$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $b, d \geq 0$.

Produsul a două numere reale se obține astfel:

Modulul produsului este produsul modulelor factorilor și semnul produsului este $+$ dacă factorii au același semn, sau $-$ dacă factorii sunt de semne contrare.

Dacă unul dintre factori este nul, atunci produsul este egal cu 0.



Regula
semnelor
la înmulțire

Să analizăm!

Proprietățile înmulțirii numerelor reale

Comutativitate

$$24 \cdot 105 = 105 \cdot 24$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

pentru orice numere reale a și b .

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$$

Asociativitate

$$[2,5 \cdot (-1,3)] \cdot 4 = 2,5 \cdot [(-1,3) \cdot 4]$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

pentru orice numere reale a, b și c .

$$(\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}) \cdot \sqrt{7} = \sqrt{3} \cdot (\sqrt{5} \cdot \sqrt{7})$$

Numărul real 1 este element neutru la înmulțire

$$-2,5 \cdot 1 = -2,5$$

$$a \cdot 1 = a$$

pentru orice număr real a .

$$\sqrt{13} \cdot 1 = \sqrt{13}$$

Orice număr real, nenul, are un invers, tot număr real

$$4 \cdot 0,25 = 1$$

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

pentru orice număr real și nenul a .

$$\sqrt{13} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} = 1$$

Distributivitatea înmulțirii față de adunare

$$3 \cdot \left(-\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + 3 \cdot \frac{2}{5}$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

pentru orice numere reale a, b și c .

$$\sqrt{3} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{5}) = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$$

Definiție

Numărul pozitiv m_g din proporția $\frac{m_g}{a} = \frac{b}{m_g}$ se numește media geometrică (proporțională) a numerelor reale pozitive a și b .

Avem $m_g^2 = a \cdot b$, deci media geometrică a două numere reale pozitive a și b este: $m_g = \sqrt{a \cdot b}$.

Exemple:

Pentru $a = \frac{1}{9}$ și $b = 225$, media geometrică este $m_g = \sqrt{\frac{1}{9} \cdot 225} = \sqrt{25} = 5$.

Pentru $a = \sqrt{3}$ și $b = 4\sqrt{3}$, media geometrică este $m_g = \sqrt{\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Scurt demers de cercetare

Știm că produsul a două numere raționale este un număr rațional.
Ce fel de număr este produsul dintre un număr rațional și un număr irațional?



Poate fi rațional sau irațional!

Exemplu:

$5 \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ este $5 \cdot \sqrt{2}$ număr irațional?

Presupunem că $5 \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Notăm $5 \cdot \sqrt{2} = a$, $a \in \mathbb{Q}$.

Rezultă $\sqrt{2} = \frac{a}{5}$. Dar $\frac{a}{5} \in \mathbb{Q}$ și $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Am ajuns la o contradicție. Așadar $5 \cdot \sqrt{2}$ este irațional.

Gândim la fel pentru produsul dintre un număr rațional nenul și un număr irațional.
În concluzie, înmulțind un număr rațional nenul cu un număr irațional, obținem alte exemple de numere iraționale.



Ce se întâmplă când înmulțim două numere iraționale? Obținem tot un număr irațional?

Așa ar părea!



Când înmulțim două numere iraționale, răspunsul este mai nuanțat: uneori obținem ca rezultat un număr rațional, alteori, un număr irațional!

Numerele $\sqrt{2}$ și $\sqrt{50}$ sunt iraționale.

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{50} = \sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = 10 \in \mathbb{Q}$$

Numerele $\sqrt{2}$ și $\sqrt{10}$ sunt iraționale.

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

Ce poți spune despre produsul dintre un număr rațional și un număr irațional?
Dar despre produsul a două numere iraționale?

Gândim critic și constructiv!

Evaluăm nivelul de bază

Decide care dintre numerele următoare sunt raționale:

- ① $\sqrt{2} + 5$; ② $\sqrt{2} \cdot 5$; ③ $\sqrt{2} : 5$; ④ $\sqrt{2} + \sqrt{5}$.

Problemă rezolvată

Care dintre următoarele operații făcute cu numere iraționale dau totdeauna ca rezultat un număr irațional:

- a)** calculul opusului unui număr; **b)** calculul modulului unui număr; **c)** ridicarea la pătrat a unui număr?

Rezolvare:

În această problemă, avem două strategii de rezolvare:

- pentru situațiile cu răspuns afirmativ, este necesar să facem o demonstrație;
- pentru situațiile cu răspuns negativ, este suficient să dăm un contraexemplu.

a) Răspunsul este afirmativ.

Dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci opusul său este $-a = (-1) \cdot a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, deoarece $-1 \in \mathbb{Q}$, $-1 \neq 0$

b) Răspunsul este afirmativ.

Dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci modulul său este egal sau cu a (dacă numărul este pozitiv), sau cu $-a$ (dacă numărul este negativ). În oricare dintre aceste cazuri, deducem că $|a| \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

c) Răspunsul este negativ. De exemplu, $\sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, dar $(\sqrt{3})^2 = 3 \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exprimare orală

Ce se întâmplă dacă înmulțim un număr irațional cu $\sqrt{2}$: rezultatul este totdeauna număr irațional?

Probleme propuse

1. Efectuează: **a)** $(+6) \cdot (-3)$; **b)** $(-2,15) \cdot (-32)$;

c) $\left(-\frac{7}{5}\right) \cdot \left(+\frac{1}{5}\right)$; **d)** $\left(-\frac{7}{11}\right) \cdot \left(-\frac{22}{28}\right)$.

2. Calculează:

a) $(+0,5) \cdot (-0,2)$; **b)** $(-0,6) \cdot (-0,3)$;

c) $\left(+\frac{3}{4}\right) \cdot (-0,25)$; **d)** $\left(+\frac{3}{5}\right) \cdot (+4)$.

3. Calculează: **a)** $\sqrt{5} \cdot (-\sqrt{6})$; **b)** $(-\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{5})$;

c) $(-\sqrt{7}) \cdot \sqrt{3}$; **d)** $\sqrt{2} \cdot (-\sqrt{8})$.

4. Calculează: **a)** $5\sqrt{3} \cdot 7\sqrt{2}$; **b)** $(-4\sqrt{6}) \cdot 2\sqrt{5}$;

c) $2\sqrt{3} \cdot (-\sqrt{2})$; **d)** $(-5\sqrt{6}) \cdot (-4\sqrt{35})$.

5. Calculează media geometrică a numerelor 4 și 25.

6. Calculează: **a)** $(-\sqrt{6}) \cdot \sqrt{120}$; **b)** $(-\sqrt{7}) \cdot (-\sqrt{28})$;

c) $(-\sqrt{35}) \cdot \sqrt{45} \cdot (-\sqrt{28})$; **d)** $(0,5 \cdot \sqrt{99}) \cdot \sqrt{165}$;

e) $(-\sqrt{9}) \cdot \sqrt{0,25} \cdot (-\sqrt{100})$; **f)** $\frac{1}{14} \cdot \sqrt{32} \cdot (-\sqrt{14})$.

7. Află media geometrică a două numere, știind că produsul lor este egal cu:

a) 75; **b)** 1,44; **c)** $\frac{169}{121}$; **d)** $\sqrt{81}$.

8. Calculează: **a)** $\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$; **b)** $\sqrt{7}(4-\sqrt{35})$.

9. Calculează media geometrică a numerelor:

$a = \sqrt{12}$ și $b = \sqrt{75}$.

10. Compară media geometrică a numerelor

$\sqrt{6}$ și $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ cu media geometrică a numerelor $\sqrt{2}$ și $\sqrt{6} + \sqrt{2}$.

11. Calculează media geometrică a numerelor:

$a = \sqrt{2268}$ și $b = \sqrt{2023}$.

12. Media geometrică a două numere pozitive

este 40 și unul dintre ele este de 4 ori mai mare decât celălalt. Află numerele.



13. Se consideră numărul $a = \sqrt{1019 \cdot 1020 + \sqrt{1019 \cdot 1020}}$. Arată că $1019 < a < 1020$.

Alege și rezolvă în 5 minute!

A

Calculează $(-\sqrt{75}) \cdot (\sqrt{12})$.

B

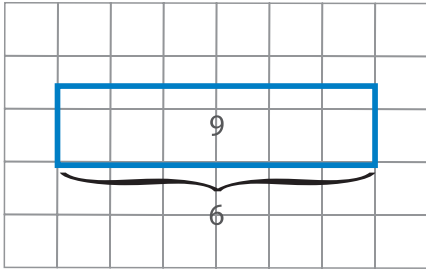
Calculează $(3 - 3\sqrt{2}) \cdot (1 + \sqrt{2})$.

C

Un număr pozitiv este de 6 ori mai mic decât altul. Află numerele, știind că media lor geometrică este egală cu 18.

O situație problemă

Dreptunghiurile de mai jos sunt reprezentate pe rețele cu latura de 1 cm. Putem evidenția rezultatul împărțirii a două numere raționale cu ajutorul ariilor.

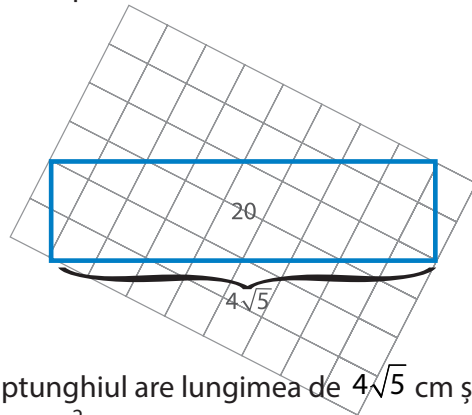


Dreptunghiul are lungimea de 6 cm și aria de 9 cm².

$$\text{Aflăm lățimea } l = 9 : 6 = \frac{9}{6} = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Verificare: } 6 \cdot \frac{3}{2} = 9.$$

Folosim aceeași reprezentare pentru a evidenția valoarea raportului a două numere reale.



Dreptunghiul are lungimea de 4√5 cm și aria de 20 cm². Lățimea lui este

$$l = 20 : (4\sqrt{5}) = \frac{20}{4\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

$$\text{Verificare: } 4\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 20.$$



Vrem să știm!

Cum definim împărțirea a două numere reale?

Rapoarte de numere reale

Înmulțirea și împărțirea numerelor raționale sunt operații inverse.

Pentru a defini valoarea raportului a două numere reale folosim inversul unui număr real.

$$6 \xrightarrow{\cdot \frac{3}{2}} 9 \xrightarrow{: \frac{3}{2}} 6$$

Inversul numărului real nenul a este numărul real $\frac{1}{a}$.

Notăm $a^{-1} = \frac{1}{a}$. Avem $a \cdot a^{-1} = 1$

$$4\sqrt{5} \xrightarrow{\cdot \frac{\sqrt{5}}{4}} 5 \xrightarrow{: \frac{\sqrt{5}}{4}} 4\sqrt{5}$$

Să comparăm!

Pentru a împărți două numere raționale scrise în formă fracționară procedăm astfel:

- stabilim semnul câtului după regula semnelor;
- calculăm valoarea absolută a câtului înmulțind primul număr cu inversul celui de-al doilea.

Exemplu:

$$\left(-\frac{10}{3}\right) : \frac{8}{5} = -\frac{10}{3} \cdot \frac{5}{8} = -\frac{25}{12}$$

Folosim aceleași reguli pentru a determina valoarea raportului a două numere reale. Pentru numerele scrise cu radicali aplicăm:

- formula $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (unde $a \geq 0, b > 0$);
- regulile de împărțire din \mathbb{Q} .

Exemplu:

$$\left(-\frac{10}{3}\sqrt{6}\right) : \frac{8\sqrt{2}}{5} = -\frac{10\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{5}{8\sqrt{2}} = -\frac{25}{12}\sqrt{3}$$

Generalizăm:

- Valoarea raportului a două numere reale se obține înmulțind primul număr cu inversul celui de-al doilea număr.
- Împărțirea la zero nu are sens.

Problemă rezolvată - Rezolvări comparative

1. Iați cum au procedat Ana și Mati pentru a aproxima valoarea raportului $7:\sqrt{2}$.

Ana



Eu obțin rezultatul astfel:
aproximez mai întâi $\sqrt{2}$,
apoi efectuez împărțirea.

$$\begin{array}{r|l} 7,000 & 1,414 \\ \hline 5\ 656 & 4,95 \\ \hline 13440 & \\ \hline 12726 & \\ \hline ==7140 & \\ \hline 7070 & \\ \hline ==70 & \end{array}$$

Geo



Eu am observat că
 $7:\sqrt{2} = \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$.
Aproximez și calculez astfel:
 $7 \cdot 1,414 : 2 = 7 \cdot 0,707 = 4,949$

Care dintre metode este mai rapidă?

Generalizăm:

Pentru a efectua mai ușor calcule cu rapoarte de forma $\frac{a}{\sqrt{b}}$, ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{Q}$, $b > 0$), este important să

nu apară radicali la numitor. Procedăm astfel: $\frac{\sqrt{b} \cdot a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$.

Spunem că raportul $\frac{a\sqrt{b}}{b}$ s-a obținut prin **raționalizarea numitorului** raportului $\frac{a}{\sqrt{b}}$.

Exemplu: $\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot 3 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot 2 - \sqrt{3} + \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2} = 0$.

Evaluăm nivelul de bază

- ① Care sunt inversele numerelor: 2, $-\frac{5}{7}$ și $\sqrt{11}$? ② Raționalizează numitorii fracțiilor $\frac{15}{\sqrt{3}}$ și $\frac{4}{3\sqrt{2}}$.



Rezolvări comparative

În tabelul de mai jos se regăesc rezultatele elevilor clasei a șaptea la un test de matematică. Care este media notelor pe clasă cu aproximație prin lipsă la sutimi?

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Nr. de elevi	2	4	6	7	6	5	2

La această problemă, doi elevi au propus următoarele soluții:

Liza a calculat media ponderată a notelor elevilor astfel:

$$m = \frac{4 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 6 + 7 \cdot 7 + 8 \cdot 6 + 9 \cdot 5 + 10 \cdot 2}{2 + 4 + 6 + 7 + 6 + 5 + 2} = \frac{226}{32} = 7,06$$

În acest calcul, ponderea notei 5 este 12,5 %.

Tic a calculat media aritmetică a tuturor notelor obținute de cei 32 de elevi din clasă, astfel:

A calculat suma tuturor notelor obținute de elevi $S = 4 + 4 + 5 + 5 + 5 + 5 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 10 + 10 = 226$.
Apoi a împărțit suma la numărul total al elevilor și a aflat $m = 226 : 32 = 7,06$.

Exprimare orală

Analizează rezolvările date de elevi la problema de mai sus și compară rezultatele. Care soluție consideri că este mai simplă? Explică alegerea făcută.



Să explorăm!

Calculăm	Media aritmetică a numerelor 4 și 9: $m_a(4;9) = \frac{4+9}{2} = \frac{13}{2} = 6,5$	Media geometrică a numerelor 4 și 9: $m_g(4;9) = \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$
Observăm	$4 < 6 < 6,5 < 9$	

Generalizăm:

Media aritmetică și media geometrică a două numere pozitive sunt cuprinse între cele două numere.

Propune un exemplu pentru a verifica afirmația de mai sus.

Gândim critic și constructiv!

Exerciții propuse

1. Scrie inversele numerelor reale:

$$8; -23; 0,8; -4,(2); \frac{11}{2}; -\frac{634}{251}; \sqrt{43}; \sqrt{17}.$$

2. Copiază pe caiet și completează tabelul:

a	$\sqrt{44}$	$-\sqrt{63}$	$\sqrt{62}$	$-\sqrt{50}$	$\sqrt{72}$
b	$\sqrt{11}$	$\sqrt{7}$	$-\sqrt{31}$	-5	3
$a : b$					

3. Raționalizează numitorii fracțiilor:

$$\text{a) } \frac{2}{\sqrt{2}}; \text{ b) } \frac{2}{\sqrt{3}}; \text{ c) } \frac{3}{\sqrt{5}}; \text{ d) } \frac{5}{\sqrt{6}}; \text{ e) } \frac{7}{2\sqrt{5}}.$$

4. Calculează media aritmetică ponderată a numerelor:

- a) 8; 5; 7 cu ponderile 1; 1,5; 2;
b) 0,7; 0,8; 0,9; 1 cu ponderile 2; 3; 4; 7;
c) 3, 4, 5, 6 cu ponderile 1, 2, 3 și 4.

5. Am cumpărat mere cu prețuri diferite, plătit pe kilogram 3 lei, 4 lei, 5 lei, 6 lei. Cantitățile au fost respectiv 1 kg, 2 kg, 3 kg, 4 kg. Ce preț mediu am plătit pe kilogram?

6. Efectuează: a) $\sqrt{625} : \sqrt{5}$;

$$\text{b) } 0,6 : \left(-\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{81}}\right); \text{ c) } \sqrt{\frac{3}{2}} : \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

7. Calculează media ponderată a numerelor 3,5 și 4 cu ponderile de 25% și 75%.

8. Simplifică fracțiile (dacă este posibil), apoi raționalizează numitorul:

$$\text{a) } \frac{35}{5\sqrt{3}}; \text{ b) } -\frac{36}{4\sqrt{5}}; \text{ c) } \frac{-33}{-3\sqrt{11}}; \text{ d) } \frac{10}{15\sqrt{3}}.$$

9. Efectuează: a) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{3} : \sqrt{2}$;

$$\text{b) } \sqrt{0,1} \cdot (-\sqrt{15}) \cdot \sqrt{18} : \sqrt{3};$$

$$\text{c) } (-4\sqrt{26} : \sqrt{5}) \cdot \sqrt{65} : \sqrt{8};$$

$$\text{d) } 5 \cdot \sqrt{17,64} : (-0,3) \cdot \frac{1}{\sqrt{4,41}}.$$

10. Folosind aproximarea prin lipsă la zecimi, verifică dacă media geometrică este mai mică sau egală cu media aritmetică pentru numerele:

- a) 3 și 22; b) 0,625 și 2,5.

11. Raționalizează numitorii fracțiilor următoare:

$$\text{a) } \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}}; \text{ b) } \frac{-7\sqrt{13}}{\sqrt{26}}; \text{ c) } \frac{4\sqrt{10}}{-\sqrt{24}}; \text{ d) } \frac{15}{2\sqrt{60}}.$$

12. Raționalizează numitorii fracțiilor:

$$\text{a) } \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2\sqrt{5}}; \text{ b) } \frac{\sqrt{12} + \sqrt{147}}{4\sqrt{3}}; \text{ c) } \frac{4 - \sqrt{2}}{\sqrt{8}}.$$

13. Efectuează calculele:

$$\text{a) } \frac{\sqrt{2^{2019}}}{\sqrt{2^{2017}}}; \text{ b) } \frac{\sqrt{16^{35}}}{\sqrt{8^{27}}}; \text{ c) } \frac{\sqrt{4928}}{\sqrt{9317}}.$$

14. Fie $a = \sqrt{3}$ și $b = \sqrt{12} + \sqrt{75}$. Arată că $\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$.

15. Fie $a = 3 - \sqrt{5}$ și $b = 3 + \sqrt{5}$. Arată că $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \in \mathbb{Q}$.

Alege și rezolvă în 5 minute!

A

Calculează $(3\sqrt{24}) : \sqrt{3} : \sqrt{2}$.

B

Raționalizează

numitorul fracției $\frac{6\sqrt{56}}{5\sqrt{42}}$.

C

Scrie în forma cea mai simplă $\frac{1:0,7}{\sqrt{\frac{12}{98}}}$.

Ne amintim ...

Pentru $a \in \mathbb{Q}^*$ avem:

$$a^0 = 1, a^1 = a,$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ factori}}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}, a^{-n} = \frac{1}{a^n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

$$\sqrt{a^2} = |a|, \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

1. Calculează: a) 2^{-3} ; b) $(-0,2)^3$; c) $-0,2^{-3}$;
d) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$; e) $\left(-\frac{1}{\sqrt{11}}\right)^2$; f) $|-0,4|^2$; g) $\left|-\frac{1}{\sqrt{3}}\right|^2$.

2. Precizează care dintre următoarele propoziții sunt adevărate: a) $2^{-1} = \frac{1}{4}$; b) $\frac{1}{0,3} = \frac{10}{3}$;
c) $2 \cdot 10^{-1} = \frac{1}{5}$; d) $\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{5}$; e) $\frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vrem să stim!

Cum efectuăm ridicarea la putere cu exponent întreg a numerelor reale? Se păstrează regulile de calcul din \mathbb{Q} ?

Extindem și definim!

Ridicarea la putere în mulțimea numerelor reale

Pentru $a \in \mathbb{R}^*$ definim $a^0 = 1, a^1 = a, a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ factori}}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2, a^{-1} = \frac{1}{a}, a^{-n} = \frac{1}{a^n}, n \in \mathbb{N}^*$



Exemple:

$$(3\sqrt{2})^2 = (3\sqrt{2}) \cdot (3\sqrt{2}) = 9 \cdot 2 = 18; (-2\sqrt{5})^3 = (-2\sqrt{5})(-2\sqrt{5})(-2\sqrt{5}) = -8 \cdot 5\sqrt{5} = -40\sqrt{5};$$

$$(\sqrt{2})^{-5} = \frac{1}{(\sqrt{2})^5} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}; \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-3} = (\sqrt{5})^3 = (\sqrt{5})^2 \cdot \sqrt{5} = 5\sqrt{5}.$$

Regulile de calcul cu puteri din mulțimea numerelor raționale se extind și în mulțimea numerelor reale.

Exemple:

Înmulțirea puterilor cu aceeași bază: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, pentru orice $a \in \mathbb{R}^*$ și $m, n \in \mathbb{Z}$.
 $\left(-\frac{\sqrt{7}}{5}\right)^3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{7}}{5}\right)^2 = \left(-\frac{\sqrt{7}}{5}\right)^{3+2} = \left(-\frac{\sqrt{7}}{5}\right)^5$

Împărțirea puterilor cu aceeași bază: $a^m : a^n = a^{m-n}$, pentru orice $a \in \mathbb{R}^*$ și $m, n \in \mathbb{Z}$.
 $\left(-\frac{\sqrt{7}}{5}\right)^2 : \left(-\frac{\sqrt{7}}{5}\right)^{-3} = \left(-\frac{\sqrt{7}}{5}\right)^{2-(-3)} = \left(-\frac{\sqrt{7}}{5}\right)^5$

Puterea unei puteri: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, pentru orice $a \in \mathbb{R}^*$ și $m, n \in \mathbb{Z}$.
 $\left[\left(-\frac{\sqrt{7}}{5}\right)^{-3}\right]^{-2} = \left(-\frac{\sqrt{7}}{5}\right)^{-3 \cdot (-2)} = \left(-\frac{\sqrt{7}}{5}\right)^6$

Înmulțirea puterilor cu același exponent: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}^*$ și $n \in \mathbb{Z}$.
 $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^6 \cdot \left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^6 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{\frac{5}{2}}\right)^6 = (-\sqrt{2})^6 = 8$

Împărțirea puterilor cu același exponent: $a^n : b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}^*$ și $n \in \mathbb{Z}$.
 $\left(-\frac{9}{\sqrt{5}}\right)^4 : \left(-\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^4 = \left(\frac{9}{\sqrt{5}} : \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^4 = \left(\frac{9}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}\right)^4 = 3^4 = 81$

Evaluăm nivelul de bază

Adevărat sau fals?

a) $(\sqrt{2})^6 = 8$; b) $(\sqrt{3})^7 : (\sqrt{3})^5 = 3$; c) $(\sqrt{5})^3 \cdot (\sqrt{5})^6 = 125$; d) $\left[(\sqrt{7})^2\right]^3 = (\sqrt{7})^5$.

Exerciții rezolvate

Calculează: **a)** $(\sqrt{3})^{2019} \cdot (\sqrt{3})^{-2015}$; **b)** $\left[(\sqrt{5})^2\right]^{-5} : (\sqrt{5})^{-15}$; **c)** $\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^5 : (\sqrt{7})^3$; **d)** $\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^{-8} \cdot (\sqrt{2})^7$.

Rezolvări: **a)** $(\sqrt{3})^{2019} \cdot (\sqrt{3})^{-2015} = (\sqrt{3})^{2019+(-2015)} = (\sqrt{3})^4 = 3^2 = 9$;

b) $\left[(\sqrt{5})^2\right]^{-5} : (\sqrt{5})^{-15} = (\sqrt{5})^{2 \cdot (-5)} : (\sqrt{5})^{-15} = (\sqrt{5})^{-10} : (\sqrt{5})^{-15} = (\sqrt{5})^{-10+15} = (\sqrt{5})^5 = 5^2 \sqrt{5} = 25\sqrt{5}$;

c) $\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^5 : (\sqrt{7})^3 = (\sqrt{7})^{-5} : (\sqrt{7})^3 = (\sqrt{7})^{-8} = \frac{1}{(\sqrt{7})^8} = \frac{1}{7^4}$; **d)** $\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^{-8} \cdot (\sqrt{2})^7 = (\sqrt{2})^{1-8+7} = (\sqrt{2})^0 = 1$.

Exerciții propuse



1. Calculează: **a)** 2^3 ; **b)** 3^2 ; **c)** 4^{-1} ;

d) 5^{-2} ; **e)** $\left(\frac{1}{2}\right)^3$; **f)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$; **g)** $\sqrt{5}^2$;



h) $\sqrt{2}^3$; **i)** $(-\sqrt{5})^4$; **j)** $\sqrt{3}^5$; **k)** 1^{219} ;

l) 0^{202} ; **m)** $(-1)^{119}$; **n)** $(-1)^{-299}$.

2. Adevărat sau fals?

a) $(\sqrt{2})^5 \cdot (\sqrt{2})^2 = 8\sqrt{2}$; **b)** $(\sqrt{3})^4 \cdot (\sqrt{3})^3 = \sqrt{3}^7$;

c) $(\sqrt{5}^3) \cdot (\sqrt{5})^2 = \sqrt{5}^6$; **d)** $(\sqrt{6})^3 \cdot (\sqrt{6})^{-2} = \sqrt{6}$.

3. Calculează:

a) $(\sqrt{5})^{-4} \cdot (\sqrt{5})^8$; **b)** $(\sqrt{2})^{15} : (\sqrt{2})^{19}$.



4. Calculează:

a) $(\sqrt{9})^3 \cdot (\sqrt{3})^7$; **b)** $(\sqrt{8})^{16} : (2\sqrt{2})^{10}$;

c) $(5\sqrt{3})^{14} : (-\sqrt{75})^{16}$; **d)** $(-2\sqrt{7})^7 : (\sqrt{28})^6$;

e) $(\sqrt{3})^7 \cdot (\sqrt{3})^{13} : (\sqrt{3})^{40}$;

f) $(\sqrt{19}) \cdot (\sqrt{19})^2 \cdot (\sqrt{19})^3 \cdot (\sqrt{19})^4 \cdot (\sqrt{19})^{-10}$.

5. Calculează:

a) $\left[(\sqrt{3})^5\right]^7 \cdot \left[(\sqrt{3})^{-3}\right]^{11}$; **b)** $\left[(\sqrt{5})^{-2}\right]^5 \cdot (\sqrt{5})^{2^3}$;

c) $(\sqrt{11})^{-7} \cdot \left[(\sqrt{121})^4\right]^2$; **d)** $\left[\left(\sqrt{\frac{5}{14}} \cdot \sqrt{7}\right)^4\right]^{-5}$;

e) $\left[(\sqrt{2})^5\right]^{-3} \cdot (\sqrt{2})^4 : (\sqrt{2})^{-9}$.



6. Calculează suma inverselor numerelor x și y dacă:

a) $x = 2\sqrt{3}$ și $y = 3\sqrt{2}$;

b) $x = (\sqrt{5})^{-3}$ și $y = (\sqrt{5})^{-1}$;

c) $x = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-2}$ și $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-4}$.

7. Calculează:

a) $\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{11}}\right)^3 \cdot \frac{(\sqrt{11})^5}{(\sqrt{5})^7}$; **b)** $\left(\sqrt{\frac{27}{25}}\right)^{-5} : \frac{(\sqrt{5})^3}{(\sqrt{3})^8}$;

c) $\left[(\sqrt{5})^3 : (\sqrt{5})^4 + (\sqrt{5})^{-1}\right]^{-1}$.



8. Fie

$$a = \left[\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3\right]^5 \cdot \frac{\left[(\sqrt{3})^2\right]^8}{2^{13}} + 5\sqrt{3}. \text{ Arată că } a^2 \in \mathbb{Q}.$$

9. Fie $a = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot (\sqrt{2})^3 \cdot \dots \cdot (\sqrt{2})^{100} \cdot (\sqrt{2})^{-5050}$.

Arată că $a \in \mathbb{N}$.

Alege și rezolvă în 5 minute!

A

Calculează $(\sqrt{5})^7 : (\sqrt{5})^5$.

B

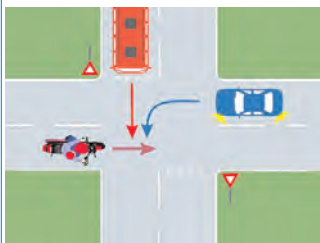
Calculează $(\sqrt{81}^3) : (\sqrt{27})^3 \cdot (3\sqrt{3})^5$.

C

Arată că

$$\left(-\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{175}}\right)^{78} : \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)^{77} : \left(\frac{3}{5}\right)^{77} = -\frac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{7}}$$

Ne amintim ...

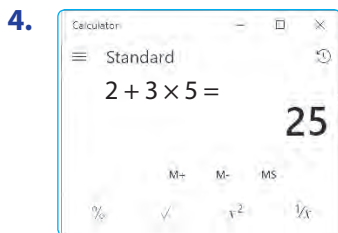


În calcule, respectăm reguli de prioritate.

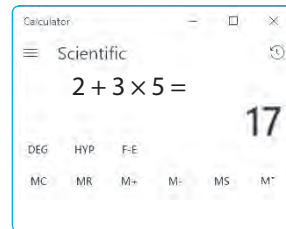
Calculează: **1. a)** $-4 + 8 - 2,5$; **b)** $\frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{15}{16}\right) : \frac{9}{4}$; **c)** $\left[(-0,1)^2\right]^{-3}$.

2. a) $105 : 15 + 4 \cdot (-15) - (-50)$; **b)** $0,9 \cdot 0,5 - \frac{3}{16} : \left(\frac{1}{2}\right)^2$; **c)** $\frac{5}{9} \cdot 63 + (-5)^2 - 625 : 5^2$.

3. a) $\left(\frac{5}{6} - \frac{8}{3} + \frac{7}{12}\right) : \left(0,3 - \frac{5}{12}\right)$; **b)** $2 + \frac{1}{2} \left\{ 2 - \frac{1}{2} \left[2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) \right] \right\}$.



În aplicația „Calculator” am tastat $2 + 3 \times 5$. În modul „Standard” rezultatul este 25. În modul „Științific” obținem 17. Care este rezultatul corect?



Vrem să știm!

Care este ordinea efectuării operațiilor cu numere reale?

Extindem ...

Operații	Ordinul operației	Prioritate
Ridicarea la putere, extragerea rădăcinii pătrate	III	Maximă
Înmulțire, împărțire	II	Medie
Adunare, scădere	I	Minimă

Aplicăm..

$$\underbrace{\left(-\sqrt{\frac{9}{4}}\right)}_I + \underbrace{\left(-\frac{2}{3}\right)}_{II} \cdot \underbrace{\left(-\sqrt{\frac{9}{4}}\right)}_{III}$$

Aplicând corect regulile de prioritate în calcul, vei obține rezultatul $-\frac{1}{2}$.



$$1 - \sqrt{36} \cdot \left\{ 3 - \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{3} - 2 \cdot \left(1 - \frac{3^2}{2} \right) - 1 \right] \right\}$$

Aplicând corect regulile de prioritate în calcul, vei obține rezultatul 2.

Paranteză	Prioritate
Mică (rotundă)	Maximă
Mare (dreaptă)	Medie
Acoladă	Minimă

Exprimare orală

Numește și explică proprietățile operațiilor cu numere reale utilizate în rezolvarea exercițiilor de mai sus.

Evaluăm nivelul de bază

Calculează: ① $-3 + 3 \cdot 3$.

② $8 + 2[(-2,5) \cdot 2 - 4 \cdot (-1,5)]$.

③ $2\sqrt{3} + 3\sqrt{15} \cdot \sqrt{5}$.

Exerciții propuse

1. Calculează: **a)** $(-3)^2 + (-8) : 2$;
b) $(-4) \cdot (+5) - (-2)^3$; **c)** $(-7 + 8 : 4) \cdot (-5)^3$;
d) $[(-3) \cdot 5 : 33 + 27 : (-3)^2] - 52$;
e) $\{[1 - 2 + 5 : (-5)] \cdot (-2)^2\} : 4$.
2. Calculează: **a)** $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{6}$; **b)** $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{15}$;
c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{15}$; **d)** $\sqrt{5} - \sqrt{10} : \sqrt{2}$.

5. Efectuează: **a)** $\sqrt{3} - \sqrt{147} : \sqrt{49}$;
b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} - \sqrt{72}$; **c)** $7 + \sqrt{40} : \sqrt{5} - \sqrt{22} \cdot \sqrt{11}$;
6. Efectuează: **a)** $\left[(\sqrt{3})^{-2}\right]^{-1}$; **b)** $(\sqrt{575})^0$;
c) $\left[(2\sqrt{3})^2\right]^{-3} - (2\sqrt{3})^{-2} \cdot (2\sqrt{3})^{-4}$;
d) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^3 : \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^4 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-1}$
e) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} - \sqrt{9} \cdot \sqrt{4} + \sqrt{7} \cdot \sqrt{7}$.

10. Află numărul real $z = x^2 + y^2$ în fiecare dintre cazurile:
a) $x = 5^{-2}$ și $y = (-3)^{-2}$; **b)** $x = (\sqrt{3})^{-2}$ și $y = (\sqrt{2})^{-2}$.
11. Calculează:
a) $(\sqrt{55} - 2\sqrt{77} + \sqrt{33}) : \sqrt{11} - 3(\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{7})$;
b) $[-\sqrt{12} + 5 \cdot (6\sqrt{3} - \sqrt{75})] \cdot (-2)^{2019} \cdot 2^{-2019}$.
12. Calculează: **a)** $[\sqrt{0,09} \cdot (\sqrt{0,04})^{-1} + 0,5] \cdot 2^{-1}$;
b) $\sqrt{2 + \frac{14}{25}} \cdot \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} \cdot \left(\frac{8}{5}\right)^{-1}$.
13. Efectuează: **a)** $(2 + \sqrt{11})(2 - \sqrt{11})$;
b) $(2 - \sqrt{11}) \cdot 2 + \sqrt{11}$; **c)** $2 - \sqrt{11} \cdot (2 + \sqrt{11})$;
d) $(3 + \sqrt{6}) \cdot (3 - \sqrt{6})$; **e)** $(3 - \sqrt{6}) \cdot 3 - \sqrt{6}$.

3. Calculează: **a)** $\sqrt{5} - \sqrt{10} : \sqrt{2}$;
b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{9}$; **c)** $\sqrt{24} : \sqrt{6} - \sqrt{14} : \sqrt{7}$.
4. Scrie mai simplu:
a) $2\sqrt{3} + (\sqrt{3} - \sqrt{7})$; **b)** $2\sqrt{3} - (\sqrt{3} - \sqrt{7})$;
c) $5\sqrt{2} - (\sqrt{8} - \sqrt{2})$; **d)** $\sqrt{75} - (2\sqrt{5} + \sqrt{45})$.

7. Efectuează: **a)** $\frac{3}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$; **b)** $\sqrt{6} \cdot \sqrt{2} - (\sqrt{3})^3$;
c) $(\sqrt{3})^{-2} + (\sqrt{2})^{-2} - (\sqrt{3} \cdot \sqrt{2})^{-2}$.
8. Calculează: **a)** $\sqrt{3}(\sqrt{2} - \sqrt{3})$; **b)** $2\sqrt{2}(3\sqrt{2} - 4)$;
c) $\sqrt{6}(\sqrt{3} + 2)$; **d)** $2\sqrt{6}(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$.
9. Calculează: **a)** $\sqrt{120} : \sqrt{30} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2}$;
b) $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{8} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$; **c)** $\left(3 + \sqrt{12}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-2}$.

14. Efectuează, cât mai rapid, următoarele calcule:
a) $(2\sqrt{3} - 2\sqrt{12} + 2\sqrt{75}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-1}$;
b) $\left(\frac{5}{\sqrt{18}} - \frac{3}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot (2\sqrt{2})^3$;
c) $\left(\frac{3}{-\sqrt{72}} - \frac{2}{\sqrt{8}}\right) \cdot \left(\frac{5}{\sqrt{12}} - \frac{3}{\sqrt{27}}\right)$.
15. Care dintre operații ar trebui modificată în calculul $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = 0$ astfel încât propoziția obținută să fie adevărată? Ce paranteze ar trebui adăugate pentru a obține o propoziție adevărată?
16. Arată că numerele $\sqrt{2} - 1$ și $\sqrt{2} + 1$ sunt inverse în raport cu înmulțirea. Cum sunt numerele $5 - 2\sqrt{6}$ și $5 + 2\sqrt{6}$? Formulează și alte exemple.

17. Determină numerele raționale a și b astfel ca: **a)** $a\sqrt{7} + 3 = 3\sqrt{7} - b$; **b)** $\sqrt{7} \cdot (3a - b\sqrt{7}) = 5\sqrt{7} + 1$.

Alege și rezolvă în 5 minute!

Calculează:

A $\sqrt{5} + \sqrt{35} \cdot \sqrt{7}$.

B $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{\sqrt{8}}{9} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

C $\left(\frac{7}{\sqrt{12}} - \frac{5}{2\sqrt{75}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot (3\sqrt{3})^3$.



- Se consideră numerele reale $\sqrt{3}, -\sqrt{25}, -\sqrt{1,44}, \sqrt{72}, \sqrt{\frac{625}{36}}, \sqrt{\frac{1}{1000}}, -\sqrt{7^2}, \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^4}$. Scrie-le pe cele care sunt: **a)** iraționale; **b)** întregi.
- Determină elementele mulțimilor:
 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 9^2 < x < 10^2\}$ și $B = \{y \in \mathbb{N} \mid 9 < \sqrt{y} < 10\}$.
- Compară x cu \sqrt{x} pentru $x \in \left\{1; \frac{1}{4}; \frac{1}{9}; 4; \frac{25}{36}; \frac{49}{25}\right\}$.
- Arată prin ridicare la pătrat că:
 - $72 < \sqrt{5290} < 73$;
 - $128 < \sqrt{16641} < 131$.
- Aproximează prin lipsă cu o sutime numerele:
 - $\sqrt{2}$; **b)** $\sqrt{3}$; **c)** $\sqrt{5}$; **d)** $\sqrt{7}$; **e)** $\sqrt{8}$.



- Aproximează prin adaos cu o zecime:
 - $\sqrt{52,33}$; **b)** $\sqrt{357,2}$; **c)** $\sqrt{0,47}$; **d)** $\sqrt{24800,04}$.
- Aproximează prin lipsă la zecimi numerele:
 - $\sqrt{8} - \sqrt{2}$; **b)** $\sqrt{10} + \sqrt{5}$; **c)** $3,4 + \sqrt{13}$; **d)** $2 - \sqrt{6}$.
- Dacă $x \in \mathbb{R}$, precizează care dintre propoziții sunt adevărate:
 - $|x| = -x$, dacă $x < 0$;
 - $|-x| = +x$, dacă $x < 0$; **c)** $|-x| = |x|$.



- Se consideră în plan punctele A, B și C , astfel încât $AB = \sqrt{12}$ cm, $BC = \sqrt{75}$ cm și $AC = \sqrt{147}$ cm. Arată că $AB + BC = AC$.
Ce poziție au punctele A, B, C ?
- Compară: $4\sqrt{12} + 3\sqrt{8} + 3\sqrt{40}$ și $2\sqrt{18} + 2\sqrt{48} + 19$.
- În medicină se folosește fir de aur cu grosimea $3 \cdot 10^{-8}$ m. De câte ori este mai subțire acesta decât firul din lâna oilor din rasa Merinos, care are $36 \cdot 10^{-6}$ m?
- Media ponderată dintre 3,5 și 4 este 3,6. Ce ponderi au cele două numere în acest calcul?
- Află media geometrică a două numere dacă produsul lor este egal cu 10,24.



- Arată că numărul $\sqrt{3^{2000} + 4^{2000}}$ este irațional.
- Calculează:
 - $\sqrt{\frac{12}{11} + \frac{13}{22} + \frac{14}{33} + \dots + \frac{110}{1089}} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99}\right)$;
 - $\sqrt{2} + \sqrt{2^2} + \sqrt{2^3} + \dots + \sqrt{2^{100}}$.

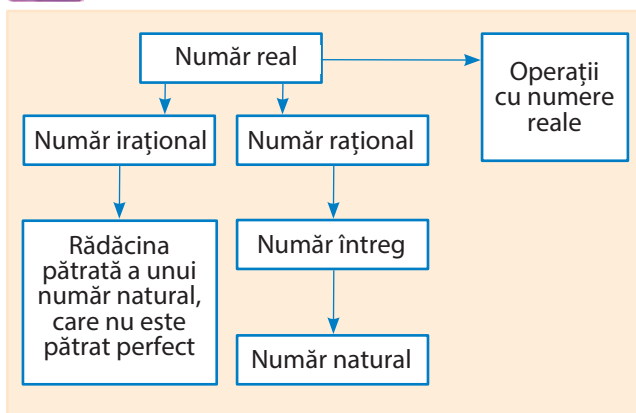
- Reprezintă pe axă numerele: $-4; 3,2; \sqrt{10}; -\sqrt{20}; 2; \sqrt{5}; \frac{5}{2}; -\frac{7}{2}$.
- Alege propozițiile adevărate:
 - $|+25| = 5$; **b)** $|\sqrt{25}| = 5$; **c)** $|+\sqrt{25}| = -5$;
 - $|\frac{-3}{2}| = -\left(\frac{-3}{2}\right)$; **e)** $|\sqrt{\frac{1}{5}}| = \left|+\sqrt{\frac{1}{5}}\right|$.
- Calculează:
 - $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$; **b)** $11\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$;
 - $\sqrt{15} \cdot \sqrt{10}$; **d)** $3\sqrt{60} : \sqrt{15}$; **e)** $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} - 2\sqrt{6}$.
- Raționalizează numitorii:
 - $\frac{7}{\sqrt{2}}$; **b)** $\frac{-13}{\sqrt{13}}$; **c)** $\frac{5\sqrt{72}}{6\sqrt{30}}$; **d)** $\frac{4\sqrt{13}}{\sqrt{26}}$.

- Calculează:
 - $\sqrt{45} + \sqrt{20} - \sqrt{80}$;
 - $\sqrt{18} - \sqrt{8} - \sqrt{2} + \sqrt{50}$;
 - $2\sqrt{5} + 7\sqrt{5} + \sqrt{180} - 17\sqrt{5}$;
 - $2\sqrt{500} - 3\sqrt{125} + 7\sqrt{45} - 5\sqrt{5}$.
- Efectuează:
 - $3\sqrt{125} \cdot 2\sqrt{21} \cdot \sqrt{35}$;
 - $\sqrt{108} : \sqrt{27} : 4$; **c)** $2\sqrt{5}(-\sqrt{45}) + 3\sqrt{12} \cdot \sqrt{\frac{28}{84}}$.

- Calculează:
 - $\frac{2\sqrt{7} - 3\sqrt{5}}{\sqrt{35}} - \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{7}}$;
 - $\frac{13\sqrt{3} + 13\sqrt{2} + 13}{19 + 19\sqrt{2} + 19\sqrt{3}}$; **c)** $(-\sqrt{3}^{-1} + \sqrt{5}^{-1}) \cdot \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{15}}$;
 - $\left(\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{5}\right) \cdot \left[\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^{-1} - \frac{3}{\sqrt{75}}\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{529}}$.
- Utilizând algoritmul extragerii rădăcinii pătrate, arată că propozițiile sunt adevărate:
 - $\sqrt{961} = 31$;
 - $\sqrt{2401} = 49$; **c)** $\sqrt{19600} = 140$;
 - $\sqrt{119716} = 346$; **e)** $\sqrt{191844} = 438$;
 - $\sqrt{203401} = 451$; **g)** $\sqrt{232324} = 482$.



Ce am învățat?



Rezolv testele pentru a verifica dacă pot:

- să recunosc numerele raționale și numerele iraționale;
- să introduc și să scot factori de sub radical;
- să calculez modulul unui număr real și să compar numere reale;
- să raționalizez numitorii de forma $a\sqrt{b}$.
- să efectuez operații cu numere reale: adunare, scădere, înmulțire, împărțire, ridicare la putere;
- să calculez media geometrică a două numere reale pozitive.

TESTUL 1

1. Transcrie pe foaia de rezolvare tabelul de mai jos și asociază, cu ajutorul săgeților, fiecărui număr de pe primul rând mulțimile de pe al doilea rând cărora le aparține.

$\sqrt{14}$	$\frac{9}{5}$	8	-53
\mathbb{N}	\mathbb{Z}	\mathbb{Q}	\mathbb{R}

2. Ordonează crescător și reprezintă pe axă următoarele numere:
 $|-4|$, $-2,5$, $-\sqrt{25}$ și $\sqrt{7}$.
3. Raționalizează numitorii: a) $\frac{14}{\sqrt{7}}$; b) $\frac{10\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}$.
4. Calculează: a) $(2\sqrt{3} - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{12}$;
b) $\left[\left(\frac{2}{3\sqrt{11}} - \frac{3}{\sqrt{44}} + \frac{4}{\sqrt{176}} \right) : \frac{5}{3\sqrt{11}} \right]^{-2}$.
5. Două numere naturale au media geometrică $\sqrt{7}$. Găsește suma celor două numere.

TESTUL 2

1. Transcrie pe foaia de rezolvare tabelul de mai jos și completează casetele de pe al doilea rând cu mulțimile \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} cărora le aparțin numerele din casetele de pe primul rând.

-38	$-\sqrt{72}$	4,3(2)	-109

2. Ordonează descrescător și reprezintă pe axă următoarele numere: $\left| -\frac{7}{2} \right|$, $-\sqrt{16}$, -6 și $\sqrt{6}$.
3. Raționalizează numitorii: a) $\frac{18}{\sqrt{6}}$; b) $\frac{6\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}$.
4. Calculează: a) $\sqrt{27} + \sqrt{12} - \sqrt{75}$;
b) $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{35}} + \frac{\sqrt{9}-\sqrt{7}}{\sqrt{63}} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{-2}$.
5. Două numere reale pozitive au media geometrică egală cu $8\sqrt{5}$. Determină cele două numere, știind că unul dintre ele este egal cu o cincime din celălalt.




Proiect Pavaje colorate

Plan de lucru

- ✓ **Materiale necesare:** coli de hârtie, riglă, creioane colorate.
- ✓ **Scop:** Veți realiza acoperiri interesante ale suprafețelor și veți calcula arii.

Realizarea proiectului

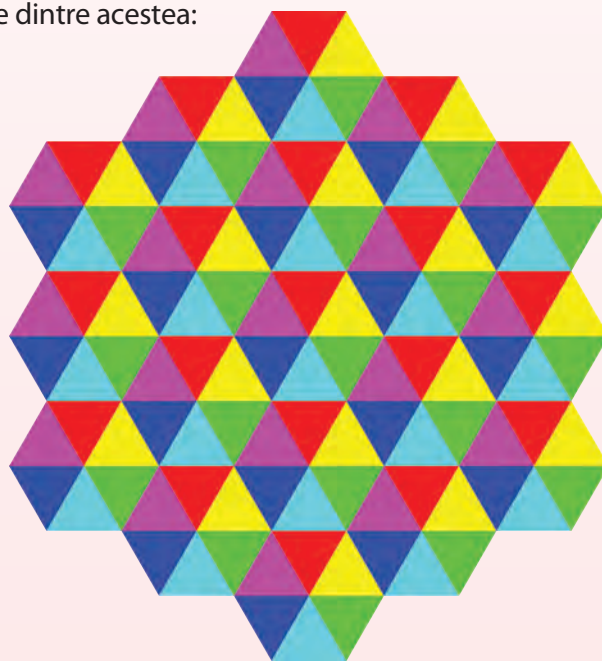
Lucrați în echipe de câte trei, patru sau cinci colegi!

- ✓ Realizați acoperiri interesante ale planului, folosind poligoane colorate. Mai jos este dat un model. Puneți-vă imaginația la încercare și creați compoziții plastice.
- ✓ Atașați o fișă cu probleme propuse și probleme rezolvate despre configurațiile pe care le-ați realizat.
- ✓ Căutați problemele marcate cu . Pentru fiecare dintre acestea:

- rezolvați problema;
- completați rezolvarea adăugând desene sugestive legate de tematica problemei;
- modificați problema, astfel încât să obțineți noi probleme pornind de la cea dată;
- la sfârșit, asamblați pe un poster al echipei toate materialele realizate.

Pentru început:

- ✓ Copiați pe caietele voastre imaginea alăturată (observând cu atenție modul în care a fost realizat desenul).
- ✓ Câte hexagoane sunt în figură? Dar triunghiuri? Dar paralelamente formate din două triunghiuri?
- ✓ Calculați aria totală a figurii alăturate, știind că aria unui triunghi echilateral albastru este $2\sqrt{3}$ mm².



Interacțiune

În echipa voastră:

- ✓ Discutați etapele proiectului și împărțiți sarcinile în cadrul echipei.
- ✓ În echipă, fiecare rezolvă propria sarcină, dar colaborează și cu ceilalți pentru a obține la final un produs cât mai bun al întregii echipe.
- ✓ Discutați și stabiliți forma finală a posterului pe care aplicați toate materialele realizate.

Prezentare

Lucrați cu toată clasa!

- ✓ Expuneți posterele realizate.
- ✓ Fiecare echipă va evalua posterele celorlalte echipe.
 - Alegeți prin vot posterul care v-a plăcut cel mai mult.
 - Atenție! Nicio echipă nu votează propriul poster.
- ✓ Stabiliți clasamentul final, totalizând punctele acordate de fiecare echipă.

Rezolvând exercițiile următoare, îți vei aminti noțiuni și rezultate necesare pentru parcurgerea acestei Unități de învățare. Fiecare problemă propusă valorează 1 punct. Se acordă 1 punct din oficiu.

I. Scrie pe foaia de rezolvare cuvintele sau rezultatele care, înscrise în spațiile punctate, formează enunțuri adevărate.

Mijlocul unui segment

1. Se consideră un segment AB și M mijlocul său. Dacă $AM = 3,5$ cm, atunci lungimea lui AB este egală cu ... cm.

Perimetrul pătratului

2. Un pătrat are perimetrul de 64 m. Latura sa are lungimea de ... dm.

Perimetrul triunghiului

3. În triunghiul echilateral ABC , D este mijlocul laturii BC . Dacă $BD = 5$ dm, atunci perimetrul este egal cu ... dm.

II. Scrie pe foaia de rezolvare litera corespunzătoare răspunsului corect pentru următoarele exerciții:

Teorema lui Pitagora

4. Ipotenuza unui triunghi dreptunghic cu catetele de 8 mm și 6 mm are lungimea de:

A. 14 mm; B. 100 mm; C. 1 cm; D. 16 mm.

Proprietăți ale triunghiului isoscel

5. Un triunghi isoscel are perimetrul egal cu 104 m și baza de 24 m. Celelalte laturi ale triunghiului au lungimile de:

A. 400 dm; B. 24 m; C. 4 m; D. 35 m.

Aria pătratului

6. Aria pătratului cu latura de 2,5 cm este egală cu:

A. 10 cm^2 ; B. $62,5 \text{ cm}^2$; C. 625 mm^2 ; D. $0,625 \text{ cm}$.

III. Scrie pe foaia de rezolvare soluțiile complete ale exercițiilor următoare:

Proprietăți ale triunghiului dreptunghic

7. Un triunghi dreptunghic are ipotenuza de 25 dm. Ce lungime are segmentul care unește vârful unghiului drept cu mijlocul ipotenuzei?

Aria dreptunghiului

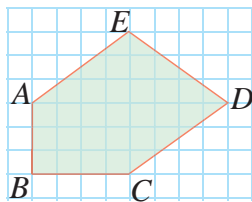
8. Un dreptunghi $ABCD$, cu $AC \cap BD = \{O\}$ are diagonala $BD = 6$ m, iar triunghiul DOA este echilateral. Calculează aria dreptunghiului $ABCD$.

Unități de măsură pentru lungimi și arii

9. Un dreptunghi $ABCD$ are diagonala $BD = 6$ m și măsura unghiului BDA de 30° . Cât este aria dreptunghiului $ABCD$?

Dacă ai obținut mai puțin de jumătate din punctaj la acest test, este util să revezi definițiile și proprietățile verificate mai sus, pentru a înțelege mai bine ceea ce urmează.

O situație-problemă



Bunicul vrea să pună un gard nou și m-am gândit să-l ajut. Am schițat aici planul curții. Acum trebuie să merg la magazin și să cumpăr sfoară pentru a înconjura curtea, ca să-mi dau seama care va fi lungimea gardului.

Cred că e cel mai simplu să măsoți fiecare latură, apoi să calculezi suma!



Vrem să știm!

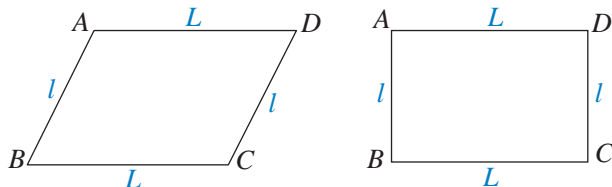
Cum calculăm perimetrul unui poligon?

Ne amintim ...

Perimetrul unui poligon este suma lungimilor laturilor lui.

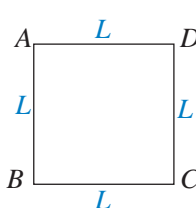
În particular, avem:

Perimetrul paralelogramului și al dreptunghiului cu lungimea L și lățimea l :

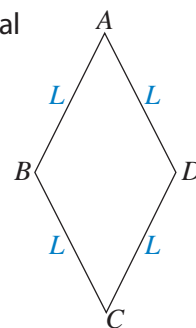


$$P = 2(L + l)$$

Perimetrul pătratului și al rombului de latură L :



$$P = 4L$$



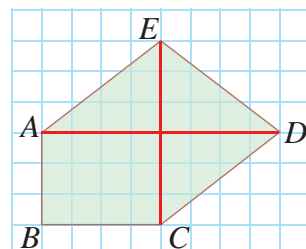
Rezolvăm situația problemă!

Ema a desenat conturul curții bunicului în imaginea alăturată. Știind că latura rețelei corespunde unei lungimi de 1 m, ce perimetru are curtea?

Rezolvare: Curtea bunicului este formată dintr-un dreptunghi cu laturile de lungimi 3 m și 4 m și trei triunghiuri dreptunghice cu catete de 3 m și 4 m.

Ipotenuza fiecărui astfel de triunghi este: $\sqrt{(3^2 + 4^2)} = 5$.

Rezultă că perimetrul curții este $3 + 4 + 5 + 5 + 5 = 22$ (m).

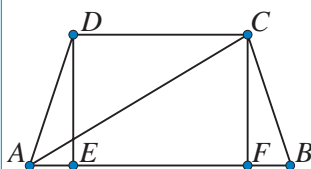


Evaluăm nivelul de bază!

- Calculează perimetrul unui: **a)** triunghi cu laturile de 4 cm, 5 cm și 6 cm; **b)** romb cu latura de 7 cm; **c)** trapez isoscel cu bazele de 8 cm, 5 cm și laturile neparalele jumătate din lungimea bazei mari.
- Un patrulater are perimetrul de 82,3 cm. Știind că două dintre laturile sale au 18,4 cm și respectiv 24,8 cm, iar celelalte două laturi sunt congruente, calculează lungimile laturilor congruente.

Problemă rezolvată

Un trapez isoscel are bazele de 6 cm și 4 cm și înălțimea de 3 cm. Ce lungimi au diagonalele?



Rezolvare:

Ipoteză:

$ABCD$ trapez isoscel

$AB = 6$ cm

$CD = 4$ cm; $h = 3$ cm

Concluzie:

$AC = ?$

Demonstrație:

Fie $DE \perp AB$, $CF \perp AB$, $ABCD$ trapez isoscel

$$\Rightarrow \triangle DEA \cong \triangle CFB \text{ (I.U.)} \Rightarrow AE = FB = \frac{6-4}{2} = 1 \text{ (cm)},$$

iar $AF = AE + EF = 5$ cm.

În $\triangle AFC$ dreptunghic în $\sphericalangle F$, din teorema lui Pitagora, rezultă $AC^2 = AF^2 + FC^2$, iar $AC = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$ (cm).

Exprimare orală

Ce proprietăți ale trapezului isoscel s-au folosit în demonstrație?

Probleme propuse



- Calculează lungimea diagonalei unui pătrat, știind că latura acestuia este de:
a) 4 cm; b) 6 cm; c) 2,5 cm; d) 7 cm.
- Un teren de fotbal are dimensiunile 96 m și 72 m. Ce lungime are diagonala acestui teren?

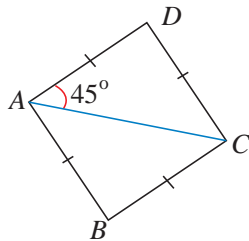


- Un patrulater are lungimile laturilor egale cu 1,5 dm, 3,3 dm, 3 dm, respectiv 0,4 dm. Calculează perimetrul patrulaterului.

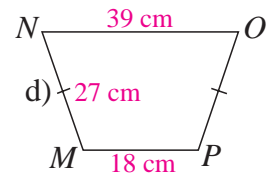
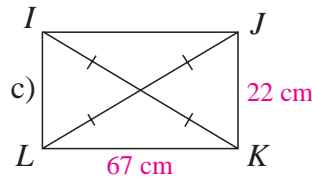
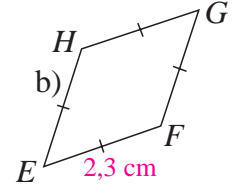
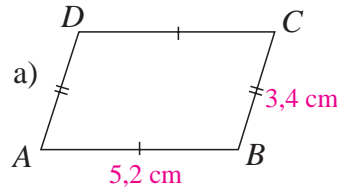


- Fie $MNPQ$ un romb cu $\sphericalangle MNP = 60^\circ$ și $MN = 6$ cm. Calculează lungimile diagonalelor rombului.

- Știind că $AB = 2,5$ cm, calculează lungimea diagonalei BD a patrulaterului $ABCD$ din figura alăturată.

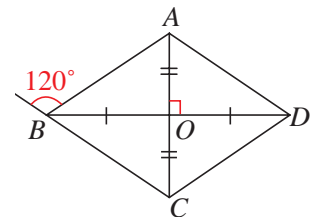
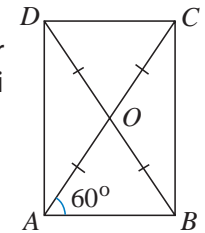


- Desenează un romb $ABCD$ cu $AB = 3$ cm și $\sphericalangle ABC = 120^\circ$. Identifică pe desenul tău toate segmentele congruente cu AB .
- Pe baza informațiilor din figurile de mai jos, calculează perimetrele patrulaterelor din figură.



- Perimetrul unui patrulater este de 53 cm. Află lungimile laturilor patrulaterului, știind că are trei laturi egale, iar cea de-a patra este mai mare cu 5 cm decât celelalte trei.
- Trebuie construit un cadru din bare metalice, având formă de trapez isoscel cu bazele de 10 m și 2 m, înalt de 3 m. Ce lungime totală au barele necesare?

- Calculează lungimile laturilor și diagonalelor patrulaterului din figura alăturată, știind că $OB = 3$ cm.
- Calculează lungimile laturilor și diagonalelor patrulaterului din figura alăturată, știind că $OC = 2$ cm.



- Se consideră trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $\sphericalangle D = 45^\circ$, $\sphericalangle C = 30^\circ$ și $AD = 3\sqrt{2}$ cm. Se construiesc înălțimile AE și BF , cu $E, F \in CD$. Se știe că $ABFE$ este pătrat. Precizează natura și calculează perimetrul patrulaterului $MNFE$, unde M și N sunt mijloacele laturilor AD , respectiv BC .

Alege și rezolvă în 5 minute!

A

Calculează perimetrul unui paralelogram cu laturile de 9 cm și 5 cm.

B

Rombul $ABCD$ cu latura de 8 cm are $\sphericalangle ABC = 60^\circ$. Calculează lungimea diagonalei BD .

C

Trapezul dreptunghic $ABCD$, cu bazele AB și CD are $AB = 2CD$ și $AD = CD = 3$ cm. Calculează perimetrul trapezului $ABCD$.



O situație-problemă



Am fost cu tata la magazin să cumpărăm parchet. Am ales modelul și am citit specificațiile: Clasa 31, Specie Pin, Grosime 8 mm, Ambalare 1,8457 metri pătrați/cutie. Ca să-l ajut pe tata, m-am oferit să calculez de câte cutii am nevoie pentru camera mea. Oare cum să fac?

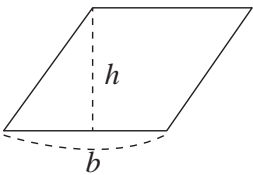
Ai putea să numeri câte pătrate cu latura de 1 m încap în suprafața camerei ...

Vrem să știm!

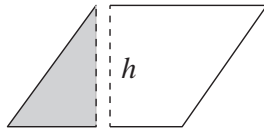
Cum calculăm aria unor paralelograme?

Cum calculăm aria unui paralelogram?

Observăm



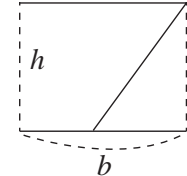
Tăiem de-a lungul liniei punctate.



Îndepărtăm triunghiul format.



Îl așezăm în partea opusă.



Unim cele două piese. Am obținut un dreptunghi.

Demonstrăm

Aria unui paralelogram având o latură de lungime a și înălțimea corespunzătoare ei h este $A = ah$.

Ipoteză:

$ABCD$ paralelogram, $BC = a$,
 $CF \perp AD$, $F \in AD$, $CF = h$.

Concluzie:

$$A_{ABCD} = a \cdot h$$

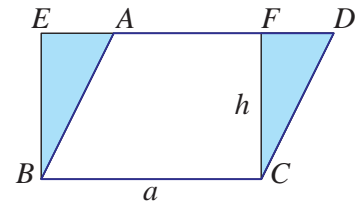
Demonstrație:

Construim $BE \perp AD$, $E \in AD$.

$\triangle ABE$, $\triangle DCF$ sunt dreptunghice în E, F ;
 $AB \equiv CD$ (laturi opuse în paralelogram);

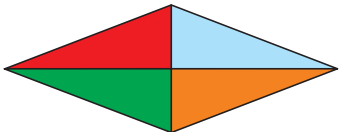
$\sphericalangle BAE \equiv \sphericalangle CDF$ (corespondente);
rezultă că $\triangle ABE \equiv \triangle DCF$ (I.U.), iar

$$A_{ABE} = A_{CDF}. \text{ Atunci } A_{ABCD} = A_{ABCF} + A_{CDF} = A_{ABCF} + A_{ABE} = A_{BCFE} = ah.$$



Cum calculăm aria unui romb?

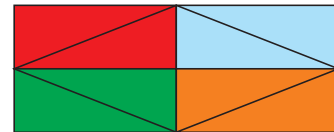
Observăm



Un romb este format din 4 triunghiuri dreptunghice.



Le așezăm în exterior.



Dacă le dublăm, obținem un dreptunghi.

Demonstrăm

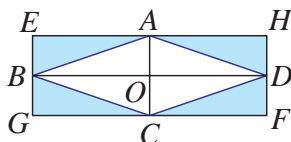
Aria unui romb cu diagonalele a și b este $A = \frac{a \cdot b}{2}$.

Ipoteză: $ABCD$ romb,

$AC = a$, $BD = b$.

Concluzie:

$$A_{ABCD} = \frac{1}{2} a \cdot b$$



Demonstrație:

Notăm $AC \cap BD = \{O\}$. Construim dreptunghiurile $AOBE$, $COBG$, $CODF$, $AODH$. Atunci $A_{AOD} = A_{AHD}$,
 $A_{AOB} = A_{AEB}$, $A_{BOC} = A_{BGC}$, $A_{DOC} = A_{DFC}$.

Rezultă: $ab = A_{EGFH} = 2 \cdot A_{ABCD}$, de unde $A_{ABCD} = \frac{1}{2} ab$.

Evaluăm nivelul de bază!

Calculează aria: ① unui pătrat cu latura de 7 cm; ② unui dreptunghi cu laturile de 4 cm și 6 cm; ③ unui paralelogram cu baza de 3,7 dm și înălțimea de 4,3 dm; ④ unui romb cu diagonalele de 6 mm și 16 mm.

Probleme propuse



- Calculează: **a)** aria unui pătrat cu latura de $\sqrt{13}$ cm; **b)** aria unui dreptunghi cu o latură de $\sqrt{12}$ cm și alta de $\sqrt{75}$ cm.
- Determină: **a)** lungimea laturii unui pătrat cu aria de 75 cm^2 ; **b)** lungimea unei laturi a unui dreptunghi care are aria egală cu $8\sqrt{15} \text{ cm}^2$ și o latură de $2\sqrt{5}$ cm.
- Dacă b este lungimea bazei și h lungimea înălțimii unui paralelogram, calculează aria sa dacă: **a)** $b = 4$ cm și $h = 3,5$ cm; **b)** $b = 60$ mm și $h = 10\sqrt{10}$ dm.
- Calculează aria unui romb având lungimile diagonalelor d_1 și d_2 dacă: **a)** $d_1 = 12$ m și $d_2 = 700$ cm; **b)** $d_1 = 15,2$ cm și $d_2 = 8,5$ cm.

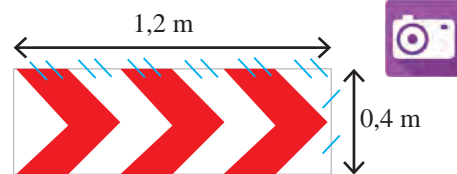


- Determină aria unui dreptunghi care are lungimea de 1,2 dm și diagonala de $4\sqrt{13}$ cm.
- Determină perimetrul și lungimea diagonalei unui pătrat având aria egală cu aria unui dreptunghi cu dimensiunile de 8 cm și 10 cm.
- Află perimetrul și lungimea diagonalei unui dreptunghi cu lungimea de 9 cm și aria egală cu cea a pătratului cu diagonala de $6\sqrt{2}$ cm.
- Calculează aria paralelogramului $ABCD$ cu $AB = 7$ cm, $AD = 4$ cm și $\sphericalangle DAB = 30^\circ$.
- Camera Emei are lățimea de 3,5 m și lungimea de 4 m. Recitește situația-problemă. De câte cutii de parchet va avea nevoie pentru a acoperi suprafața podelei?
- Podeaua unei camere are formă dreptunghiulară, cu dimensiunile de 4 m și 2,8 m. Ea trebuie placată cu plăci de gresie pătrate, cu latura de 40 cm. Câte plăci de gresie sunt necesare pentru placarea camerei? Se poate placa podeaua doar cu plăci întregi sau se pun și plăci tăiate? Propune o problemă asemănătoare.



- Pentru a placa podeaua unei camere cu dimensiunile de 5,5 m și 6 m se folosesc plăci de gresie. Pierderile în execuția lucrării sunt de 10%. Află câți metri pătrați de gresie trebuie cumpărați și cât costă gresia necesară pentru placarea podelei, dacă un metru pătrat de gresie costă 42 lei și se vând doar cantități de gresie reprezentând un număr întreg de metri pătrați.

- Semnul de circulație din figură avertizează că urmează o curbă deosebit de periculoasă. Calculează aria suprafeței colorate cu roșu și aria suprafeței albe.



- Se consideră un pătrat $A_1B_1C_1D_1$ cu latura de 1 dm. Din acesta, se decupează pătratul $A_1B_2C_2D_2$, cu B_2 mijlocul lui A_1B_1 și D_2 mijlocul lui A_1D_1 . Din pătratul $A_1B_2C_2D_2$ se decupează pătratul $A_1B_3C_3D_3$, cu B_3 mijlocul lui A_1B_2 și D_3 mijlocul lui A_1D_2 . Se repetă operațiunea până se obține pătratul $A_1B_{100}C_{100}D_{100}$.
a) Calculează lungimea laturii, perimetrul și aria pătratului $A_1B_{100}C_{100}D_{100}$.
b) Demonstrează că punctele C_1, C_2, \dots, C_{100} și A_1 sunt coliniare.
- Fie două rombur congruente $ABCD$ și $ADEF$, având doar latura AD comună, cu diagonalele $BD = DF = 60$ cm și $AC = AE = 80$ cm. Se construiește G simetricul punctului A față de mijlocul segmentului CE . Stabilește natura patrulaterului $ACGE$ și calculează aria acestuia.

Alege și rezolvă în 5 minute!

A

Determină aria dreptunghiului cu lungimea de 12 cm și lățimea egală cu jumătate din lungime.

B

$ABCD$ este un dreptunghi cu $AB = \sqrt{12}$ cm și $BC = \sqrt{3}$ cm. Dacă E și F sunt mijloacele segmentelor AB și respectiv CD , calculează aria patrulaterului $EBFD$.

C

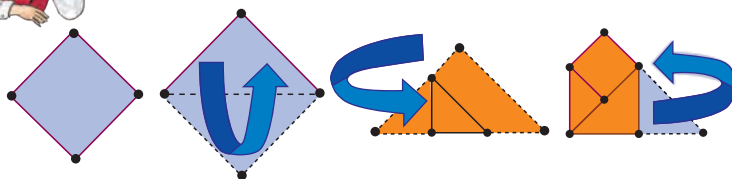
În triunghiul ascuțitunghic ABC , D , E și F sunt mijloacele laturilor BC , AC și respectiv AB . Știind că $BC = 4$ cm și înălțimea $AM = 2$ cm, calculează aria patrulaterului $CDFE$.

O situație-problemă



Sâmbătă îmi serbez ziua de naștere. Uite cum am să-mi împăturesc batista pentru a se asorta cu costumul meu cel nou!

Dar de ce trebuie împăturită? Că în buzunar nu se vede!



Uite de ce:



Vrem să știm!

Cum calculăm aria triunghiului?

Demonstrăm!

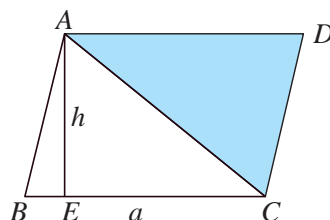
Aria unui triunghi cu o latură de lungime a și înălțimea corespunzătoare h este $A = \frac{ah}{2}$.

Ipoteză:

ABC triunghi,
 $BC = a, AE \perp BC, E \in BC, AE = h$.

Concluzie:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h.$$



Demonstrație:

Construim paralelogramul $ABCD$.

Atunci $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ și $A_{ABC} = A_{CDA}$.

Deoarece $a \cdot h = A_{ABCD} = 2 \cdot A_{ABC}$,

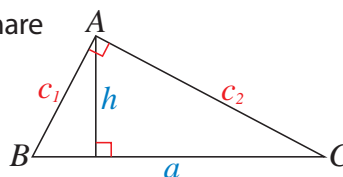
rezultă că: $A_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h$.

Extindem ...

În triunghiul dreptunghic, catetele sunt înălțimi, prin urmare

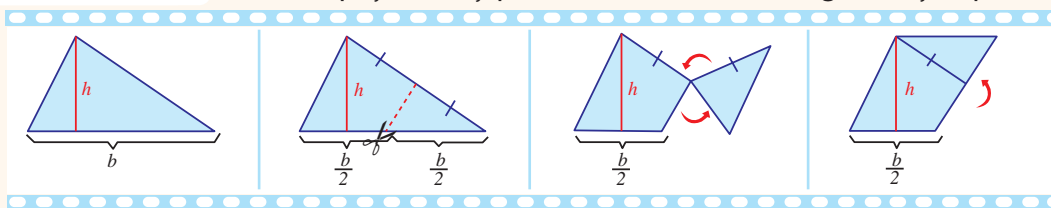
$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot c_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h.$$

$$\text{Deci } h = \frac{c_1 \cdot c_2}{a}.$$



Exprimare orală

Observă pașii folosiți pentru a calcula aria triunghiului și explică rezultatul.

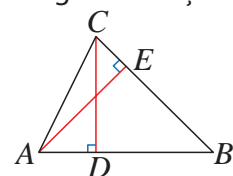


Evaluăm nivelul de bază!

- 1) Calculează aria unui triunghi cu baza de 5 cm și înălțimea de 4 cm.
- 2) Triunghiul ABC este echilateral și are latura de $\sqrt{5}$ cm. Calculează aria triunghiului ABC .

Problemă rezolvată

Fie triunghiul ABC , cu $AB = 45$ mm, $BC = 4$ cm. Știind că lungimea înălțimii CD este de 22 mm, calculează lungimea înălțimii AE a triunghiului ABC .



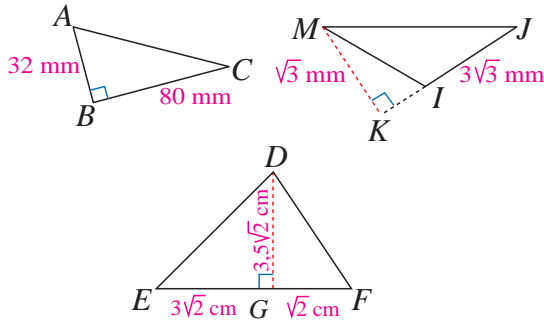
Rezolvare:

$$A_{ABC} = \frac{AB \cdot CD}{2} = \frac{45 \cdot 22}{2} \text{ mm}^2 = 495 \text{ mm}^2$$

$$A_{ABC} = \frac{BC \cdot AE}{2} \Rightarrow \frac{40 \text{ mm} \cdot AE}{2} = 495 \text{ mm}^2 \Rightarrow AE = \frac{2 \cdot 495}{40} \text{ mm} = 24,75 \text{ mm}$$

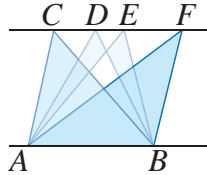
Probleme propuse

1. Calculează ariile triunghiurilor de mai jos.



2. Triunghiul ABC este echilateral, cu latura de 4 cm. Calculează aria triunghiului.

5. Știind că dreptele AB și CD sunt paralele, arată că triunghiurile alăturate au arii egale (sunt echivalente).



6. Baza unui triunghi măsoară 36 dm, iar înălțimea este egală cu $\frac{4}{9}$ din lungimea acesteia. Calculează aria triunghiului.

7. Triunghiul MNP este dreptunghic în M și are $\sphericalangle N = 30^\circ$, $MP = \sqrt{3}$ cm. Calculează aria triunghiului.

10. Fie un triunghi ABC , cu $AB = AC = 7$ m și baza $BC = 10$ m. Calculează distanța de la un vârf al bazei la latura opusă.

11. Triunghiul ABC este dreptunghic în B , $AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm. Calculează lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei.

3. Completează pe caiet tabelul, în care A reprezintă aria unui triunghi, b baza triunghiului și h înălțimea corespunzătoare bazei.

b (în cm)	h (în cm)	A (în cm^2)
3	4	...
...	$\sqrt{3}$	$\sqrt{147}$
$2\sqrt{3}$...	15

4. Calculează aria unui triunghi dreptunghic cu o catetă de 3 cm și cealaltă de trei ori mai mare. Propune o problemă asemănătoare.



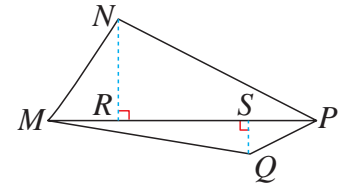
8. Fie triunghiul ABC , M mijlocul laturii AB și N mijlocul laturii AC . Calculează aria triunghiului AMN știind că:

- a) $\triangle ABC$ este dreptunghic în A , cu $AB = 24$ mm și $AC = 5$ cm;
- b) $\triangle ABC$ este isoscel, cu $AB = AC = 8$ dm și $BC = 4\sqrt{2}$ dm.

9. Un indicator rutier are forma unui triunghi isoscel cu baza de 48 cm și laturile congruente de 51 cm. Ce arie are tabla necesară pentru indicator?

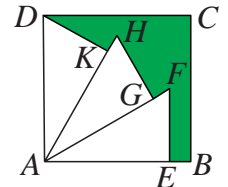


12. Calculează aria patrulaterului $MNPQ$ din figura alăturată, știind că $SP = 5,4$ cm, $MS = \frac{8}{3} \cdot SP$, $SQ = \sqrt{11}$ cm și $NR = 3SQ$.



13. Demonstrează că suma distanțelor de la orice punct din interiorul unui triunghi echilateral la laturile triunghiului este constantă.

14. În figura alăturată, $ABCD$ este un pătrat cu latura de 4 cm și $\triangle AEF \equiv \triangle AGH \equiv \triangle AKD$, cu $\sphericalangle E = \sphericalangle G = \sphericalangle K = 90^\circ$. Compară aria suprafeței colorate cu aria suprafeței albe.



Alege și rezolvă în 5 minute!

A Calculează aria unui triunghi având baza de 3,5 cm și înălțimea de $\sqrt{5}$ cm.

B Calculează aria unui triunghi dreptunghic cu un unghi de 30° , având ipotenuza de 6 cm.

C Un pătrat și un triunghi au aceeași arie. Suma lungimilor bazei și înălțimii triunghiului este de 63 dm, iar baza de 8 ori mai mare decât înălțimea. Calculează latura pătratului.

O situație-problemă

Ieri tata a făcut reparații la un perete, iar eu m-am jucat cu mistria. Tata are două mistrii identice.



Ai observat că două mistrii identice pot forma un paralelogram?



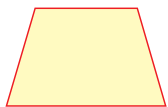
Numai dacă mistriile sunt ca niște trapeze!



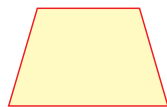
Vrem să știm!

Cum calculăm aria trapezului?

Observăm



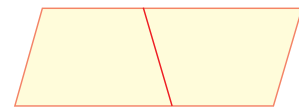
Am un trapez.



Îl copiez.



Îl rotesc ...



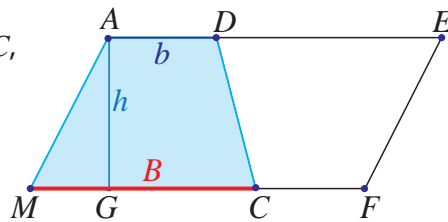
... și îl lipesc de primul. Am obținut un paralelogram.

Demonstrăm

Aria unui trapez este egală cu semisuma lungimilor bazelor înmulțită cu distanța dintre baze.

Ipoteză:
 $AMCD$ trapez, $AD \parallel MC$,
 $MC = B$, $AD = b$,
 $AG \perp MC$, $G \in MC$,
 $AG = h$.

Concluzie:
 $A_{AMCD} = \frac{1}{2}(b + B) \cdot h$



Demonstrație:

Construim $DE \equiv MC$, $E \in AD$ și $CF \equiv AD$, $F \in MC$. Atunci $AMFE$ este paralelogram, având laturile opuse, AE și MF , paralele și congruente.

$AMCD$ și $FEDC$ au laturile și unghiurile respectiv congruente.

Atunci $A_{AMCD} = A_{FEDC}$. În concluzie, $(b + B) \cdot h = A_{AMFE} = 2 \cdot A_{AMCD}$ și deci

$$A_{AMCD} = \frac{1}{2}(b + B) \cdot h.$$

Extindem ...

Dacă l este lungimea liniei mijlocii a trapezului, atunci $l = \frac{1}{2}(b + B)$ și deci $A_{AMCD} = l \cdot h$.

Evaluăm nivelul de bază!

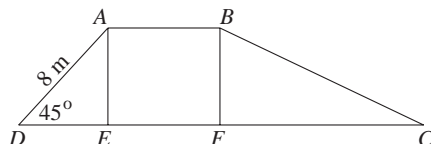
Bazele unui trapez măsoară 23 cm, 37 cm și înălțimea măsoară 10 cm. Calculează aria trapezului.

Problemă rezolvată

Se consideră trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB < CD$, $AD = 8$ m, $\sphericalangle ADC = 45^\circ$ și $AE \perp CD$, $BF \perp CD$, astfel încât $E, F \in CD$, $EF \equiv AE$ și $FC = 2 \cdot DE$. Calculează aria trapezului $ABCD$.

Ipoteză: $ABCD$ trapez,
 $AB \parallel CD$, $AB < CD$, $AD = 8$ m,
 $\sphericalangle ADC = 45^\circ$, $AE \perp CD$,
 $BF \perp CD$, $E, F \in CD$, $EF \equiv AE$,
 $FC = 2 \cdot DE$

Concluzie: $A_{ABCD} = ?$



Demonstrație: $A_{ABCD} = \frac{(AB + CD) \cdot AE}{2}$, $AE \perp CD$ și $\sphericalangle ADC = 45^\circ \Rightarrow$

$\triangle AED$ este dreptunghic isoscel $\Rightarrow DE = AE$. Din teorema lui Pitagora în $\triangle AED \Rightarrow AE^2 + DE^2 = AD^2$ și $DE = AE = 4\sqrt{2}$ m

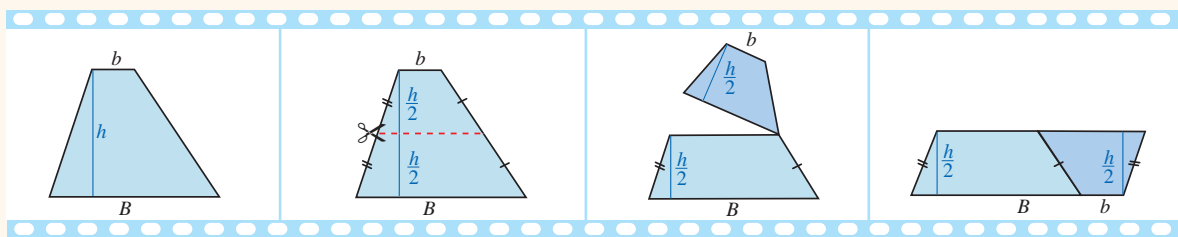
$AB \parallel CD$, $BF \perp CD$ și $EF \equiv AE \Rightarrow ABFE$ pătrat, deci $AB = 4\sqrt{2}$;

$FC = 2 \cdot DE \Rightarrow FC = 8\sqrt{2}$ m, $CD = DE + EF + FC = 16\sqrt{2}$ m.

Deci $A_{ABCD} = \frac{(4\sqrt{2} + 16\sqrt{2}) \cdot 4\sqrt{2}}{2} = 80$ (m²).

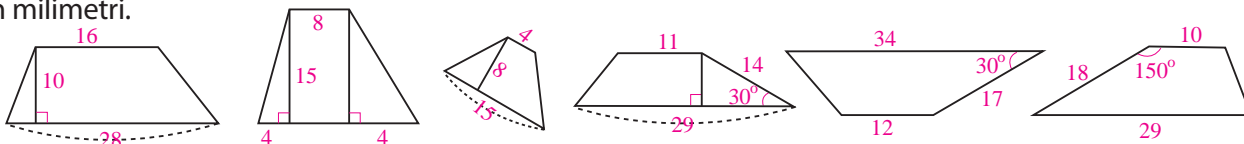
Exprimare orală

Arată cum se poate calcula aria trapezului din problema anterioară, folosind ariile altor poligoane studiate. Observă pașii de construcție și precizează cum se poate exprima aria unui trapez folosind linia lui mijlocie.



Probleme propuse

1. Află ariile trapezelor de mai jos folosind datele menționate pe fiecare figură. Lungimile sunt date în milimetri.



2. Într-un trapez, linia mijlocie măsoară 14 cm, iar înălțimea măsoară 4 cm. Calculează aria trapezului.

3. Dacă baza mare este egală cu $\frac{7}{6}$ din baza mică a unui trapez care are înălțimea de 30 mm și aria de $\frac{65\sqrt{3}}{2}$ mm², calculează lungimea bazei mici. Propune o problemă asemănătoare.

4. Maria vrea să coasă o fustă pentru păpușă. Ea a găsit într-o revistă un tipar trapezoidal cu baza mică de 14 cm, baza mare de 32 cm și înălțimea de 18 cm.

- a) De câți dm² de stofă are nevoie Maria pentru fustă?
b) Ar putea ea decupa tiparul dintr-o bucată de pânză în formă de dreptunghi cu aria de 4,29 dm² și o latură de 33 cm?

5. Fanionul unei echipe de fotbal are forma unui trapez isoscel cu înălțimea 35 cm și laturile neperalele 37 cm. Pe contur este cusut un fir auriu de 162 cm. Ce arie are fanionul?



6. Într-un trapez dreptunghic, baza mare reprezintă $\frac{7}{2}$ din baza mică, iar înălțimea reprezintă $\frac{3}{7}$ din baza mare. Dacă suma lungimilor celor două baze este de 45 cm, calculează ariile celor două triunghiuri în care diagonala cea mai lungă separă trapezul.

7. Demonstrează că aria unui trapez cu baza mică și laturile neperalele egale cu 6 m și două unghiuri de 30° este mai mare de 27 m².

8. Fie ABCD un trapez oarecare, cu AB || CD. Determină un punct M pe baza AB, astfel încât dreapta MC împarte trapezul în două figuri geometrice echivalente (de arii egale).

Alege și rezolvă în 5 minute!

A Suma lungimilor bazelor unui trapez este de 18 cm, iar înălțimea măsoară 7 cm. Calculează aria trapezului.

B Calculează aria unui trapez știind că bazele sale măsoară $2\sqrt{3}$ cm și $7\sqrt{3}$ cm, iar înălțimea sa măsoară $\frac{6}{5}$ din suma lungimilor bazelor.

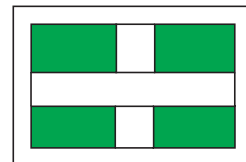
C Un trapez are aceeași arie cu un dreptunghi care are lungimea de 24 dm și lățimea de 15 dm. Știind că înălțimea trapezului este de 9 dm și că baza mare este egală cu $\frac{3}{2}$ din baza mică, calculează lungimile bazelor trapezului.

1. Calculează:
 - a) lungimea laturii unui romb cu diagonalele de 4 cm și 6 cm;
 - b) lungimea diagonalei unui romb cu latura de 5 cm și cealaltă diagonală de 6 cm.
2. Patrulaterul $ABCD$ are perimetrul de 62 cm, iar $AB = 12$ cm, $BC = 25$ cm și $CD = 18$ cm. Calculează lungimea celei de-a patra laturi.
3. Un paralelogram $ABCD$ are $AB = 8$ cm, $AD = 5$ cm și distanța de la A la CD de 3 cm, iar M este mijlocul laturii AB . Calculează aria:
 - a) paralelogramului $ABCD$;
 - b) triunghiului ADC ;
 - c) trapezului $AMCD$;
 - d) triunghiului MCB .

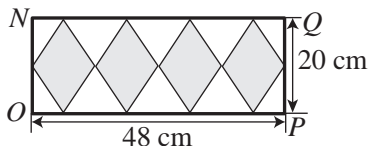
6. În paralelogramul $ABCD$, $DE \perp AB$ și $E \in AB$. Calculează:
 - a) lungimea lui AE , dacă $BC = \sqrt{2}$ cm și $DE = 1$ cm;
 - b) lungimile segmentelor AE și DE , dacă $\sphericalangle C = 60^\circ$ și $BC = 4$ cm;
 - c) lungimile segmentelor AE și DE , dacă $\sphericalangle B = 135^\circ$ și $BC = 2$ cm.
7. Află lungimile segmentelor AC , BD și BC în trapezul $ABCD$ cu $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90^\circ$, $AB = 10$ cm, $CD = 6$ cm, $AD = 2$ cm.
8. Rombul $ROMB$ are lungimile diagonalelor $RM = 2,4$ cm și $OB = 1$ cm. Calculează distanța de la R la MB .

4. Determină aria unui triunghi:
 - a) dreptunghic cu catetele de $\sqrt{12}$ cm și $3\sqrt{3}$ cm;
 - b) isoscel cu baza de 6 cm și laturile congruente de 7 cm;
 - c) echilateral cu latura de $5\sqrt{3}$ m.
5. a) Calculează perimetrul unui pentagon care are lungimile laturilor de 27 mm, 34 mm, 17 mm, 31 mm și, respectiv, 19 mm.
 b) Calculează perimetrul unui hexagon care are trei laturi egale cu 230 mm și celelalte trei egale cu 9,3 cm, 14 cm, respectiv 18 cm.

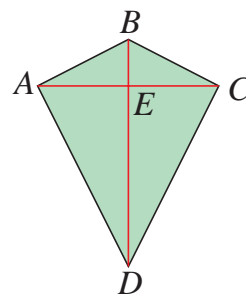
9. Află lungimea înălțimii trapezului isoscel $MNPQ$ care are bazele $MN = 10$ cm, $PQ = 6$ cm și diagonala $MP = 9$ cm.
10. Un patrulater are perimetrul de 82,3 cm. Știind că două dintre laturile sale au 18,4 cm, respectiv 24,8 cm, iar celelalte două laturi sunt congruente, află lungimile acestor laturi.
11. În figura alăturată este schițat un parc de formă dreptunghiulară, cu dimensiunile de 360 m și 200 m, care este străbătut de două alei perpendiculare, cu lățimea de 2,5 m și înconjurat de o alee cu lățimea de 1,5 m, în rest fiind spațiu verde. Determină suprafața spațiului verde.



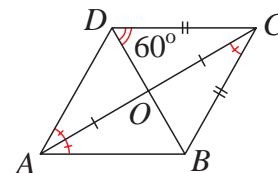
12. În figura de mai jos, $NOPQ$ este un dreptunghi, iar figurile colorate reprezintă romburi congruente, cu dimensiunile specificate în desen. Calculează raportul dintre aria suprafeței hașurate și aria suprafeței albe.



13. Mihai are două bucăți de lemn, lungi de 75 cm și, respectiv, 46 cm cu ajutorul cărora vrea să-și construiască un zmeu ca în figura alăturată. De câtă pânză are nevoie Mihai?

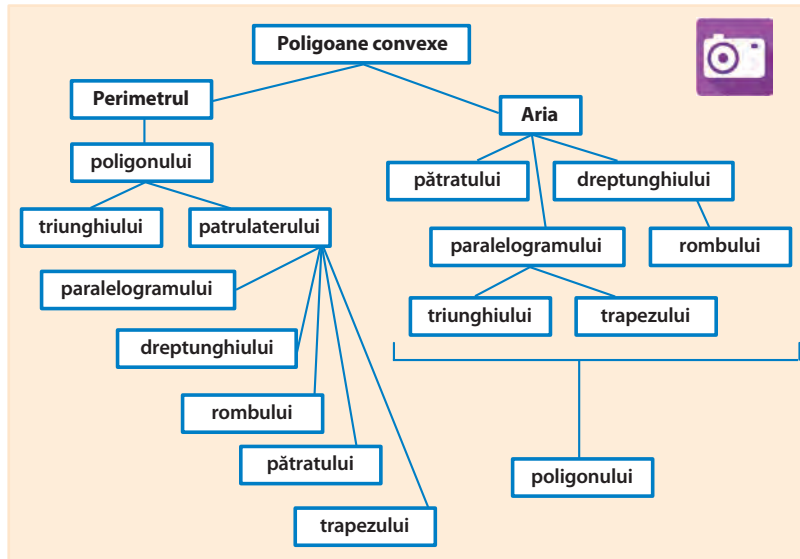


14. Știind că $AD = 5$ cm, calculează lungimile laturilor și diagonalelor patrulaterului $ABCD$, utilizând informațiile date în figură.



Ce am învățat?

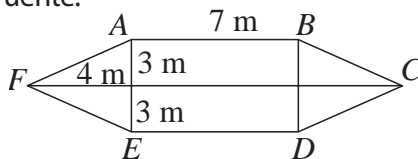
Rezolv testele pentru a verifica dacă pot:



- să determin lungimea unor segmente în diferite configurații geometrice;
- să calculez perimetrul unor triunghiuri și patrulate;
- să calculez aria unor triunghiuri și patrulate;
- să estimez perimetrul și aria unor poligoane prin descompunere în figuri cunoscute;
- să utilizez proprietățile patrulaterelor particulare în rezolvarea unor probleme de arii.

TESTUL 1

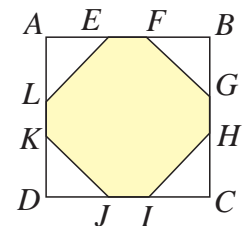
1. Un dreptunghi are o latură de 12 cm și diagonala de 15 cm. Determină lungimea celeilalte laturi a dreptunghiului.
2. Calculează perimetrul:
 - a) unui paralelogram cu o latură de 3 m și alta de 4,5 m;
 - b) triunghiului format de mijloacele laturilor unui triunghi echilateral cu latura de 6 cm.
3. a) Determină lungimea unei diagonale a unui romb cu aria de 44 dm^2 și o diagonală cu lungimea de 11 dm.
 b) Un trapez dreptunghic $ABCD$ are $\sphericalangle A = 90^\circ$, baza mare $AB = 12 \text{ cm}$, baza mică CD egală cu jumătate din lungimea bazei mari și $BC = 10 \text{ cm}$. Calculează aria trapezului $ABCD$.
4. O zonă cu flori are forma poligonului $ABCDEF$ din figura de mai jos. Calculează perimetrul și aria zonei, știind că $ABDE$ este dreptunghi, iar triunghiurile AFE și BCD sunt isoscele, congruente.



5. Fie $ABCD$ trapez cu $AB \parallel CD$. Arată că $\triangle AOD$ și $\triangle BOC$ au arii egale, unde $\{O\} = AC \cap BD$.

TESTUL 2

1. Determină lungimea laturii unui pătrat cu diagonala de 12 cm.
2. Calculează perimetrul:
 - a) unui trapez isoscel cu baza mare de 9 cm, baza mică de 3 cm și laturile neperalele de 5 cm;
 - b) triunghiului ADC , unde D este piciorul înălțimii din A a triunghiului ABC , cu $AB = AC = 5 \text{ cm}$ și $BC = 8 \text{ cm}$.
3. a) Un triunghi isoscel are baza de 8 cm și aria de 24 cm^2 . Calculează lungimea laturilor congruente ale triunghiului.
 b) Calculează aria unui romb cu latura de 6 dm și un unghi cu măsura de 120° .
4. Pentru bradul de Crăciun, Vera decupează un ornament dintr-un carton pătrat cu latura 12 cm. Știind că $AE = FB = BG = HC = CI = JD = DK = LA = 3 \text{ cm}$, calculează perimetrul și aria ornamentului.



5. Arată că o dreaptă care conține centrul unui paralelogram îl împarte pe acesta în două patrulate de arii egale.



Geometria fulgilor de nea

Plan de lucru

- ✓ **Materiale necesare:** coli de hârtie albă sau colorată, foarfece.
- ✓ **Scop:** Veți realiza "fulgi de zăpadă" folosind proprietăți ale cercului și poligoanelor.

Realizarea proiectului



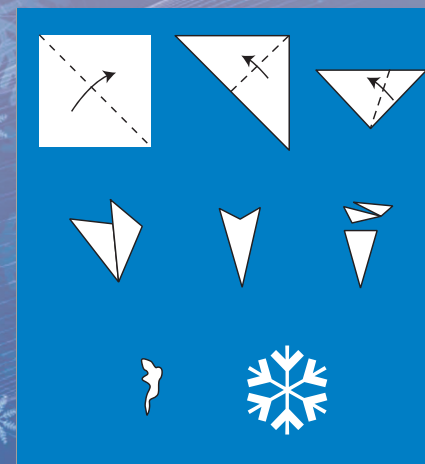
Lucrați în echipe de câte doi, trei sau patru colegi!

✓ Fiecare membru al echipei realizează un model de fulg de nea. Puteți folosi hârtie colorată sau albă, după dorință; puteți folosi coli de hârtie de diferite dimensiuni. Modelele ar trebui să fie cât mai diferite unele de altele.

✓ Pentru fiecare model realizat, pregătiți o fișă în care explicați construcția și menționați proprietățile ce caracterizează figura obținută.

Pentru început:

Îndoiiți o foaie de hârtie ca în imaginea alăturată, decupați părți ale acesteia și obțineți un model asemănător celui din imagine.



Interacțiune

În cadrul echipei:

- ✓ Discutați etapele proiectului și împărtășiți sarcinile în echipă.
- ✓ Observați modelul realizat de fiecare și colaborați la completarea proprietăților și a explicațiilor;

Lucrați inter-echipe

- Schimbați cu o echipă parteneră modelele și fișele realizate de echipa voastră.
- Verificați corectitudinea explicațiilor, corecți dacă e cazul și adăugați noi propuneri.
- Discutați cu membrii celeilalte echipe îmbunătățirile propuse.

Prezentare

Lucrați cu toată clasa!

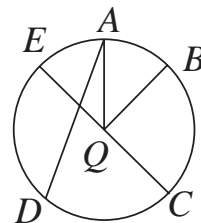
- ✓ Realizați un portofoliu al clasei cu toate materialele produse.
- ✓ Prezentați produsele în perechi – câte un reprezentant din cele două grupe care au colaborat.

Rezolvând exercițiile următoare, îți vei aminti noțiuni și rezultate necesare pentru parcurgerea acestei Unități de învățare. Fiecare problemă propusă valorează 1 punct. Se acordă 1 punct din oficiu.

I. Scrie pe foaia de rezolvare cuvintele sau rezultatele care, înscrise în spațiile punctate, formează enunțuri adevărate.

Elemente ale unui cerc

- Observă imaginea alăturată și completează:
 - Centrul cercului este punctul ...
 - Un diametru al cercului este ...
 - BQ este ...
 - Un unghi la centru este ...



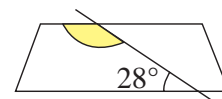
Pozițiile relative ale unei drepte față de un cerc

2. Observă imaginile de mai jos. O dreaptă secantă la cerc apare în figura ...



Drepte paralele

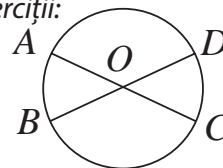
3. În figură apare un trapez. Măsura unghiului marcat prin culoare este egală cu ...°.



II. Scrie pe foaia de rezolvare litera corespunzătoare răspunsului corect pentru următoarele exerciții:

Măsurile de arce

- Pe figura alăturată, O este centrul cercului, iar măsura unghiului AOB este de 35° . Măsura arcului AD este:
 - 145° ; **B.** 135° ; **C.** 35° ; **D.** 55° .



Unghi exterior unui triunghi

- Unul dintre unghiurile exterioare ale unui triunghi dreptunghic are măsura de 135° . Atunci, triunghiul:
 - are un unghi de 60° ; **B.** este isoscel;
 - are un unghi de 30° ; **D.** are un unghi de 35° .

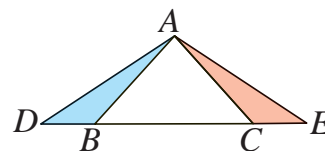
Suma unghiurilor unui triunghi

- Un triunghi isoscel are măsura unui unghi de la bază de 70° . Măsura unghiului de la vârf este de:
 - 70° ; **B.** 30° ; **C.** 40° ; **D.** 60° .

III. Scrie pe foaia de rezolvare soluțiile complete ale exercițiilor următoare:

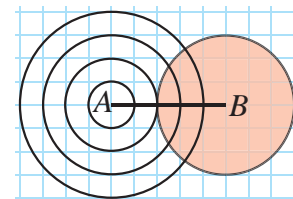
Congruența triunghiurilor

- Triunghiul ABC din figura alăturată este isoscel cu $AB = AC$, iar segmentele BD și CE sunt congruente. Demonstrează că $\triangle ABD \cong \triangle ACE$.



Construcția triunghiului

- În figura alăturată, apar mai multe cercuri cu centrele în A și B . Desenează această figură pe foaia de rezolvare, apoi trasează pe figura ta:
 - un triunghi cu laturile de 5, 3, 3 unități;
 - un triunghi cu laturile de 5, 4, 3 unități (unitatea de măsură este latura pătrățelului din rețea).

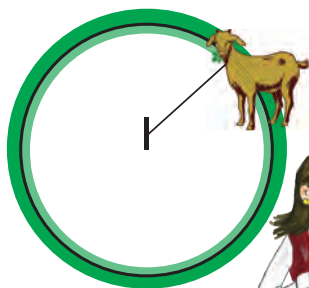


Pozițiile relative a două cercuri

- Utilizează un șablon sau două monede și desenează, pe caietul tău, două cercuri tangente interioare și alte două cercuri tangente exterioare.

Dacă ai obținut mai puțin de jumătate din punctaj la acest test, este util să revezi definițiile și proprietățile conceptelor menționate mai sus, pentru a înțelege mai bine ceea ce urmează.

O situație-problemă



Ca să-și protejeze pomii, Ion a legat capra de un țărnuș. S-a mirat foarte tare când, după o săptămână, a observat că, în jurul țărnușului, capra trasese un cerc. Care este explicația acestui fapt?

E simplu! Ne gândim că țărnușul este un punct fix – centrul cercului, iar lațul este raza.

Deci capra, căutând să ajungă la frunzele pomilor de pe margine, a mers pe un cerc!

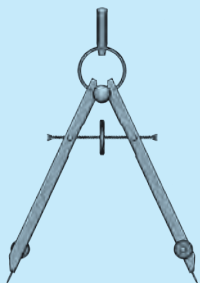


Ne amintim ...

Ce știm despre cerc? Ce elemente ale cercului am studiat până acum?

Definiții

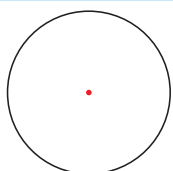
Se numește **cerc** mulțimea tuturor punctelor dintr-un plan, ce sunt egal depărtate de un punct fix numit centru.



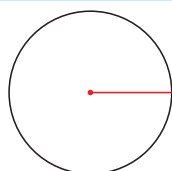
Trasăm un cerc folosind compasul. Păstrând aceeași deschidere a compasului, putem să „transportăm” segmente congruente: astfel putem desena cercuri congruente.

Cercurile congruente au razele de lungimi egale.

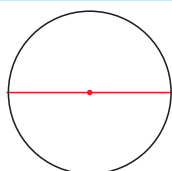
Elemente ale cercului sunt:



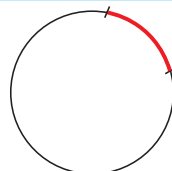
Centru



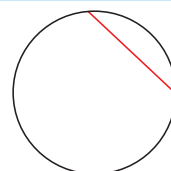
Rază



Diametru

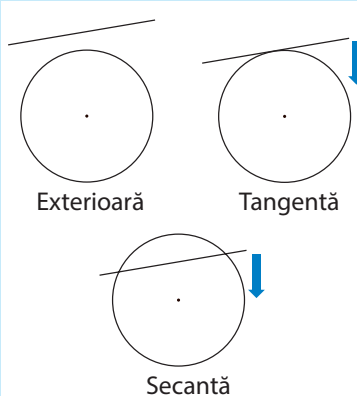


Arc de cerc

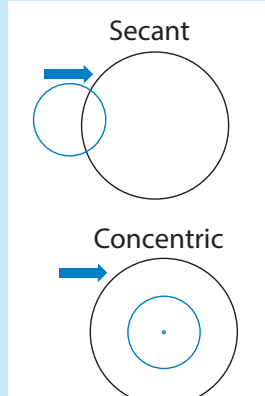
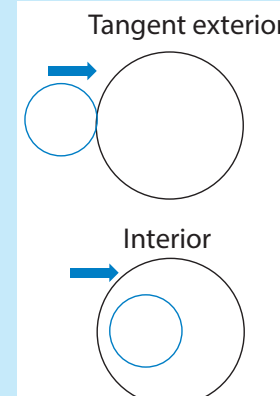
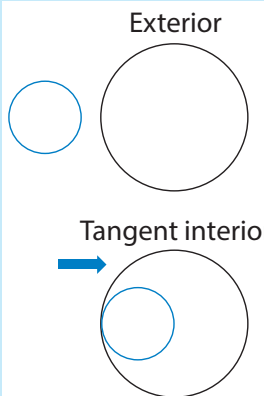


Coardă în cerc

Față de un cerc fixat, o dreaptă poate fi:



Față de un cerc fixat, un alt cerc poate fi:



Ce elemente determină clasificarea de mai sus, referitoare la poziția unei drepte față de un cerc, sau la poziția a două cercuri?

Gândim critic și constructiv!

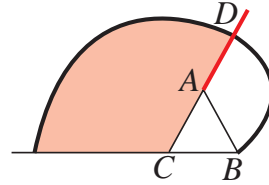
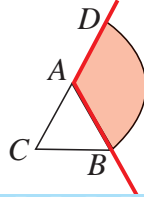
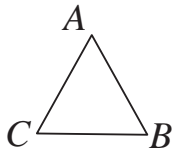
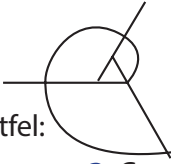
Evaluăm nivelul de bază!

① Desenează un cerc de centru O și rază $OM = 2$ cm. Desenează un diametru în acest cerc.

Problemă rezolvată

Cum se construiește spirala alăturată? Procedăm astfel:

1. Pornim cu triunghiul echilateral ABC .
2. Desenăm un arc de cerc cu centrul în A , de rază AB .
3. Continuăm cu un arc de cerc de centru C și rază CD și procedăm la fel în continuare.



a) Pentru primii 4 pași ai construcției, calculează razele cercurilor desenate, dacă latura triunghiului echilateral măsoară 1 cm.

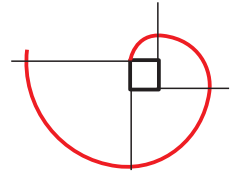
b) Este oare necesar să pornim inițial de la un triunghi echilateral? Argumentează răspunsul.

Gândim critic și constructiv!

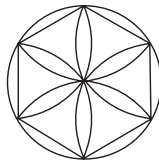
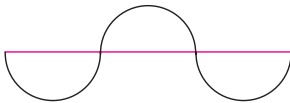
Probleme propuse

1. Desenează un cerc cu raza de 2 cm.
2. a) Folosind echerul și compasul, desenează 3 pătrate așezate în poziții diferite.
b) Alege unul dintre pătratele desenate de tine și desenează un alt pătrat, cu latura de două ori mai mare decât a pătratului ales.

3. a) Folosește rigla și compasul pentru a desena spirala din imaginea alăturată.
b) Calculează raportul razelor cercurilor utilizate la al doilea și la al patrulea pas.



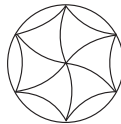
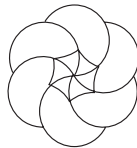
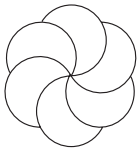
4. Folosind compasul și rigla, realizează pe caietul tău desenele de mai jos.



5. Ana a turnat câteva picături de lapte într-un pahar cu apă și a observat că s-au format 4 cercuri concentrice situate la o distanță de 1,5 cm unul față de altul. Dacă diametrul paharului este de 12 cm, care este raza celui mai mic cerc?

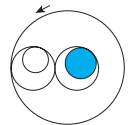


6. Desenează imaginile din figura următoare, folosind numai compasul.



7. a) Desenează două cercuri având două puncte comune astfel încât fiecare să treacă prin centrul celuilalt. Este adevărat că aceste cercuri sunt congruente?
b) Este oare posibil să desenăm 3 cercuri, astfel încât fiecare să treacă prin centrele celorlalte două?

8. Desenul alăturat este o reprezentare simplificată pentru un angrenaj de roți dințate. În ce sens se rotește roata colorată?



Alege și rezolvă în 5 minute!

A Desenează un cerc cu raza de 2,5 cm și trasează în acest cerc o rază și un diametru.

B Desenează un pătrat notat $MARE$ și construiește cercurile cu vârfurile în M, A, R, E și razele cât latura pătratului.

C Desenează un pătrat notat $TARE$ și construiește cercurile cu vârfurile în T, A, R, E și razele cât diagonala pătratului.

O situație-problemă

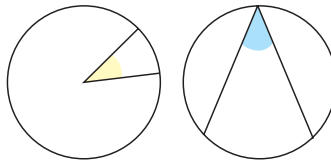


În parcul de distracții se construiește o roată mare, ce va avea 18 gondole.

1. Constructorii au calculat mai întâi măsura unghiului format de barele-suport a două gondole consecutive. Ce măsură are acest unghi?
2. Pentru a întări structura, se vor adăuga barele de susținere colorate pe imagine: acestea vor cuprinde, între ele, spațiul ocupat de 4 gondole consecutive. Constructorii încearcă acum să calculeze măsura unghiului format de aceste bare.



Reprezintă prin desene cele două probleme!



În jurul unui punct avem 360° ! Am putea oare găsi o legătură cu arcele corespunzătoare?

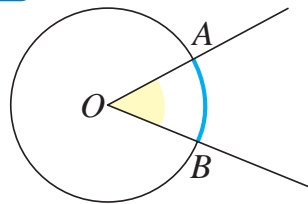


Vrem să știm!

Ce relație există între unghiul cu vârful pe cerc și arcul subîntins?

Ne amintim...

Un **unghi la centru** al unui cerc este un unghi cu vârful în centrul aceluși cerc. **Măsura unui unghi la centru** este egală cu măsura arcului de cerc cuprins între laturile sale.



Cele 18 gondole determină arce congruente și unghiuri la centru congruente. Așadar, fiecare dintre aceste unghiuri are măsura de $360^\circ : 18 = 20^\circ$.



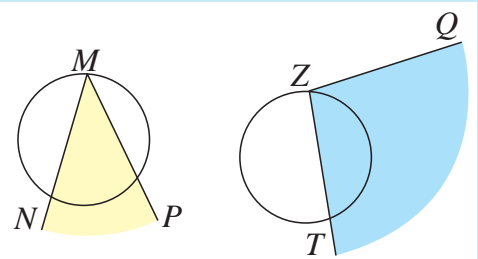
Definim!

Un **unghi înscris în cerc** este un unghi cu vârful pe cerc, ale cărui laturi sunt secante la cerc.

Exemplu:

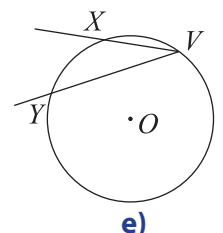
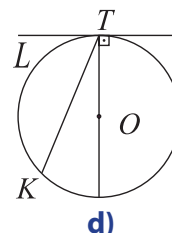
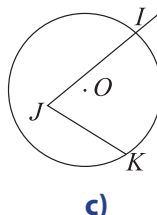
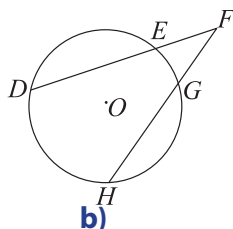
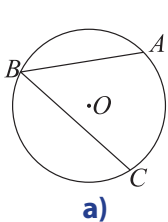
În figurile alăturate:

- Unghiul NMP este înscris în cerc.
- Unghiul QZT nu este înscris în cerc.



Evaluăm nivelul de bază!

① Care dintre unghiurile de mai jos sunt unghiuri înscrise în cerc?



② Prin ce se aseamănă și prin ce se deosebesc unghiurile înscrise în cercurile de mai sus?

Să demonstrăm!

Teoremă

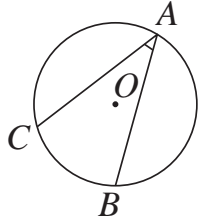
Măsura unui unghi înscris într-un cerc este egală cu jumătate din măsura arcului cuprins între laturile sale.

Ipoteză:

Unghiul BAC este înscris în cercul de centru O .

Concluzie:

$$\begin{aligned} \text{Măsura } \sphericalangle BAC &= \\ &= \frac{1}{2} \cdot \text{măsura } \widehat{BC} \end{aligned}$$



Demonstrație:

Demonstrăm la început un caz mai simplu – cel în care o latură a unghiului este diametru.

Triunghiul AOB este isoscel, deoarece $OA \equiv OB$.

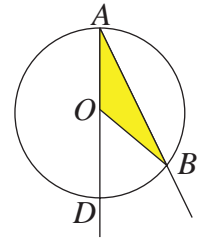
Deducem că $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OBA$.

Deoarece unghiul BOD este unghi exterior triunghiului AOB , obținem:

$$\sphericalangle BOD = \sphericalangle OAB + \sphericalangle OBA = 2 \cdot \sphericalangle OAB.$$

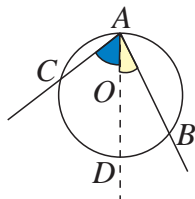
Unghiul BOD este unghi la centru. De aceea:

$$\sphericalangle OAB = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle BOD = \frac{1}{2} \cdot \widehat{BD}.$$

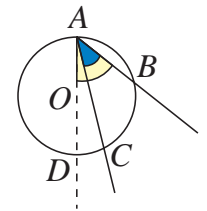


Identificăm toate cazurile posibile și completăm demonstrația:

Dacă centrul cercului este interior unghiului înscris, procedăm astfel:
Construim diametrul AD .
 $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAD + \sphericalangle CAD$.
Aplicăm rezultatul demonstrat anterior.

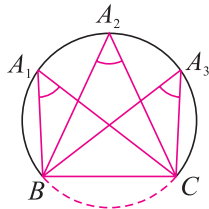


Dacă centrul cercului este exterior unghiului înscris, procedăm astfel:
Construim diametrul AD .
 $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAD - \sphericalangle CAD$.
Aplicăm rezultatul demonstrat anterior.

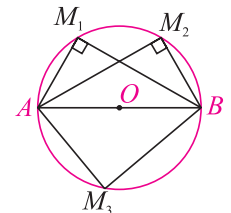


Consecințe ale teoremei unghiului înscris în cerc

Toate unghiurile înscrise în același arc de cerc sunt congruente
 $\sphericalangle BA_1C = \sphericalangle BA_2C = \dots$



Orice unghi înscris într-un semicerc este unghi drept
 $\sphericalangle AM_1B = \sphericalangle AM_2B = 90^\circ$.



Formulează demonstrații pentru consecințele teoremei unghiului înscris în cerc.

Gândim critic și constructiv!

Rezolvăm situația problemă!

Barele colorate pe figură determină un unghi înscris în cerc. Acest unghi cuprinde între laturile sale 4 gondole consecutive, deci subîntinde 3 arce determinate de aceste gondole pe cerc. Deoarece măsura arcului subîntins este $3 \cdot 20^\circ = 60^\circ$, unghiul marcat pe figură are măsura de 30° .



Evaluăm nivelul de bază!

- 1) Arcul subîntins de un unghi înscris în cerc are măsura de 30° . Care este măsura unghiului înscris?
- 2) Un unghi înscris în cerc are măsura de 26° . Ce măsură are arcul corespunzător acestuia?

Problemă rezolvată

În figura alăturată, AC este un diametru, iar $\sphericalangle BAC = 54^\circ$. Care este măsura unghiului ADB ?

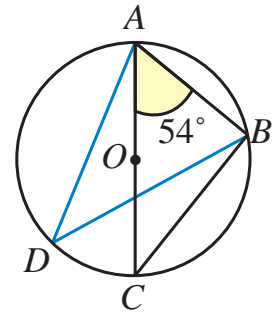
Rezolvare

Deoarece ABC este un unghi înscris într-un semicerc, $\sphericalangle ABC = 90^\circ$.

Deducem că $\sphericalangle ACB = 90^\circ - 54^\circ = 36^\circ$.

Unghiurile ACB și ADB sunt unghiuri înscrise în cerc, ce subîntind același arc.

De aceea: $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB = 36^\circ$.

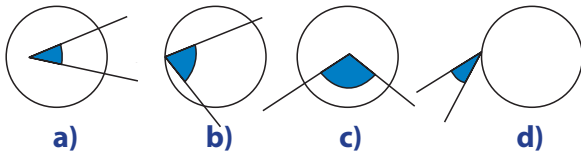


Exprimare orală

Cum am putea desena pe figura din problema de mai sus un alt unghi de 54° , fără a folosi raportorul?

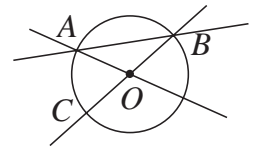
Probleme propuse

1. În care dintre figurile de mai jos a fost desenat un unghi înscris în cerc?

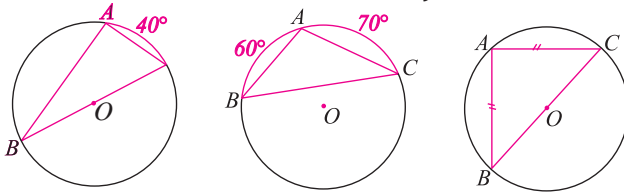


2. În figura alăturată, O este centrul cercului, iar punctele A, B, C sunt pe cerc.

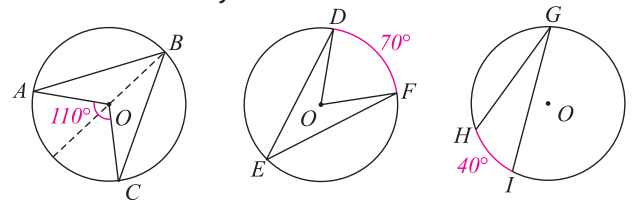
- a) Scrie toate unghiurile la centru de pe figură.
b) Scrie toate unghiurile înscrise în cercul din figură.



3. Află măsurile unghiurilor triunghiului ABC , în fiecare dintre cazurile de mai jos.

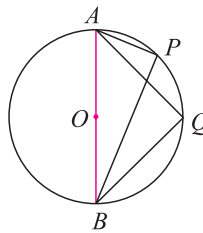


4. Calculează măsurile unghiurilor înscrise în cercurile de mai jos.



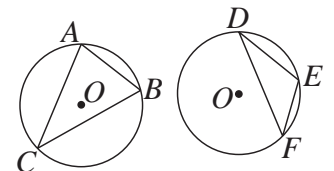
5. Punctele A și B din figura alăturată sunt diametral opuse și $\sphericalangle AOP = 20^\circ$.

- a) Ce măsură are unghiul APB ?
b) Cât este $\sphericalangle PAB$?
c) Dacă BP este bisectoarea unghiului ABQ , ce măsură are $\sphericalangle QAB$?



6. O bucată de lemn de formă rotundă are centrul O . Se fac trei tăieturi egale: AB, AC, BC . Calculează măsura unghiului AOB .

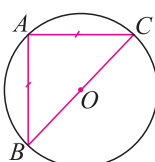
7. Demonstrează că, în figurile alăturate, triunghiul ABC este ascuțitunghic, iar DEF este obtuzunghic.



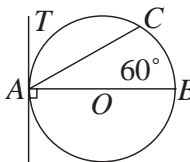
8. Geo a folosit un șablon pentru a desena, pe caietul său, un cerc. Cum putem afla centrul acestui cerc, dacă avem la dispoziție doar un echer (cu un unghi drept)?

Alege și rezolvă în 5 minute!

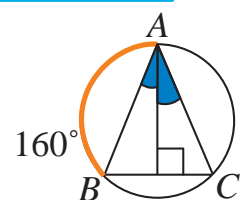
- A** Precizează natura triunghiului ABC din figura următoare. Justifică răspunsul.



- B** Calculează măsura unghiului TAC din figura de mai jos. Justifică răspunsul.



- C** Folosește indicațiile de pe figura alăturată pentru a calcula măsura unghiului BAC . Justifică răspunsul.



O situație-problemă



Constructorii unui nou model de automobil vor să adauge pe capacul roții două bare decorative. Cum ar trebui poziționate aceste bare, pentru a fi siguri că au lungimi egale?

Cred că ar trebui să formăm triunghiuri congruente în care să apară segmentele respective!

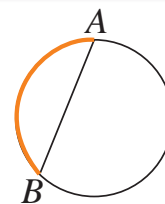


Vrem să știm!

Ce relații există între coarde de lungimi egale și arce de măsuri egale? Cum putem construi mai ușor coarde de lungimi egale într-un cerc?

Să observăm!

O coardă a unui cerc delimitează două arce ale cercului. Spunem că arcul de măsură mai mică este subîntins de coarda dată.



Să demonstrăm!

T1. Două coarde ale aceluiași cerc sunt congruente dacă și numai dacă arcele pe care le subîntind au măsuri egale.

Trebuie să justificăm, de fapt, două enunțuri.

„ \Rightarrow “

Ipoteză:

$AB \equiv CD$

Concluzie:

$\widehat{AB} = \widehat{CD}$

Demonstrație:

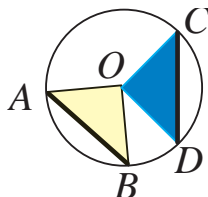
Observăm că

$\Delta OAB \equiv \Delta OCD$ (cazul L.L.L.)

De aceea: $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$.

Deoarece

$\widehat{AB} = \sphericalangle AOB$, iar $\widehat{CD} = \sphericalangle COD$, deducem că $\widehat{AB} = \widehat{CD}$.



„ \Leftarrow “

Ipoteză:

$\widehat{AB} = \widehat{CD}$

Concluzie:

$AB \equiv CD$

Demonstrație:

Deoarece $\widehat{AB} = \widehat{CD}$,

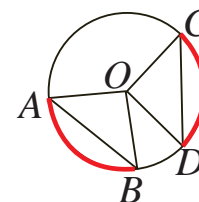
deducem că

$\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD$.

Observăm că

$\Delta OAB \equiv \Delta OCD$ (cazul L.U.L.).

De aceea: $AB \equiv CD$.



De ce crezi că a fost nevoie să demonstrăm două teoreme?

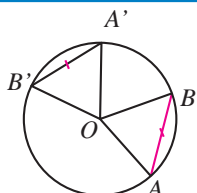
Gândim critic și constructiv!

Rezolvăm situația-problemă!

Pentru asigurarea echilibrului, spițele roții formează, din construcție, unghiuri de măsuri egale. Arcele AB și CD , marcate pe figură, corespund unor unghiuri la centru congruente (formate din câte 3 unghiuri de măsuri egale); de aceea AB și CD au măsuri egale. Deducem că segmentele AB și CD sunt congruente.



Evaluăm nivelul de bază!



Pentru figura alăturată, arată că, dacă $AB \equiv A'B'$, atunci:

- a) arcele AA' și BB' sunt congruente;
- b) unghiurile AOA' și BOB' sunt congruente.

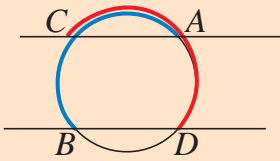
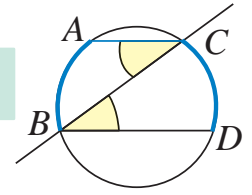
Să demonstrăm!

T2. Două arce ale unui cerc sunt congruente dacă și numai dacă sunt cuprinse între coarde paralele.

$$\widehat{AB} \equiv \widehat{CD} \Leftrightarrow AC \parallel BD$$

Demonstrație:

$$\widehat{AB} \equiv \widehat{CD} \Leftrightarrow \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle CBD \Leftrightarrow AC \parallel BD$$



a) Cum putem adapta demonstrația de mai sus pentru situația descrisă în figura alăturată (în care arcele congruente AB și CD au o parte comună)?

b) Combină enunțurile teoremelor anterioare și justifică oral faptul că două coarde ale unui cerc sunt congruente dacă și numai dacă sunt cuprinse între drepte paralele.

Gândim critic și constructiv!

Să demonstrăm!

T3. Două coarde ale unui același cerc sunt congruente dacă și numai dacă sunt la distanțe egale față de centrul cercului.

$$OM \perp AB, M \in AB;$$

$$ON \perp CD, N \in CD;$$

$$[AB] \equiv [CD] \Leftrightarrow [OM] \equiv [ON]$$

Demonstrație:

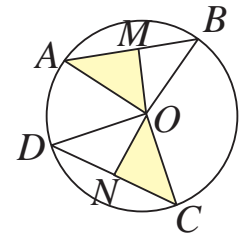
„ \Rightarrow “

$$AB \equiv CD \Rightarrow AM \equiv CN \Rightarrow \triangle OMA \equiv \triangle ONC \text{ (cazul I.C.)} \Rightarrow OM \equiv ON$$

Reciproc:

„ \Leftarrow “

$$OM \equiv ON \Rightarrow \triangle OMA \equiv \triangle ONC \text{ (cazul I.C.)} \Rightarrow MA \equiv NC \Rightarrow AB \equiv CD.$$



Justifică egalitatea: $AM^2 + MO^2 = CN^2 + NO^2$.

Folosește apoi această egalitate pentru a găsi o altă demonstrație a teoremei 3.

Gândim critic și constructiv!

Extindem...

Folosind enunțurile teoremelor demonstrate mai sus, putem obține noi teoreme. Iată un exemplu: Două coarde ale unui cerc sunt egal depărtate de centrul cercului dacă și numai dacă arcele corespunzătoare celor două coarde au măsuri egale.

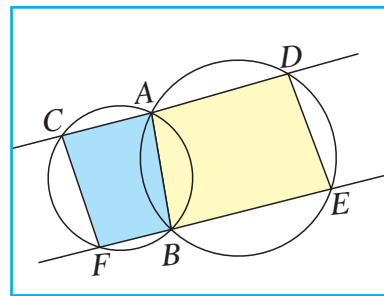
Evaluăm nivelul de bază!

- Pe caietul tău cu pătrățele, desenează un cerc. Folosește liniile caietului pentru a marca, pe acest cerc, două coarde congruente și două arce congruente.
- Construiește perpendicularele din centrul cercului pe cele două coarde. Arată prin măsurare că distanțele de la centrul cercului la aceste coarde sunt egale.

Problemă rezolvată

Două cercuri secante se intersectează în punctele A și B . Două drepte paralele, ce trec prin A și B , mai intersectează cercurile în punctele C și D , respectiv E și F , ca în figura alăturată.

Să se arate că patrulaterul $CDEF$ este un paralelogram.



Rezolvare:

Patrulaterul $ABED$ este trapez isoscel, deoarece $AD \parallel BE$ și $AB \equiv DE$ (sunt coarde ce subîntind arce congruente). De aici, deducem că $\sphericalangle ADE = \sphericalangle DAB$. Analog, $ABFC$ este trapez isoscel, deci $AB \equiv CF$ și $\sphericalangle ACF = \sphericalangle CAB$. Cum $\sphericalangle ACF + \sphericalangle ADE = \sphericalangle CAB + \sphericalangle DAB = 180^\circ$, dreptele CF și DE sunt paralele (formează unghiuri interne, de aceeași parte a secantei CD , suplementare). În plus, $DE \equiv AB \equiv CF$.

Deducem că patrulaterul $DEFC$ are două laturi opuse paralele și congruente, deci este paralelogram.

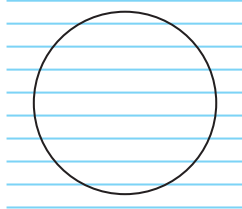
Exprimare orală >>> Explică de ce triunghiurile FAE și CBD din problemă sunt congruente.

Probleme propuse

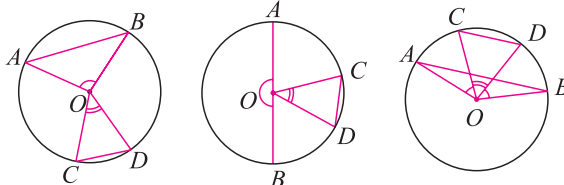


1. Liza a desenat, pe caietul său dictando, un cerc. Folosește liniatura caietului pentru a evidenția:

- a) două coarde congruente;
b) două arce congruente.

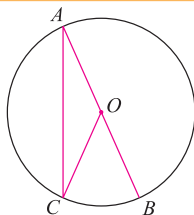


2. În figurile de mai jos, $AB > CD$. Ce relație este între arcele AB și CD , în fiecare caz?



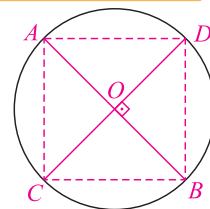
3. Observă figura alăturată.
a) Folosește inegalitatea triunghiului și arată că $AB > AC$.

- b) Demonstrează că, într-un cerc, diametrul este cea mai mare dintre coarde.

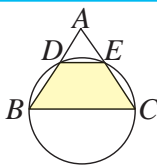


4. În figura alăturată, diametrele AB și CD sunt perpendiculare. Demonstrează că:

- a) triunghiul ADB este dreptunghic isoscel;
b) $ACBD$ este pătrat.

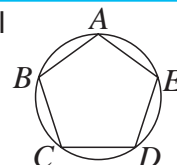


5. Cercul de diametru BC intersectează laturile congruente AB și AC ale triunghiului isoscel ABC în punctele D și E . Demonstrează că $BCED$ este trapez isoscel.



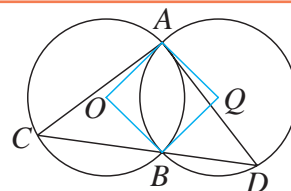
6. În figura alăturată, pentagonul $ABCDE$ este înscris în cerc și are toate laturile congruente.

- a) Arată că $ABCE$ este trapez.
b) Calculează $\sphericalangle ACD$.



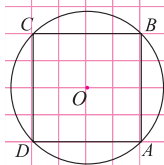
7. Cercurile congruente de centre O și Q din figura alăturată se intersectează în punctele A și B . O dreaptă ce trece prin B mai taie aceste cercuri în C și D .

- a) Arată că patrulaterul $AOBQ$ este un romb.
b) Demonstrează că triunghiul ACD este isoscel.

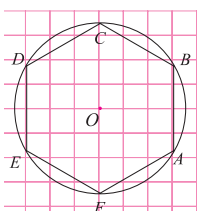


Alege și rezolvă în 5 minute!

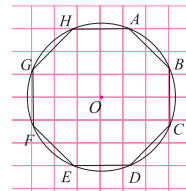
A



B



C



O situație-problemă

La petrecerea de ziua ei, Ana a folosit farfuriile rotunde din carton pentru prăjituri. În joacă, Tic a îndoit o farfurie, suprapunând perfect cele două părți una peste alta. Observând urma de îndoire, invitații Anei au formulat posibile proprietăți ale acesteia.



Prin îndoirea farfuriei și suprapunerea celor două părți, a apărut o axă de simetrie.

Este oare adevărat că orice axă de simetrie a unui cerc este un diametru?



Vrem să știm!

Cum determinăm axele de simetrie ale unui cerc?

Ne amintim...

Punctele A și B sunt simetrice față de dreapta d dacă și numai dacă d este mediatoarea segmentului AB .

Să demonstrăm!

Teoremă

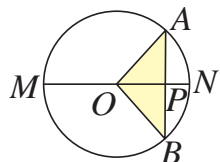
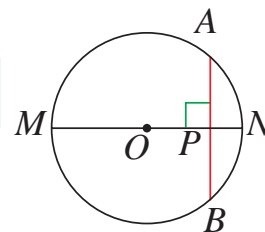
Diametrul perpendicular pe o coardă a unui cerc împarte acea coardă și arcu subîntins de aceasta în părți congruente.

Ipoteza:

AB – coardă în cerc; MN – diametru, $MN \perp AB$

Concluzia:

$AP \equiv PB$; $\widehat{AN} = \widehat{BN}$.



Demonstrație:

În triunghiul isoscel AOB , OP este înălțime.

Deci OP este mediatoarea segmentului AB și este bisectoarea unghiului AOB .

Deducem că $AP \equiv PB$ și că $\widehat{AN} = \sphericalangle AON = \sphericalangle BON = \widehat{BN}$.

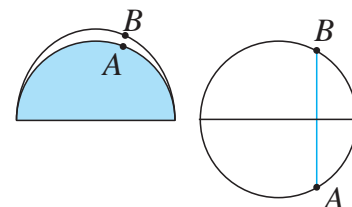
- Pe figura de mai sus, arată că arcele AM și BM au măsuri egale.
- Cum se modifică demonstrația, dacă AB este un diametru al cercului?

Gândim critic și constructiv!

Rezolvăm situația-problemă!

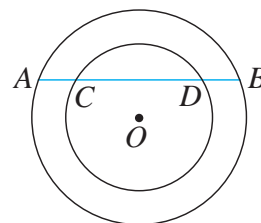
Să presupunem că, prin îndoirea farfuriei, punctele A și B de pe conturul acesteia se suprapun. Atunci dreapta ce apare prin îndoire (urma îndoirii) este mediatoarea segmentului AB .

Conform teoremei anterioare, această dreaptă determină un diametru al cercului. Așadar, orice axă de simetrie a unui cerc este un diametru.



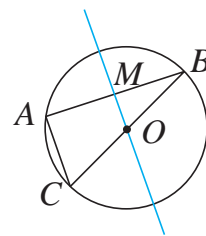
Evaluăm nivelul de bază!

- Pe caietul tău, desenează un cerc și o coardă a acestui cerc. Folosește rigla pentru a marca mijlocul coardei, apoi pentru a trasa diametrul perpendicular pe coardă.
- Cele două cercuri din imagine sunt concentrice. Demonstrează că segmentele AB și CD au același mijloc.



Problemă rezolvată / Rezolvări comparative

În figura alăturată, BC este diametru al cercului, iar M este mijlocul coardei AB . Demonstrează că dreptele AC și OM sunt paralele.



Geo: Am folosit proprietăți învățate în ultimele lecții! Deoarece ABC este un unghi înscris într-un semicerc, $\sphericalangle BAC = 90^\circ$. În triunghiul isoscel AOB , OM este mediană; deducem că $OM \perp AB$. Cum $OM \perp AB$ și $AC \perp AB$, rezultă că dreptele AC și OM sunt paralele.

Ana: Am folosit teoreme învățate mai demult! Punctele O și M sunt mijloacele laturilor BC și BA . Deci OM este linia mijlocie a triunghiului ABC . Deducem că $OM \parallel AC$.

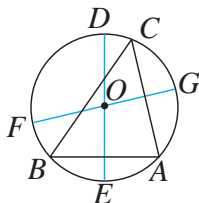
Compară cele două rezolvări. Care dintre acestea ți se pare mai simplă? De ce?

Gândim critic și constructiv!

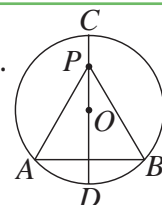
Probleme propuse



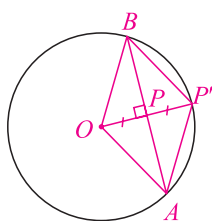
1. În cercul de centru O au fost construite diametrele DE și FG , perpendiculare pe coardele AB , respectiv AC . Dacă $\sphericalangle BAC = 80^\circ$ și $\sphericalangle ABC = 60^\circ$, calculează măsura unghiului EFG .



2. În figura alăturată, diametrul CD este perpendicular pe coarda AB . Dacă P este un punct oarecare de pe dreapta CD , arată că triunghiul PAB este isoscel.

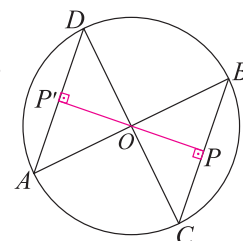


3. În figura alăturată, O este centrul cercului, $OP \perp AB$, iar $OP = PP' = 1$ cm. Calculează perimetrul patrulaterului $OAP'B$ și măsurile unghiurilor sale.

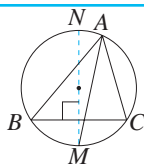


4. Dacă P este un punct în interiorul unui cerc, trasează o coardă a cercului pentru care P este mijloc.

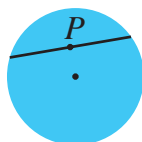
5. În figura alăturată, punctele A și B , respectiv C și D sunt diametral opuse, iar OP și OP' sunt perpendiculare pe BC , respectiv pe AD . Arată că:
a) $AD \parallel BC$; **b)** $\widehat{AC} = \widehat{BD}$;
c) $OP \equiv OP'$; **d)** punctele O, P, P' sunt coliniare.



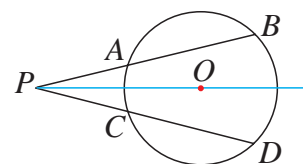
6. În figura alăturată, apar triunghiul ABC înscris în cerc și diametrul MN , perpendicular pe latura BC . Demonstrează că AM este bisectoarea unghiului BAC .



7. Într-un lac perfect circular se află un pilon P . Cum se poate construi un pod drept, de lungime minimă posibilă, care să se sprijine pe pilonul P ?



8. Coardele AB și CD din figura alăturată sunt congruente, O este centrul cercului, iar P este punctul de intersecție a dreptelor AB și CD . Arată că:



- a)** triunghiurile PAC și PBD sunt isoscele;
b) PO este bisectoarea unghiului BPD .



9. Având desenat un cerc și diametrul AB al acestuia, folosește doar rigla pentru a trasa o coardă perpendiculară pe dreapta AB .

Alege și rezolvă în 5 minute!

A

Arată că dreapta determinată de centrul unui cerc și de mijlocul arcului \widehat{MN} al acestui cerc este perpendiculară pe coarda MN .

B

Coardele AB și CD ale unui cerc sunt paralele și nu trec prin centrul cercului. Demonstrează că diametrul ce trece prin mijlocul lui AB , trece și prin mijlocul lui CD .

C

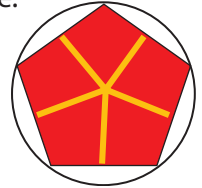
Două cercuri secante, de centre O și Q , se taie în punctele A și B . Dacă M este mijlocul lui AB , demonstrează că punctele O, M, Q sunt coliniare.

O situație-problemă



Pentru a confecționa o felicitare, Liza a presat o floare de petunie și a lipit-o în interiorul unui disc din carton. Ea a observat că toate colțurile petalelor sunt așezate pe marginea discului, iar laturile petalelor par să fie de lungimi egale. Ce formă are floarea presată?

Felicitarea confecționată de tine are o formă interesantă. Cred că este un poligon regulat!



Vrem să știm!

Ce proprietăți are un poligon regulat?

Definim!

Un poligon convex, înscris într-un cerc, este **poligon regulat** dacă toate laturile sale sunt congruente.

Să demonstrăm!

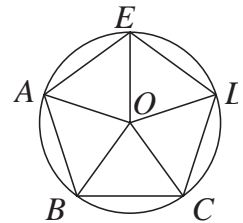
Teoremă

Un poligon convex înscris într-un cerc este poligon regulat dacă și numai dacă toate unghiurile poligonului sunt congruente.

Demonstrăm în cazul unui pentagon:

„ \Rightarrow “

Dacă pentagonul $ABCDE$ din imagine este regulat, atunci arcele determinate de vârfurile acestuia pe cerc au măsuri egale. Deoarece $2\angle ABC = 3\widehat{AE} = 2\angle BCD$, deducem că unghiurile ABC și BCD sunt congruente. Arătăm, la fel, că toate unghiurile pentagonului sunt congruente.



„ \Leftarrow “

Reciproc, presupunem că unghiurile pentagonului sunt congruente. Deoarece $\angle ABC = \angle BCD$, deducem că $\widehat{AEDC} = \widehat{BAED}$; îndepărtând partea comună a acestor arce, obținem că $\widehat{AB} = \widehat{DC}$, ceea ce implică $AB \equiv CD$. Procedăm la fel pentru a arăta că toate laturile pentagonului sunt congruente.

- Cât este măsura fiecăruia dintre unghiurile unui pentagon regulat?
- Distanțele de la centrul cercului la fiecare dintre laturile unui poligon regulat înscris în acel cerc sunt egale. Explică de ce!

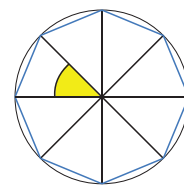
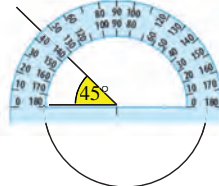
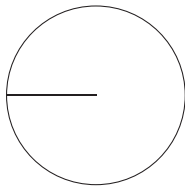
Gândim critic și constructiv!

Definiție: Distanța de la centrul cercului la o latură a poligonului este o apotemă a acestuia.

Explorăm!

Cum putem desena poligoane regulate? Observă etapele construcției unui poligon regulat cu $n = 8$ laturi.

- Desenăm un cerc și o rază a acestuia.
- Trasăm unghiuri la centru, adiacente, cu măsura de $360^\circ : n$.
- Unim succesiv cele n puncte de pe cercul de 360° .



Explică de ce poligonul obținut prin construcția de mai sus este un poligon regulat.

Gândim critic și constructiv!

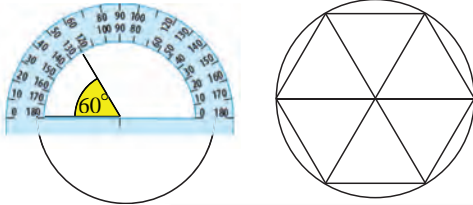
Evaluăm nivelul de bază!

Ce măsură au unghiurile la centru folosite pentru a desena un poligon regulat cu 12 laturi?

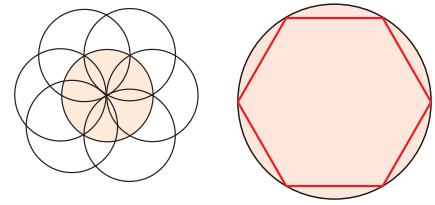
Problemă rezolvată / Rezolvări comparative

Elevii au folosit metode diferite pentru a desena un hexagon regulat.

Mati: Am folosit construcția descrisă în lecție. Mai întâi, am calculat $360^\circ : 6 = 60^\circ$, apoi am trasat 6 unghiuri la centru de câte 60° și am unit punctele obținute pe cerc.



Ema: Am trasat mai multe cercuri de raze egale, ce trec două câte două prin centrele lor, apoi am unit punctele determinate de acestea pe cercul inițial.

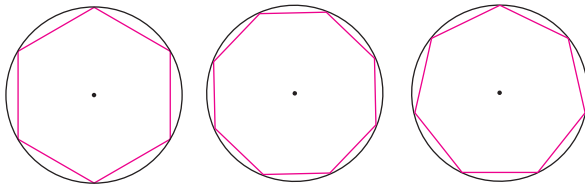


Exprimare orală

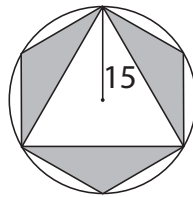
Care rezolvare ți se pare mai rapidă? Dar mai interesantă? Justifică răspunsurile! Cum ai putea folosi desenele celor doi elevi, pentru a obține un triunghi echilateral?

Probleme propuse

1. Denumește fiecare poligon regulat din imaginile următoare și calculează măsurile unghiurilor acestuia.



5. Calculează aria figurii hașurate, știind că hexagonul din imagine este regulat.



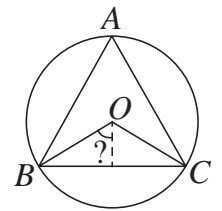
6. Pardoseala unui amfiteatru s-a ornamentat cu un poligon regulat, ale cărui unghiuri au 162° . Câte laturi are poligonul?

2. Folosește instrumente geometrice pentru a construi un poligon regulat cu n laturi, pentru: **a)** $n = 4$; **b)** $n = 6$; **c)** $n = 8$.

3. Calculează măsura unuia dintre unghiurile unui poligon regulat cu: **a)** 10; **b)** 12; **c)** 18 laturi.

4. Dintr-un vârf al unui poligon regulat cu 9 laturi, construim toate diagonalele. Ce măsuri au unghiurile consecutive astfel formate?

7. Calculează lungimea laturilor triunghiului echilateral înscris în cercul de rază 18 mm din figură.

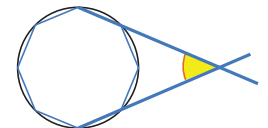


8. Calculează perimetrul unui poligon regulat, știind că are laturile de câte 3 cm și că acest poligon are exact 35 de diagonale.

9. **a)** Demonstrează că, unind din 3 în 3 vârfurile unui poligon regulat cu 18 laturi, se obține un hexagon regulat.
b) Ce se întâmplă dacă unim din 2 în 2 vârfurile unui poligon regulat cu 18 laturi?

10. **a)** Arată că toate diagonalele unui pentagon regulat sunt congruente.
b) Demonstrează că, dacă toate diagonalele unui poligon regulat cu n laturi ($n \geq 4$) sunt congruente, atunci $n = 4$ sau 5.

11. Imaginea alăturată prezintă un octogon regulat înscris într-un cerc. Calculează măsura unghiului marcat prin culoare pe figură, obținut prin prelungirea a două laturi ale octogonului.



Alege și rezolvă în 5 minute!

A Măsura unuia dintre unghiurile unui poligon regulat cu 9 laturi este:

A. 40° ; **B.** 60° ; **C.** 90° ; **D.** 140° .

B Măsura unuia dintre unghiurile exterioare ale unui poligon regulat cu 18 laturi este:

A. 20° ; **B.** 80° ; **C.** 90° ; **D.** 160° .

C Măsura unuia dintre unghiurile unui poligon regulat este de 168° . Numărul de laturi ale poligonului este:

A. 20; **B.** 24; **C.** 30; **D.** 36.

O situație-problemă



Emă s-a înscris la un club sportiv, la secția de aruncare a greutăților. Antrenorul ei i-a explicat că, în proba de aruncare a discului, sportivul se rotește astfel încât corpul metalic (bila) să descrie un cerc.



Antrenorul mi-a mai spus că direcția de aruncare a discului trebuie să intersecteze cercul descris prin rotația brațelor în exact un punct.

Interesant! Deci traiectoria este tangentă la cerc!



Vrem să știm!

Cum putem fi siguri că o dreaptă are un singur punct comun cu un cerc?

Ne amintim...

O dreaptă este tangentă la un cerc, dacă are un singur punct comun cu cercul.

Să demonstrăm!

Teoremă

O dreaptă este tangentă la un cerc dacă și numai dacă este perpendiculară pe un diametru al cercului, în unul dintre punctele de la capetele acestuia.

TN tangentă la cerc $\Leftrightarrow TN \perp AT$

Demonstrație:

„ \Rightarrow “

Fie TN tangentă la cerc, adică T este unicul punct de intersecție al acestei drepte cu cercul.

Presupunem prin absurd că $\sphericalangle OTN \neq 90^\circ$.

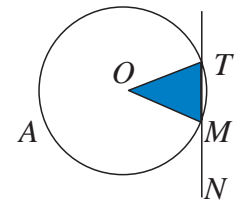
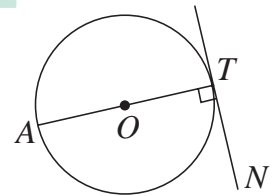
Construim $OP \perp TN$, $P \in TN$ și fie B simetricul lui T față de P .

Triunghiul OTB este isoscel (pentru că, în acest triunghi, OP este înălțime și mediană); deducem că $OT \equiv OB$, adică B este și el un punct de pe cercul de centru O și rază OT . Contradicția obținută arată că $\sphericalangle OTN = 90^\circ$.

„ \Leftarrow “

Reciproc, fie $TN \perp AT$, unde AT este diametru al cercului.

Presupunem prin absurd că TN nu este tangentă la cerc, deci există (cel puțin) încă un punct M de intersecție a dreptei TN cu cercul. Triunghiul OMT este isoscel, iar $\sphericalangle OTM = \sphericalangle OMT = 90^\circ$. Obținem $\sphericalangle MOT = 0^\circ$, ceea ce constituie o contradicție.



Este oare adevărat că printr-un punct al unui cerc trece o singură tangentă la cerc? De ce?

Gândim critic și constructiv!

Evaluăm nivelul de bază!

Desenează pe caietul tău un cerc, marchează punctul A pe acesta și construiește tangenta la cerc, ce trece prin A .

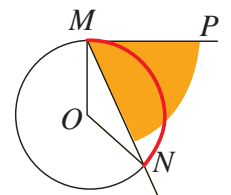
Extindem ...

Unghiul NMP din figura alăturată este format de secanta MN și tangenta MP la cerc. Acesta este un caz particular de unghi înscris în cerc.

Ce relație există între măsura acestui unghi și măsura arcului MN ?

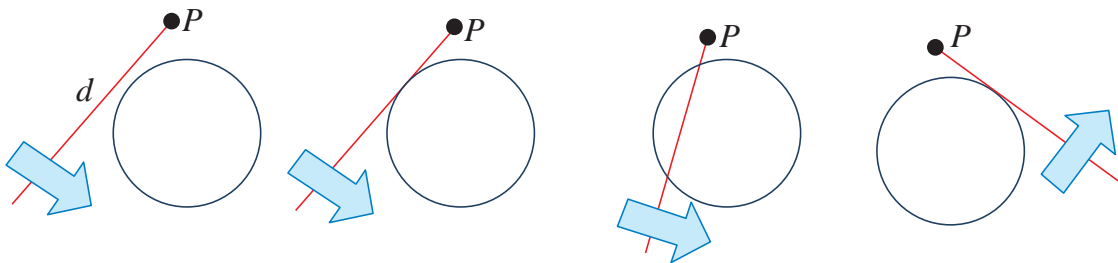
Urmărește și explică pașii demonstrației!

$$\widehat{MN} = \sphericalangle MON = 180^\circ - 2\sphericalangle OMN = 2(90^\circ - \sphericalangle OMN) = 2\sphericalangle NMP$$



Să analizăm!

Fie P un punct fixat, exterior unui cerc dat și fie d o dreaptă ce trece prin P . Pe măsură ce rotim dreapta d în jurul lui P , obținem două poziții ale acesteia în care dreapta devine tangentă la cerc.



Teoremă

Segmentele determinate de punctele de tangență pe tangentele la un cerc duse dintr-un punct exterior cercului sunt congruente.

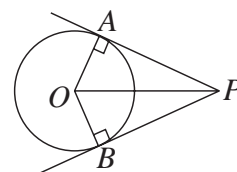
Altfel spus: PA și PB – tangente în A , respectiv în B , la cerc $\Rightarrow PA \equiv PB$

Demonstrație:

PA este tangenta în A la cerc $\Rightarrow \sphericalangle PAO = 90^\circ$.

PB este tangenta în B la cerc $\Rightarrow \sphericalangle PBO = 90^\circ$.

Triunghiurile PAO și PBO sunt congruente (cazul I.C); deducem că $PA \equiv PB$.



Observă demonstrația anterioară și justifică, pe baza ei, „teorema ciocului de cioară”: Dacă PA și PB sunt tangentele duse din punctul P la cercul de centru O , atunci PO este bisectoarea unghiului APB .

Gândim critic și constructiv!

Extindem...

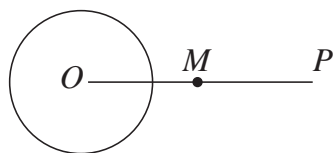


Pentru a construi tangenta la un cerc într-un punct al acestuia, construim perpendiculara pe raza dusă prin acest punct.

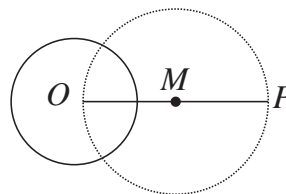
Există oare o construcție geometrică și pentru tangentele la un cerc duse dintr-un punct exterior cercului?



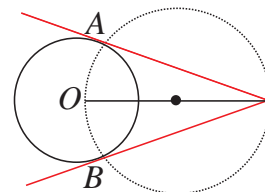
Observă pașii construcției!



1. Construim mijlocul segmentului OP .



2. Construim cercul de diametru OP .



3. Dreptele PA și PB sunt tangente la cerc.

Justifică de ce, prin construcția descrisă mai sus, obținem tangentele din punctul P la cerc.

Gândim critic și constructiv!

Evaluăm nivelul de bază

- Desenează pe caietul tău un cerc și marchează un punct exterior acestuia.
- Folosește instrumente de geometrie pentru a construi tangentele din punctul ales la cerc.

Problemă rezolvată / Rezolvări comparative

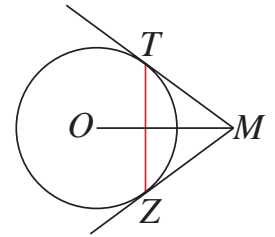
În figura alăturată, dreptele MT și MZ sunt tangentele duse din punctul M la cercul de centru O (T și Z sunt punctele de tangență). Iată cum au demonstrat elevii faptul că $TZ \perp OM$.

Ana:

Folosesc proprietăți de simetrie.
Dreapta OM este o axă de simetrie a figurii.
Punctele T și Z sunt simetrice față de MO .
Deducem că OM este mediatoarea segmentului TZ , adică $TZ \perp OM$.

Mati:

Am folosit proprietăți ale triunghiului isoscel.
Triunghiul MTZ este isoscel. MO este bisectoarea unghiului TMZ , deci este și înălțime în triunghiul MTZ . Altfel spus: $TZ \perp OM$.

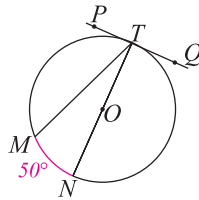


Exprimare orală

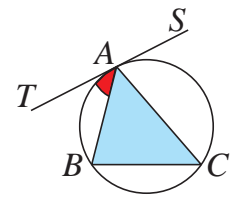
Care rezolvare ți se pare mai rapidă? Dar mai interesantă? Justifică răspunsurile!

Probleme propuse

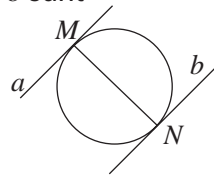
1. În figura alăturată, TN este un diametru, iar PQ este tangenta în T la cerc. Dacă $\widehat{MN} = 50^\circ$, calculează $\sphericalangle PTM$.



2. În figura alăturată, TS este tangenta în A la cercul circumscris triunghiului ABC . Demonstrează că $\sphericalangle TAB \equiv \sphericalangle ACB$.

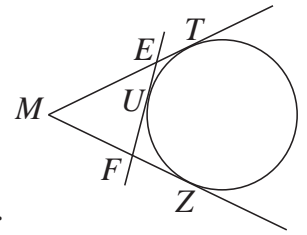


3. În figura alăturată, punctele M și N sunt diametral opuse, iar dreptele a și b sunt tangentele în M , respectiv în N la cerc.

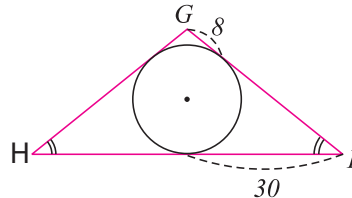


- a) Demonstrează că $a \parallel b$.
b) Formulează și demonstrează o reciprocă a acestei probleme.

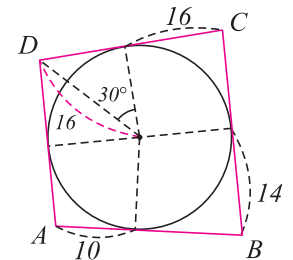
4. În figura alăturată, dreptele MT , MZ și EF sunt tangente la cerc. Demonstrează că perimetrul triunghiului MEF este egal cu dublul lungimii segmentului MT .



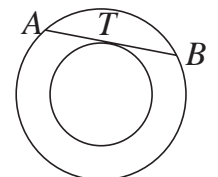
5. Folosind proprietatea tangențelor duse dintr-un punct la un cerc, află perimetrul triunghiului GHI din imagine.



6. Urmărește indicațiile de pe figură și calculează perimetrul patrulaterului $ABCD$.



7. Două cercuri de sârmă sunt concentrice. Pe cercul mare, o vergea metalică AB este atașată prin inele și se mișcă astfel încât să fie tangentă în T cercului mic. Demonstrează că, în orice poziție a vergelei, punctul de tangență la cercul mic este mijlocul segmentului AB .



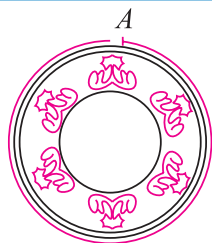
Alege și rezolvă în 5 minute!

- A** Numărul tangențelor la un cerc, ce pot fi duse dintr-un punct exterior cercului, este:
A. 0; B. 1; C. 2; D. 3.

- B** Numărul tangențelor la un cerc, ce pot fi duse într-un punct al cercului, este:
A. 0; B. 1; C. 2; D. 3.

- C** Numărul tangențelor la un cerc, perpendiculare pe o dreaptă dată, este:
A. 0; B. 1; C. 2; D. 3.

Rezolvăm situația-problemă!



Cu ajutorul unei sfori, Ana a măsurat perimetrul și diametrul mai multor farfurii. Ea a notat datele în tabelul alăturat.

Lungimea cercului (P)	37,7704	56,538	75,12	87,92
Diametrul farfuriei (d)	12	18	24	28

Ce valoare are în fiecare caz raportul?

Rezolvare:



Eu am obținut de fiecare dată valori apropiate de numărul 3,14!

Am verificat și eu! Am obținut cam la fel! Totuși, în mod clar: dacă raza se mărește, se mărește și cercul, adică lungimea lui.



Interesant! Și eu am obținut tot 3,14!

Oare nu cumva, oricât $\frac{P}{d}$ s-ar mări cercul, raportul rămâne același?

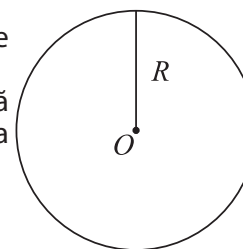


Vrem să știm!

Ce relație există între lungimea unui cerc și raza sa?
Ce relație există între aria unui cerc și raza sa?

Definim!

Raportul dintre circumferința unui cerc și diametrul său este constant, ceea ce înseamnă că este același oricare ar fi cercul pe care îl măsurăm. Valoarea acestui raport este un număr irațional, adică un număr care are după virgulă o infinitate de zecimale care nu se repetă periodic. Acest număr a fost notat cu litera grecească π (citim π). Prin trunchiere la ordinul sutimilor, obținem aproximarea: $\pi \approx 3,14$.



Consecință

Lungimea unui cerc de rază R se exprimă prin formula: $L = 2\pi R$.

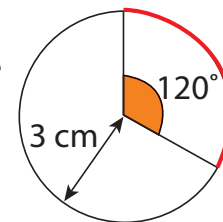
Extindem...

Cum calculăm lungimea unui arc de cerc? Deoarece la arce congruente corespund unghiuri la centru congruente, lungimea unui arc de cerc este direct proporțională cu măsura unghiului la centru ce subîntinde acest arc. Pentru a calcula, de exemplu, lungimea unui arc de cerc cu măsura de 120° , din cercul de rază 3 cm, putem proceda astfel:

$360^\circ \dots\dots\dots L = 2\pi R = 6\pi \text{ cm}$

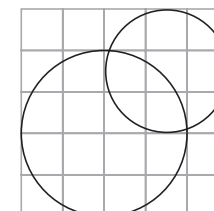
$120^\circ \dots\dots\dots x$

Obținem: $x = \frac{6\pi \cdot 120}{360} = 2\pi \text{ cm} \approx 2 \cdot 3,14 \text{ cm} \approx 6,28 \text{ cm}$.



Evaluăm nivelul de bază

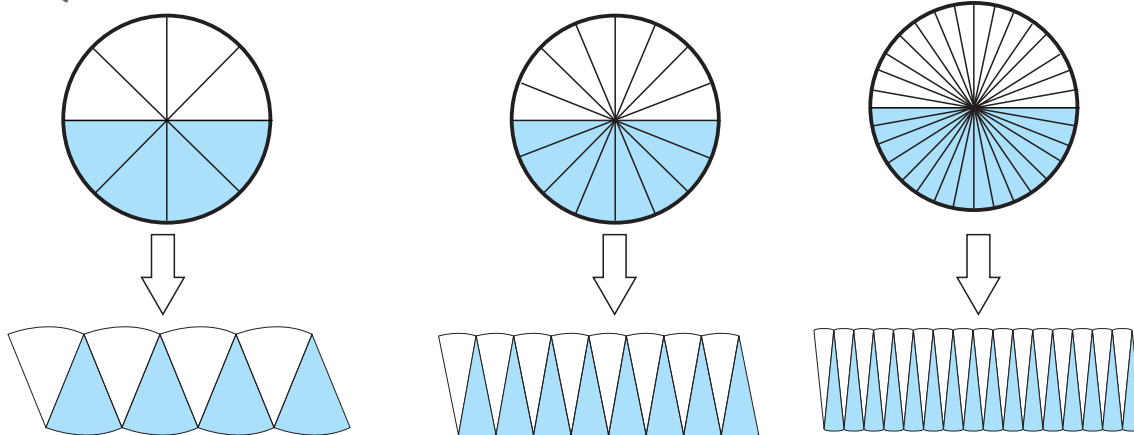
- 1 Calculează lungimea unui cerc cu raza de 5 cm. Aproximează această lungime la un număr întreg de milimetri.
- 2 Calculează lungimea unui semicerc cu raza de 4 cm.
- 3 Determină lungimile celor două cercuri din imagine. (Pătrățelele din rețea au latura de 0,5 cm.)



Să explorăm!



Am împărțit un disc în câteva părți egale și am așezat altfel piesele obținute, ca în imaginile următoare.



Figurile obținute seamănă tot mai mult cu un dreptunghi!

Eu am observat că, de fiecare dată, figura geometrică obținută prin rearanjarea „pieselor” are aria egală cu aria discului.

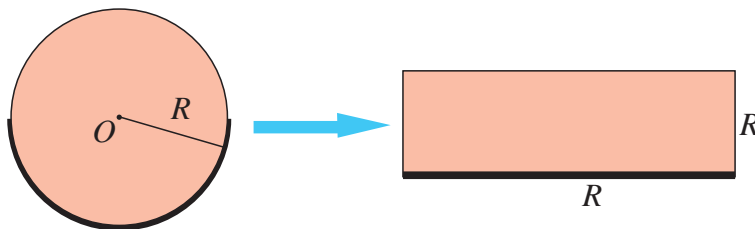


Teoremă Aria discului de rază R este πR^2 .

Demonstrație:

Folosim procedeul pieselor de puzzle (ce constă în partiționare și rearanjare), descris mai sus. Pe măsură ce numărul de părți egale în care este partiționat discul crește, figura geometrică obținută prin rearanjarea acestora aproximează un dreptunghi în care lungimea este egală cu lungimea unui semicerc, iar lățimea este egală cu raza cercului.

Deoarece discul de rază R și dreptunghiul cu dimensiunile R și πR au arii egale, deducem că aria discului este egală cu $R \cdot \pi R = \pi R^2$.



Cum s-ar putea folosi procedeul de mai sus pentru a justifica formula pentru aria cercului?

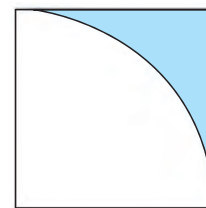
Gândim critic și constructiv!

Evaluăm nivelul de bază

- ① Calculează aria unui disc cu raza de 4 cm. Trunchiază rezultatul la un număr întreg de cm^2 .
- ② Aria unui disc este (aproximativ) $78,5 \text{ cm}^2$. Cât măsoară (în cm) diametrul discului?

Problemă rezolvată / Rezolvări comparative

În interiorul unui pătrat cu latura de 6 cm, trasăm un arc de cerc cu centrul în unul din vârfurile pătratului, ca în imagine. Calculează aria și perimetrul regiunii colorate.



Rezolvare

Arclul de cerc trasat reprezintă un sfert din cercul de rază 6 cm.

De aceea, lungimea arcului de cerc este $\frac{1}{4} 2\pi R = 3\pi$ cm, iar aria porțiunii de disc delimitată de acest arc este $\frac{1}{4} \cdot \pi R^2 = 9\pi$ cm².

Deducem că perimetrul regiunii colorate este $(3\pi + 12)$ cm, iar aria acesteia este $(36 - 9\pi)$ cm².

Exprimare orală

Justifică modul de calcul pentru perimetrul și aria regiunii colorate. De ce oare în primul caz se adună lungimi, iar în al doilea caz se scad arii?

Probleme propuse

1. Fraza următoare te poate ajuta să memorezi primele 10 cifre ale numărului π . Pentru aceasta, numără câte litere are fiecare cuvânt și scrie rezultatul, păstrând virgula!
Dar, e bine a vedea lucrurile de foarte multe ori...

2. Calculează lungimea unui cerc cu raza de 5 cm, precum și aria discului mărginit de acest cerc.

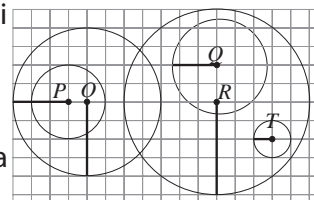
5. Un cerc cu raza de 4 cm este interior unui alt cerc, cu raza de 6 cm. Cât este aria regiunii din plan delimitată de cele două cercuri?

6. Un băiat rotește deasupra capului o piatră legată de o sfoară. La o rotație completă piatra parcurge 6 m. Ce lungime are sfoara?

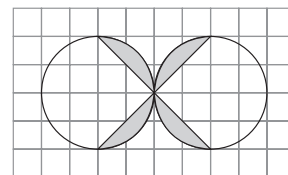


3. Un hexagon regulat cu perimetrul de 18 cm este înscris într-un cerc. Calculează lungimea cercului și aria discului delimitat de acesta.

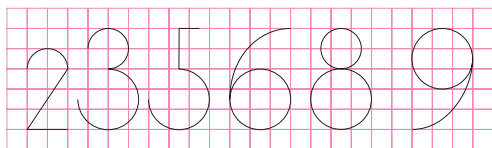
4. Calculează ariile cercurilor, folosind ca unitate de măsură aria pătratului din rețea.



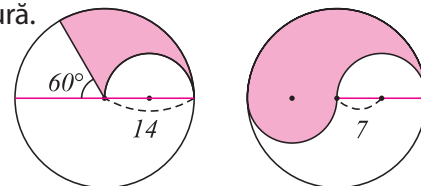
7. Calculează aria regiunii colorate pe figura alăturată, folosind ca unitate de măsură aria pătrățelelor din rețea.



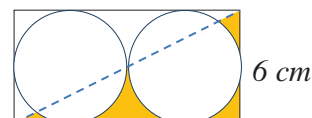
8. Toate cifrele sunt alcătuite din segmente sau din arce de cerc. Află perimetrul.



9. Calculează ariile zonelor colorate folosind datele din figură.



10. Observă datele de pe figura alăturată, apoi calculează aria suprafeței colorate. Propune și rezolvă apoi o problemă asemănătoare, în care apar 4 cercuri.



Alege și rezolvă în 5 minute!

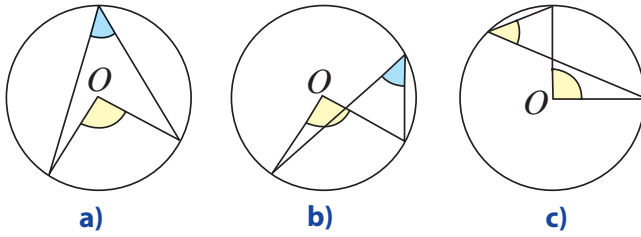
A Calculează lungimea unui cerc cu diametrul de 12 cm, apoi aria discului corespunzător.

B Lungimea unui cerc este de 6π cm. Calculează aria cercului.

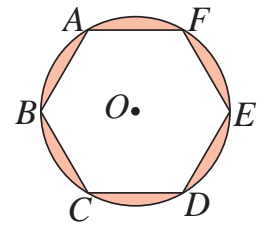
C Calculează lungimea cercului circumscris unui hexagon regulat cu perimetrul de 12 cm, apoi aria discului corespunzător.

Recapitulăm prin probleme

1. Pentru fiecare figură, precizează relația dintre unghiurile marcate prin culoare.

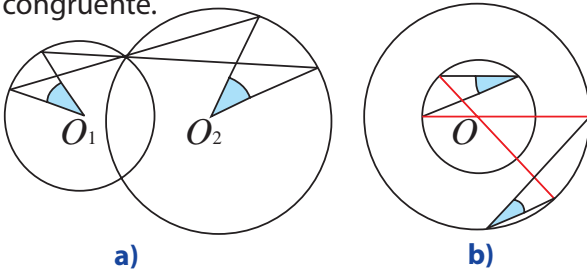


2. Imaginea arată hexagonul regulat $ABCDEF$, înscris în cercul de centru O .

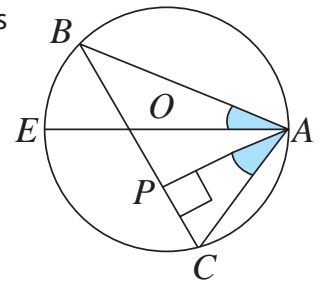


- a) Trasează una dintre apotemele hexagonului.
b) Calculează $\sphericalangle CAF$.
c) Demonstrează că tangentele în A și D la cerc sunt paralele.

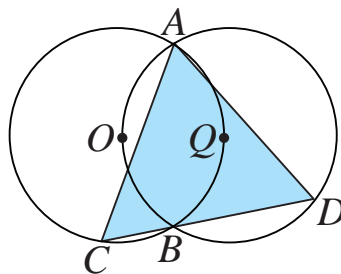
3. Arată că, în fiecare dintre figurile de mai jos, unghiurile marcate prin culoare sunt congruente.



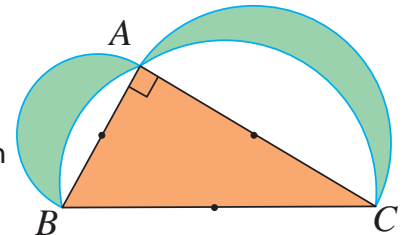
4. În triunghiul ABC , înscris în cercul de centru O , construim diametrul AE și înălțimea AP . Demonstrează că unghiurile BAE și PAC sunt congruente.



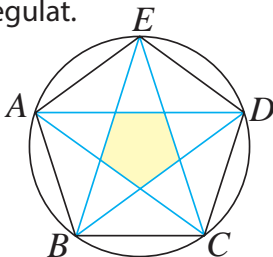
5. Fiecare dintre cercurile de centre O și Q din figura alăturată trece prin centrul celuilalt cerc. Fie A și B punctele lor de intersecție. Dacă B , C și D sunt coliniare, demonstrează că triunghiul ACD este echilateral.



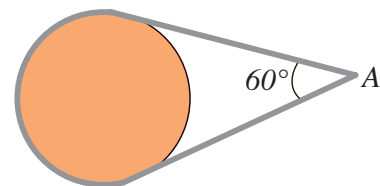
6. Pe laturile triunghiului dreptunghic ABC se construiesc semicercuri, ca în figura alăturată. Demonstrează că aria regiunilor colorate, delimitate de aceste semicercuri, este egală cu aria triunghiului.



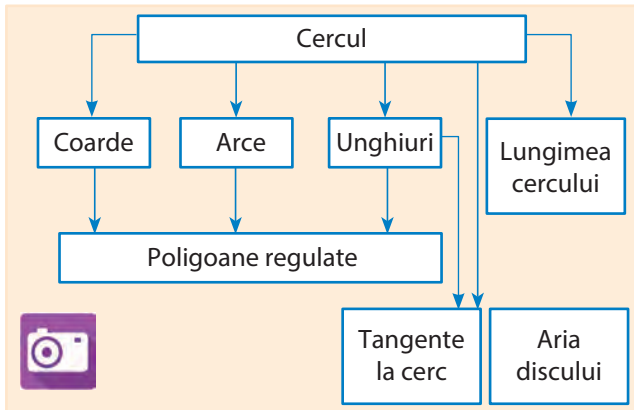
7. În pentagonul regulat $ABCDE$, construim toate diagonalele. Demonstrează că poligonul delimitat de aceste segmente (marcat prin culoare în imaginea de mai jos) este tot pentagon regulat.



8. În imaginea de mai jos apare o curea de transmisie. Părțile „drepte” ale curelei sunt tangente la roată. Dacă măsura unghiului din A este de 60° , iar raza roții este de 15 cm, ce lungime are cureaua de transmisie?



Ce am învățat?



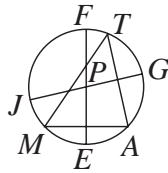
Rezolv testele pentru a verifica dacă pot:

- să identific elemente și să descriu proprietăți ale elementelor cercului sau ale poligoanelor regulate înscrise în cerc;
- să utilizez proprietăți ale arcelor, coardelor, sau tangentelor la cerc în rezolvarea de probleme;
- să exprim cu notații matematice proprietăți ale cercului și ale poligoanelor regulate;
- să interpretez proprietăți ale cercului și ale poligoanelor regulate folosind reprezentări geometrice;
- să analizez situații practice care necesită folosirea proprietăților cercului sau ale poligoanelor regulate.

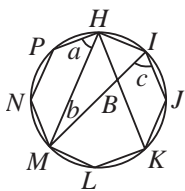
TESTUL 1

1. Observă figura, apoi scrie pe caietul tău:

- Un diametru este
- Centrul cercului este ...
- Arcul subîntins de coarda AM mai conține punctul ...



2. În figură apare un poligon

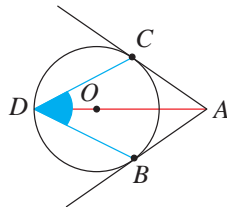


regulat cu 8 laturi. Calculează măsurile unghiurilor marcate pe figură.

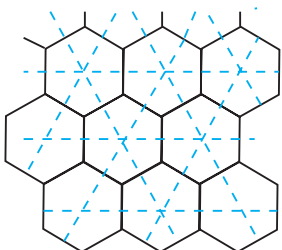
3. Desenează triunghiul echilateral MNP înscris în cercul de centru A . Trasează tangenta

MB la acest cerc. Folosește semnul " \perp " pentru a descrie prin simboluri matematice faptul că dreapta MB este tangentă la cerc.

4. Pe figura alăturată, AB și AC sunt tangente la cercul de centru O . Dacă unghiul BAC măsoară 50° , calculează măsura unghiului BDC .



5. Pavajul din imagine este realizat din plăci cu formă de hexagon regulat.

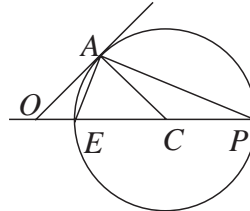
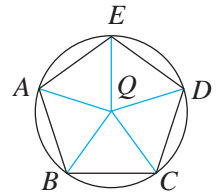


Demonstrează că există un pavaj cu triunghiuri echilaterale, ale căror vârfuri sunt centrele hexagoanelor.

TESTUL 2

1. În figură, $ABCDE$ este un pentagon regulat. Completează pe caietul tău:

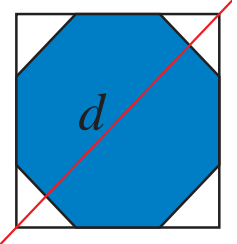
- $AC \equiv \dots\dots\dots$
- $\sphericalangle BED = \dots\dots\dots$
- $\sphericalangle A Q D = \dots\dots\dots$



2. În figura alăturată, AO este tangentă la cercul de centru C , iar $\sphericalangle APC = 27^\circ$. Decide dacă $AO \geq AC$. Justifică răspunsul.

3. Desenează pătratul $ABCD$ înscris în cercul de centru P . Trasează tangenta CT la acest cerc. Folosește semnul " \perp " pentru a descrie prin simboluri matematice faptul că dreapta CT este tangentă la cerc.

4. În figură apare un octogon regulat. Demonstrează că dreapta d este perpendiculară pe două dintre laturile octogonului și trece prin mijloacele acestora.



5. Un vitraliu neterminat are forma din imagine. Raza vitraliului este de 1,5 m. Calculează aria sticlei ce mai este necesară pentru finalizarea vitraliului.



Arta fotografiei

Plan de lucru

- ✓ **Materiale necesare:** Fotografii (fizice sau digitale), riglă, compas.
- ✓ **Scop:** Veți realiza un album fotografic special.

Realizarea proiectului

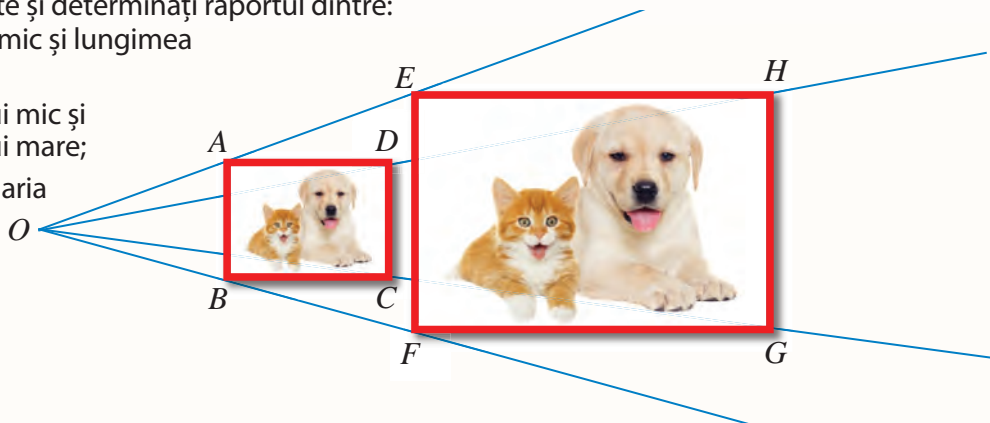
Lucrați în echipe de câte doi, trei sau patru colegi!

- ✓ Selectați câteva fotografii sau desene. Folosiți calculatorul pentru a edita imaginile la diferite dimensiuni. Dacă nu puteți apela la un laptop sau computer, folosiți un copiator sau reproduceți imaginile prin desenarea lor la o scară mai mică sau mai mare.
- ✓ Variați dimensiunile desenului și explorați în ce situații laturile imaginilor obținute formează proporții.
- ✓ Însotiți imaginile create electronic sau prin colaje cu explicații privind proporțiile formate, în relație cu noțiunile învățate în cadrul acestei unități (Teorema lui Thales, teorema fundamentală a asemănării, triunghiuri asemenea, relații metrice).
- ✓ Puneți fotografiile și desenele, precum și calculele făcute privind măsuri de unghiuri, lungimi de segmente și arii, într-un album al echipei voastre.

Pentru început:

- ✓ Observați imaginea alăturată și analizați-i proprietățile. De exemplu, măsurați distanțele, aproximați-le la un număr întreg de milimetri și identificați linii mijlocii în triunghiuri. Scrieți relațiile implicate și determinați raportul dintre:

- lungimea tabloului mic și lungimea tabloului mare;
- perimetrul tabloului mic și perimetrul tabloului mare;
- aria tabloului mic și aria tabloului mare.



Interacțiune

În echipa voastră:

- ✓ Discutați etapele proiectului și împărțiți sarcinile în cadrul echipei.
- ✓ Fiecare rezolvă propria sarcină, dar colaborează și cu ceilalți pentru a obține la final un produs foarte bun al întregii echipe.
- ✓ Căutați să realizați modele care conduc la figuri geometrice diferite.

Prezentare

Lucrați cu toată clasa!

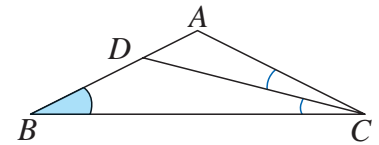
- ✓ Prezentați albumele realizate de echipe. Puteți folosi o prezentare electronică.
- ✓ Revizuiți albumele în urma sugestiilor oferite de participanții la prezentare.
- ✓ Realizați, în spațiul clasei sau al școlii, o expoziție cu albumele echipelor.

Rezolvând exercițiile următoare, îți vei aminti noțiuni și rezultate necesare pentru parcurgerea acestei Unități de învățare. Fiecare problemă propusă valorează 1 punct. Se acordă 1 punct din oficiu.

I. Scrie pe foaia de rezolvare cuvintele sau rezultatele care, înscrise în spațiile punctate, formează enunțuri adevărate.

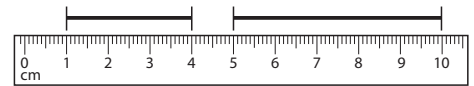
Măsura unui unghi

1. În figura alăturată, $AB \equiv AC$, CD este bisectoarea unghiului ACB , iar $\sphericalangle B = 20^\circ$.
Unghiul ADC are măsura de ... $^\circ$.



Rapoarte

2. Raportul celor două segmente din figura alăturată este egal cu ...



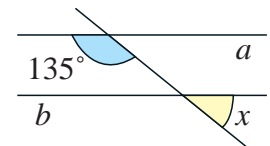
Proporții derivate

3. Dacă $\frac{x}{5} = \frac{y}{6}$, atunci $2x + \frac{y}{10} = \dots$

II. Scrie pe foaia de rezolvare litera corespunzătoare răspunsului corect pentru următoarele exerciții:

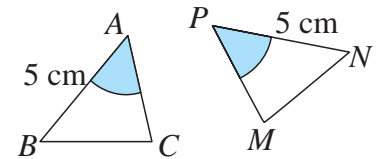
Drepte paralele și secante

4. Dreptele a și b din figură sunt paralele. Măsura unghiului notat cu x este egală cu:
A. 30° ; B. 45° ; C. 35° ; D. 55° .



Congruența triunghiurilor

5. Știm că triunghiurile din imaginea alăturată sunt congruente, iar unghiurile marcate la fel au măsuri egale. Atunci, suntem siguri că:
A. $BC \equiv PN$; B. $BC \equiv PM$;
C. $BC \equiv MN$; D. $BC = 5$ cm.



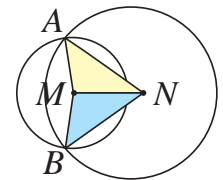
Proporții

6. Dacă $\frac{6}{15} = \frac{a}{25}$, atunci a este egal cu:
A. 10; B. 8; C. 15; D. 62,5.

III. Scrie pe foaia de rezolvare soluțiile complete ale exercițiilor următoare:

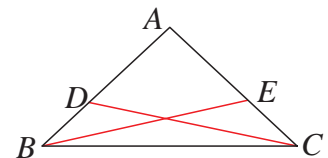
Criteriul de congruență L.L.L.

7. Cercurile de centre M și N sunt secante în punctele A și B .
Demonstrează că triunghiurile MAN și MBN sunt congruente.



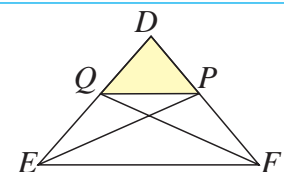
Criteriul de congruență L.U.L.

8. În triunghiul isoscel ABC (cu $AB \equiv AC$), alegem punctul D pe segmentul AB și punctul E pe segmentul AC , astfel ca $AD \equiv AE$.
Demonstrează că $CD \equiv BE$.



Criteriul de congruență U.L.U.

9. În triunghiul isoscel DEF (cu $DE \equiv DF$), construim bisectoarele EP și FQ ($P \in DF$ și $Q \in DE$).
Demonstrează că triunghiul DPQ este isoscel.



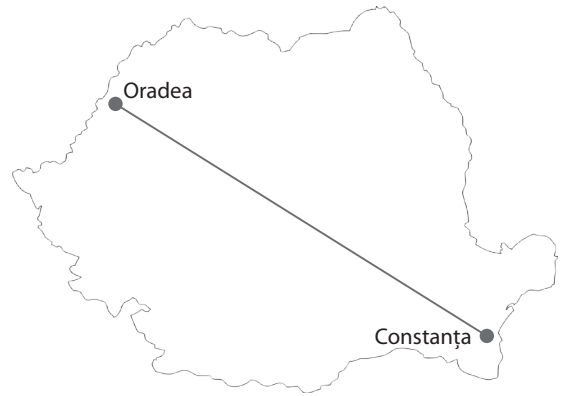
Dacă ai obținut mai puțin de jumătate din punctaj la acest test, este util să revezi definițiile și proprietățile verificate mai sus, pentru a înțelege mai bine ceea ce urmează.

O situație-problemă

Harta alăturată este desenată la scara 1:15 000 000. Care este distanța aproximativă de la Constanța la Oradea?



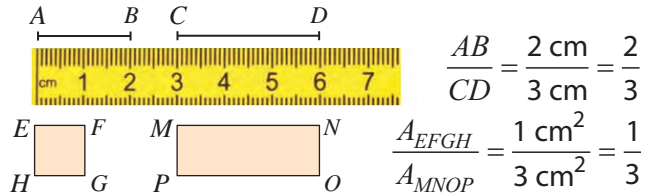
Am măsurat! Pe hartă, distanța Constanța – Oradea este de aproximativ 4,5 cm.



Ne amintim ...

Pentru a compara două mărimi de același fel, folosim **raportul măsurilor lor**, măsurate cu aceeași unitate de măsură.

Exemplu:



Pentru a compara două mărimi diferite, folosim **raportul unitar**.

Exemplu: $\frac{\text{distanța}}{\text{timp}} = \text{viteza} \left(\frac{60 \text{ km}}{2 \text{ ore}} = 30 \text{ km/h} \right)$

Pentru a ordona mai multe mărimi, folosim **raportul procentual** (procente): $p\% = \frac{p}{100}$.

Exemplu:

Ana a câștigat 17 partide din 25 jucate, adică 68%.
Dan a câștigat 13 partide din 20 jucate, adică 65%.
Deci Ana a obținut un scor mai bun.

Explică modul în care au fost calculate rapoartele procentuale din exemplul anterior.

Gândim critic și constructiv!

Două rapoarte egale formează o **proporție**.

Pentru a verifica egalitatea a două rapoarte, sau pentru a determina un termen necunoscut al unei proporții, aplicăm proprietatea fundamentală a proporției: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$

Exemple:

- $\frac{7}{5} = \frac{28}{20}$ este o proporție pentru că $7 \cdot 20 = 5 \cdot 28$.
- $\frac{x}{2,5} = \frac{4\sqrt{3}}{5} \Rightarrow 5x = 2,5 \cdot 4\sqrt{3}$. Obținem $x = 2\sqrt{3}$.

Rezolvăm situația-problemă!

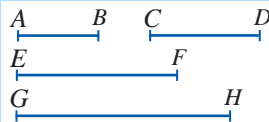
Raportul între distanța de pe hartă și distanța reală este egal cu scara hărții. Formăm proporția:

$$\frac{4,5}{x} = \frac{1}{15\,000\,000}$$

Rezultă că distanța Constanța - Oradea este: $15\,000\,000 \cdot 4,5 \text{ cm} = 67\,500\,000 \text{ cm} \approx 675 \text{ km}$.

Definiție

Segmente proporționale



Patru segmente AB , CD , EF și GH sunt proporționale dacă lungimile lor formează o proporție: $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$

Evaluăm nivelul de bază

① Numerele 10; 90; 150; 6 pot fi termenii unei proporții? De ce?

② 0,5 cm de pe o hartă rutieră corespund la 20 km în realitate. Care este scara hărții?

Probleme propuse



- Într-o școală învață 720 de copii și predau 42 de profesori. Care este raportul dintre:
 - numărul de elevi și numărul de profesori?
 - numărul de profesori și numărul de elevi?
- Lungimea unui dreptunghi este de 50 mm, iar lățimea este de 2 cm.
 - Cu cât este mai mare lungimea decât lățimea?
 - De câte ori este mai mare lungimea decât lățimea dreptunghiului?
 - Cât este raportul dintre lungime și lățime?



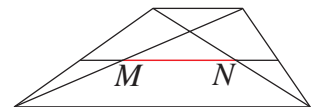
- În care dintre situațiile următoare este mai convenabil să se utilizeze, ca mod de comparare a două mărimi, diferența, și în care, raportul?
 - Înălțimea unei clădiri este de 7 m și a alteia este de 8 m;
 - Un tricou costa în ianuarie 15 lei, iar o lună mai târziu costa de 3 ori mai mult;
 - Distanța minimă de la Pământ la Lună este de 357 000 km, iar distanța minimă de la Pământ la Soare este de 147 035 000 km.



- Ema a comandat 10 fotografii cu prețul total de 16 lei și încă 4 dintre aceste fotografii mărite. Care este costul total al fotografiilor dacă raportul de preț între o fotografie normală și una mărită este $\frac{2}{5}$?
- Suma a două numere este 24, iar câțul lor este 3. Află numerele.
- Terenul de handbal este un dreptunghi cu perimetrul 120 m și raportul dimensiunilor 2. Află lungimile laturilor terenului.



- Raportul lungimilor bazelor unui trapez este 4 : 1, iar segmentul MN , determinat de diagonale pe linia mijlocie a trapezului, are lungimea de 18 cm. Află lungimile bazelor trapezului.



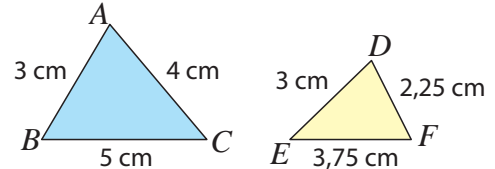
Alege și rezolvă în 5 minute!

A Raportul maselor a doi copii este $\frac{5}{6}$. Cât cântărește copilul cu masa mai mică, dacă celălalt copil are 48 kg?

B Pe un desen cu scara 10:1, aripa unui fluture are lățimea de 1,6 dm și lungimea de 26,2 cm. Ce dimensiuni are în realitate aripa fluturului?

C Un pătrat și un dreptunghi au aceeași arie, adică 36 cm². Raportul dintre lungimea dreptunghiului și latura pătratului este 3. Cât este lățimea dreptunghiului?

- Care dintre următoarele rapoarte are valoarea $\frac{3}{8}$ (a, b, c sunt numere nenule)?
 - $\frac{6}{16}$; b) $\frac{9}{64}$; c) $\frac{3a}{8a}$; d) $\frac{12b}{32b}$; e) $\frac{3+c}{8c}$.
- Formează proporții cu lungimile laturilor triunghiurilor de mai jos.



- Află numerele necunoscute x, y, z, t astfel încât:
 - $\frac{x}{3} = \frac{60}{y} = \frac{24}{18}$; b) $\frac{5}{4} = \frac{10}{x} = \frac{5\sqrt{2}}{z} = \frac{t}{904}$.
- Știind că $\frac{x}{y} = 5$ (unde x și y sunt numere nenule), calculează:
 - $\frac{x+y}{y}$; b) $\frac{2x+y}{2y}$; c) $\frac{5x-3y}{4y}$; d) $\frac{4x-y}{3y}$.
- Demonstrează că, dacă $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$, atunci $\frac{a+b+c}{9} = \frac{2a+5b-c}{15}$.



O situație-problemă



Tatăl lui Geo a montat în garaj un raft metalic de forma celui din imaginea alăturată. El a montat rafturile la distanțe egale pe barele verticale, apoi a ancorat toată construcția cu o bară oblică, pe care vrea s-o prindă de fiecare raft prin șuruburi. Pentru aceasta, tatăl lui Geo a găurit această bară la distanțe egale, fără a face alte măsurători.

De unde știe tata că șuruburile se vor potrivi?



Vrem să știm!

Ce sunt paralelele echidistante? Ce proprietăți au acestea?

Definiție

Se numesc **paralele echidistante** trei sau mai multe paralele aflate fiecare la aceeași distanță de cea consecutivă ei.

E clar! Liniile de pe o foaie de caiet dictando sunt paralele echidistante



Să formulăm

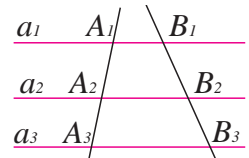
Teoremă

Dacă trei sau mai multe drepte paralele determină pe o secantă segmente congruente, atunci ele determină pe orice altă secantă segmente congruente.

Referitor la figura alăturată, teorema afirmă:

Dacă $a_1 \parallel a_2 \parallel a_3$ și $A_1A_2 \equiv A_2A_3$, atunci $B_1B_2 \equiv B_2B_3$.

În particular, din ipoteză deducem că dreptele a_1, a_2, a_3 sunt paralele echidistante.



Citește afirmațiile anterioare. Cum crezi că putem deduce că dreptele paralele a_1, a_2, a_3 sunt echidistante?

Gândim critic și constructiv!

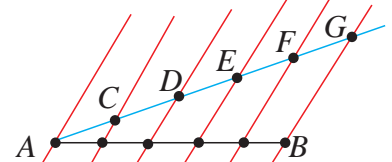
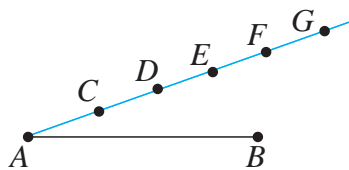
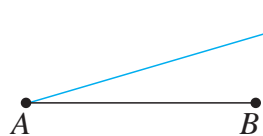
Rezolvăm situația-problemă!



Acum e clar de ce se potrivesc șuruburile! Marginile rafturilor sunt paralele și echidistante: pe orice secantă (deci și pe bara din spate), ele determină segmente congruente!

Extindem ...

Folosim teorema paralelelor echidistante pentru a împărți un segment în mai multe părți egale. Descriem pașii construcției prin care împărțim segmentul AB în 5 părți egale.



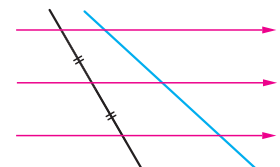
1. Trasăm o semidreaptă cu originea în A.

2. Folosind rigla sau compasul, marcăm pe semidreaptă cinci segmente congruente.

3. Construim drepte paralele la BG. Punctele de intersecție a acestor drepte cu AB determină segmente congruente.

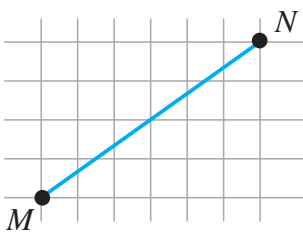
Evaluăm nivelul de bază

În figura alăturată, dreptele marcate cu roșu sunt paralele. Numește segmente congruente. Precizează de ce sunt congruente.



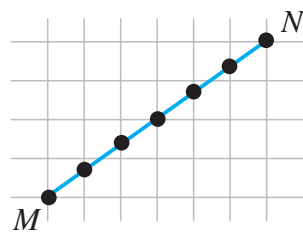
Problemă rezolvată / Rezolvări comparative

Să se împartă segmentul MN din desenul de mai jos în 6 părți egale.



Rezolvare:

Dreptele verticale ale caroiajului sunt paralele echidistante. Deoarece între verticala ce trece prin M și verticala prin N sunt 5 alte drepte, punctele lor de intersecție cu MN (marcate pe figura din dreapta) determină, împreună cu punctele M și N , șase segmente congruente.

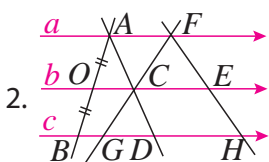
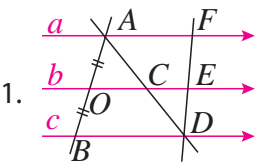


Exprimare orală

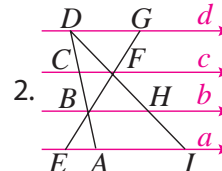
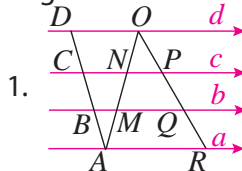
Cum crezi că am putea împărți același segment MN în 4 părți egale, folosind liniatura caietului?

Probleme propuse

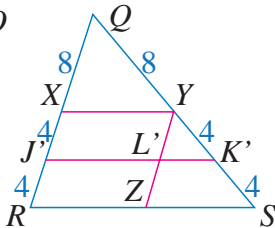
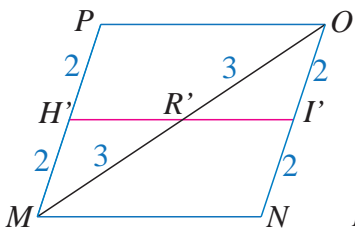
1. În figurile următoare, $a \parallel b \parallel c$ și $AO \equiv OB$. Numește segmentele congruente.



2. În figurile următoare avem $a \parallel b \parallel c \parallel d$ și $AB \equiv BC \equiv CD$. Identifică și alte segmente congruente.



3. Pentru figurile de mai jos, numește segmentele care sunt linii mijlocii în triunghiuri.

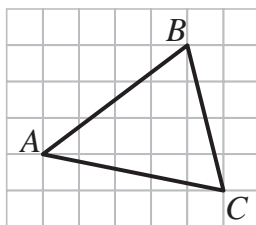


4. Desenează un segment. Marchează punctele care împart acest segment în 3 părți congruente, folosind:

- măsurarea cu o riglă gradată;
- construcția de paralele echidistante.

5. Împărțim o mediană a unui triunghi în 6 părți congruente. Arată că unul dintre punctele de diviziune este centrul de greutate al triunghiului.

6. Copiază pe caietul tău figura alăturată. Folosește apoi liniatura caietului pentru a împărți în câte 4 părți congruente:



- segmentul AB ;
- segmentul BC .

7. a) Pe segmentul AB , marcăm cele 5 puncte (diferite de A și B) ce împart segmentul AB în 6 segmente congruente, respectiv cele 8 puncte ce împart segmentul AB în 9 părți congruente. Câte puncte distincte am marcat, în total?

- b) Dar dacă mai adăugăm și cele 11 puncte care împart AB în 12 părți congruente?

8. Pe segmentul AB marcăm punctele C_1, C_2, \dots, C_{99} , care împart acest segment în 100 de segmente congruente. Câte dintre segmentele determinate de punctele C_1, C_2, \dots, C_{99} au lungimea cât jumătate din AB ?

Alege și rezolvă în 5 minute!

A Știind că, în figura a doua din Problema 1, $GH = 4$ cm, determină lungimea segmentului CE .

B Știind că, în figura a doua din Problema 2, $CF = 4$ cm, determină lungimile segmentelor BH și AI .

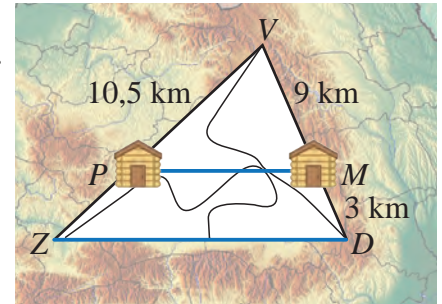
C Copiază pe caietul tău figura din Problema 6. Identifică centrul de greutate al triunghiului ABC .

O situație-problemă

În excursie, copiii au primit de la cabană o hartă a traseelor din zonă. Au constatat însă că, de pe hartă, lipsea tocmai distanța pe care urmau să o parcurgă - de la cabana Piscul (P) la satul Zorile (Z).



Am observat că drumurile între cele două sate și între cele două cabane, adică ZD și PM, sunt paralele. Ne ajută oare această proprietate?

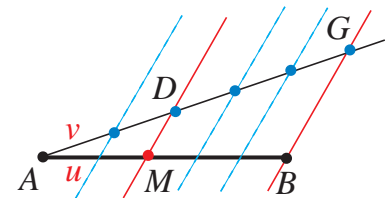


Vrem să știm!

Ce relație există între două drepte paralele și segmentele pe care acestea le determină pe laturile unui triunghi?

Să observăm!

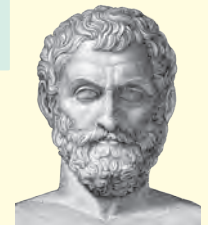
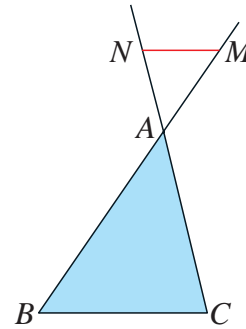
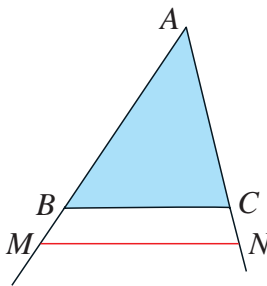
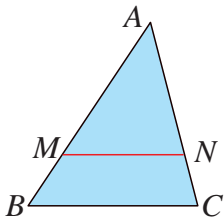
Am văzut că mai multe drepte paralele determină pe orice secantă segmente congruente. În figura alăturată, paralelele date determină pe AB segmente de lungime u , iar pe AG segmente de lungime v . Observăm că punctul M împarte AB în raportul $\frac{2}{3}$, iar D împarte AG tot în raportul $\frac{2}{3}$.



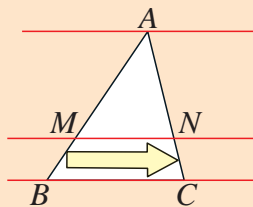
Teorema lui Thales

O paralelă la una dintre laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi, sau pe prelungirile lor, segmente proporționale.

Teorema afirmă că, în oricare dintre situațiile din figurile următoare: dacă $MN \parallel BC$, unde $M \in AB$, $N \in AC$, atunci $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$.



Thales din Milet
623 î.Hr. - 546 î.Hr.
Thales a contribuit la dezvoltarea matematicii, astronomiei și a filosofiei. Este considerat părintele științelor.



Segmentele care apar în proporția din teoremă își găsesc corespondent prin deplasare de-a lungul paralelelor. Astfel, de exemplu, segmentului MB de pe prima latură îi corespunde segmentul NC de pe a doua latură. În acest fel, putem scrie corect proporția dorită.

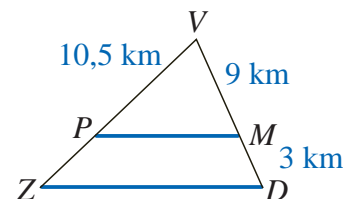
Completează: $\frac{MB}{MA} = \frac{?}{?}$.

Gândim critic și constructiv!

Rezolvăm situația-problemă!

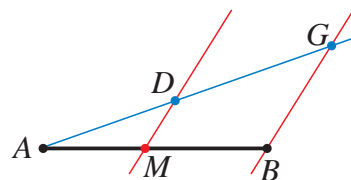
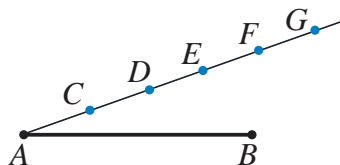
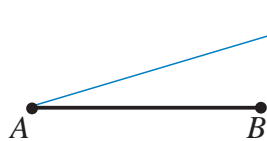
Deoarece $PM \parallel ZD$, conform teoremei lui Thales, avem: $\frac{VP}{ZP} = \frac{VM}{MD}$,
adică $\frac{10,5}{x} = \frac{9}{3}$. Obținem $x = 3,5$.

Așadar, distanța de la cabana Piscul la satul Zorile este de 3,5 km.



Extindem ...

Folosim Teorema lui Thales pentru a împărți un segment în părți proporționale cu numere date. Iată pașii construcției prin care împărțim segmentul AB în raportul $\frac{2}{3}$:



1. Trasăm o semidreaptă cu originea în A .

2. Folosind rigla sau compasul, marcăm pe semidreaptă cinci segmente congruente. Punctul D împarte segmentul AG în raportul $\frac{2}{3}$.

3. Construim $DM \parallel BG$, $M \in AB$.
Deoarece $\frac{AM}{MB} = \frac{AD}{DG} = \frac{2}{3}$, deducem că M este punctul căutat.

Cum formulăm reciproca teoremei lui Thales?

Ne amintim ...

Dacă patrulaterul $ABCD$ este paralelogram, atunci diagonalele AC și BD au același mijloc.

Reciproc, dacă în patrulaterul convex $ABCD$, diagonalele au același mijloc, atunci $ABCD$ este paralelogram.

Pentru a obține reciproca unei teoreme, schimbăm ipoteza cu concluzia!



Comparăm!

Teorema lui Thales:

$MN \parallel BC$
 $M \in AB, N \in AC$

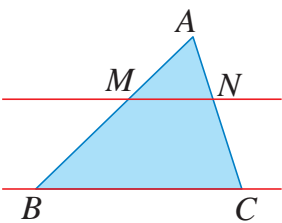
$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

Reciproca teoremei lui Thales:

$MN \parallel BC$

$M \in AB, N \in AC$
 $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$

Atenție la sensul săgeții!



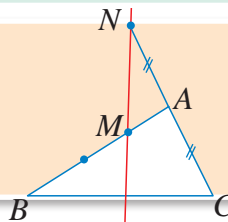
Să formulăm!

Reciproca Teoremei lui Thales

Dacă în triunghiul ABC , punctele M și N sunt situate pe laturile AB și AC și determină pe aceste laturi segmente proporționale, atunci dreptele MN și BC sunt paralele.

Pe figura alăturată, $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = \frac{1}{2}$

Totuși, dreptele MN și BC nu sunt paralele!
Cum explici această (aparentă) contradicție?



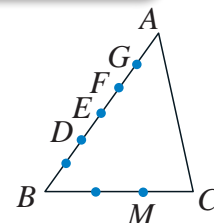
Gândim critic și constructiv!

Evaluăm nivelul de bază



Alege răspunsul corect! Punctele marcate pe laturile AB și BC din figura alăturată împart aceste segmente în 6, respectiv în 3 părți congruente. Cu ce punct trebuie să unim M , pentru a obține o paralelă la AC ?

A) cu D ; B) cu E ; C) cu F ; D) cu G .



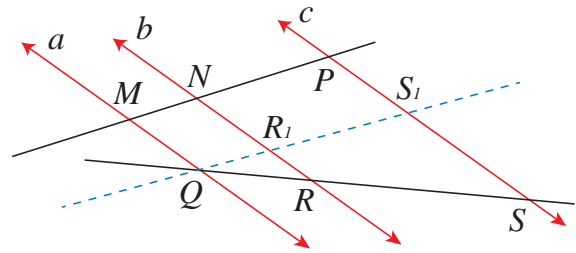
Problemă rezolvată

În figura alăturată, dreptele a, b, c sunt paralele. Știm că: $MN = 2$ cm, $NP = 6$ cm, $RS = 9$ cm. Se cere lungimea segmentului QS .

Rezolvare:

Construim paralela prin Q la dreapta MN care intersectează dreptele b și c în R_1 , respectiv în S_1 . Deoarece MQR_1N și NR_1S_1P sunt paralelograme, avem: $QR_1 = 2$ cm și $R_1S_1 = 6$ cm.

Aplicăm Teorema lui Thales în triunghiul QSS_1 , în care $RR_1 \parallel SS_1$ și obținem: $\frac{QR_1}{R_1S_1} = \frac{QR}{RS}$, deci $\frac{2}{6} = \frac{QR}{9}$. Deducem $QR = 3$ cm, deci $QS = 12$ cm.

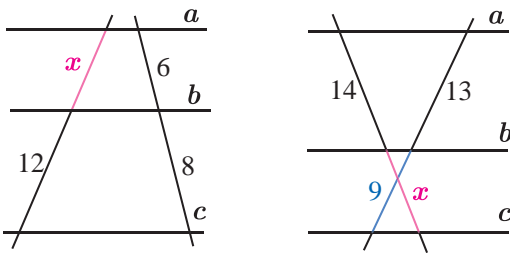


Exprimare orală

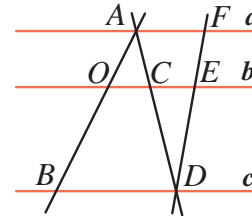
Rezolvă problema, construind paralela prin R la MN . Ce se schimbă în rezolvare?

Probleme propuse

1. Află lungimile notate cu x , știind că dreptele a, b și c sunt paralele.

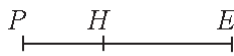


3. În figura următoare, $a \parallel b \parallel c$ și $2 \cdot AO = OB$.



Calculează rapoartele: $\frac{AC}{CD}$; $\frac{EF}{ED}$; $\frac{AC}{AD}$; $\frac{DE}{DF}$.

2. Punctul H de pe segmentul PE este ales astfel încât $\frac{PH}{HE} = \frac{3}{5}$.

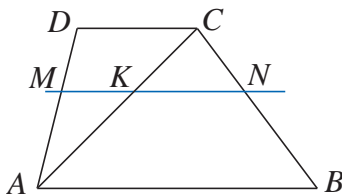


Calculează: a) $\frac{PH}{PE}$; b) $\frac{HE}{PE}$; c) $\frac{HE}{PH}$; d) $\frac{EP}{HP}$.

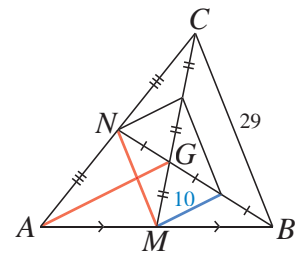
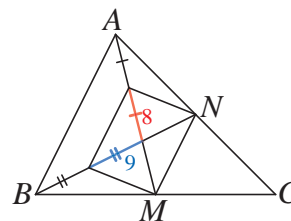
4. Desenează un segment cu lungimea de 12 cm. Construiște un punct care împarte acest segment în raportul $\frac{5}{7}$, folosind:

- a) măsurarea cu rigla;
b) teorema lui Thales.

5. Scrie un șir de rapoarte egale știind că, în figura de mai jos, $AB \parallel MN \parallel CD$.



7. Observă figura din dreapta, apoi calculează lungimile segmentelor MN și AG . Datele sunt în milimetri.



6. Demonstrează că, în orice triunghi, punctul de intersecție a medianelor împarte fiecare mediană în raportul 1 : 2.

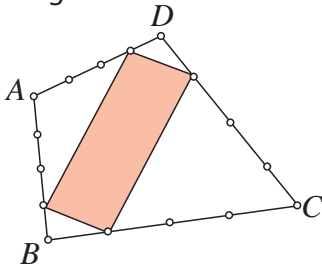
8. Calculează lungimile medianelor AM și BN în triunghiul din stânga. Datele sunt în milimetri.



9. În patrulaterul $ABCD$, prin punctul E de pe diagonala AC construim $EG \parallel AB$ și $EF \parallel CD$ ($F \in AD$ și $G \in BC$).

Arată că $\frac{AF}{FD} = \frac{BG}{CG}$.

10. Fiecare dintre laturile patrulaterului $ABCD$, din imaginea de mai jos, a fost împărțită în câte 4 segmente congruente, prin punctele marcate pe figură.



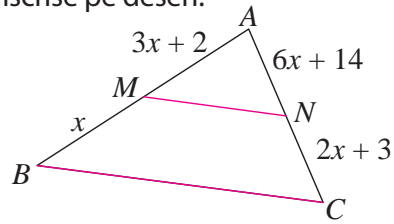
a) Demonstrează că patrulaterul colorat, determinat de patru dintre punctele de diviziune, este un paralelogram.

b) Identifică alte 3 paralelograme determinate de punctele de diviziune din figură.

11. În trapezul $ABCD$, cu bazele AB și CD , notăm cu P intersecția diagonalelor și cu T intersecția laturilor neoparalele.

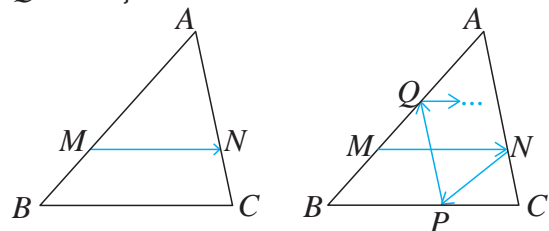
Arată că: $\frac{AP}{PB} = \frac{CP}{DP}$ și $TA \cdot TC = TB \cdot TD$.

12. În figura următoare, $MN \parallel BC$. Calculează AB și AC utilizând informațiile înscrise pe desen.



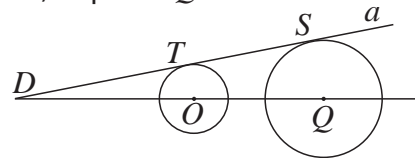
13. În triunghiul ABC , alegem punctul M pe latura AB și construim $MN \parallel BC$, $N \in AC$.

Construim apoi $NP \parallel AB$, $P \in BC$, $PQ \parallel AC$, $Q \in AB$ și continuăm la fel.



Demonstrează că, după câțiva pași, ajungem din nou în punctul M .

14. Dreapta a este tangentă în T și S la cercurile de centre O , respectiv Q .



Arată că $\frac{DT}{DS} = \frac{DO}{DQ}$.

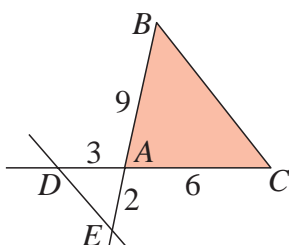


15. În triunghiul ABC , punctul D este ales pe latura AB astfel ca $AD = 2 \cdot DB$. Construim $DE \parallel BC$, $E \in AC$ și $DF \parallel BE$, $F \in AC$. Calculează raportul segmentelor AF și AC .

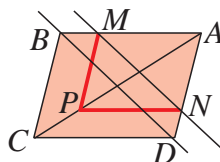
Alege și rezolvă în 5 minute!



Adevărat sau fals? Justifică răspunsul!
În figura următoare, $DE \parallel BC$.



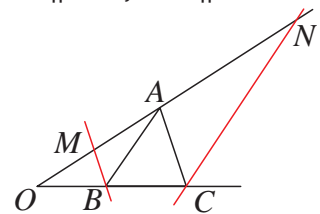
În figura următoare, $ABCD$ este paralelogram, $P \in AC$, $PM \parallel AD$ și $PN \parallel AB$.



Arată că $MN \parallel BD$.

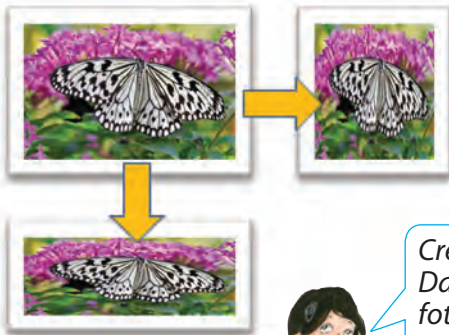


Pe figura următoare, $MB \parallel AC$ și $NC \parallel AB$.



Arată că $OA^2 = OM \cdot ON$.

O situație-problemă



Ema a creat un album electronic cu fotografii din natură. Inițial, ea a modificat doar lungimea sau lățimea unor fotografii.

Imaginile tale sunt deformatе, nu mai seamănă cu originalul!



Cred că am înțeles ce trebuie să fac! Dacă măresc proporțional dimensiunile fotografiei inițiale, obțin imagini asemenea. De exemplu, imaginea alăturată a fost obținută măbind lungimea și lățimea o dată și jumătate!

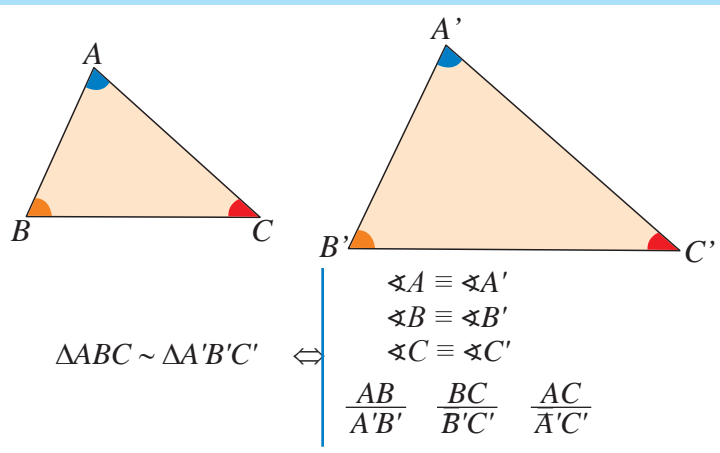


Vrem să știm!

Ce sunt figurile cu laturi proporționale? Care sunt condițiile minim necesare pentru a obține triunghiuri asemenea?

Definiție

Două triunghiuri se numesc **asemenea** dacă au unghiurile două câte două congruente și laturile respectiv proporționale.



Am înțeles! În problema Emei, erau toate unghiurile drepte, dar mai trebuia să avem și laturile proporționale!



Da, un dreptunghi este format din două triunghiuri congruente!

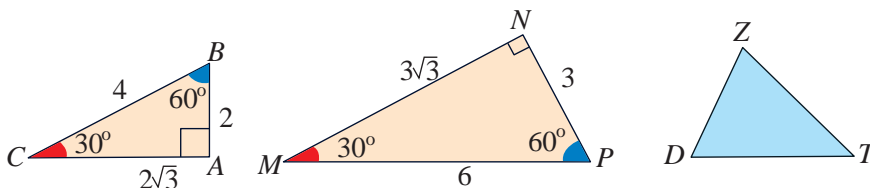


Valoarea comună a raportului laturilor se numește **raport de asemănare**.

Atunci când scriem rapoartele de asemănare, laturile care apar la numărător și la numitor trebuie să fie cele opuse unor unghiuri congruente! Arată că această condiție este îndeplinită pentru triunghiurile de mai sus.

Gândim critic și constructiv!

Exemplu: Triunghiurile ABC și NPM de mai jos sunt asemenea, deoarece au unghiurile respectiv, congruente și laturile proporționale, cu (raportul de asemănare este $\frac{2}{3}$), dar triunghiurile ABC și DZT nu pot fi asemenea (pentru că Δ DZT nu este dreptunghic!).



Evaluăm nivelul de bază

Un triunghi are laturile de 4 cm, 6 cm și 8 cm. Un alt triunghi este asemenea cu primul, raportul de asemănare fiind $\frac{2}{5}$. Ce lungimi au laturile celui de-al doilea triunghi?

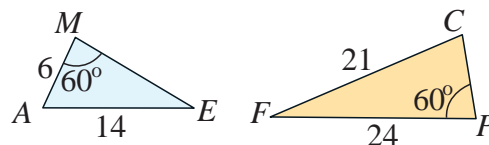
Problemă rezolvată

Se știe că triunghiurile din figura alăturată sunt asemenea. Folosește datele din figură pentru a calcula lungimile laturilor ME și CP .

Rezolvare:

Deoarece $\triangle AME \cong \triangle CPF$, laturii AE îi corespunde CF prin asemănare. Deducem că: $\frac{AE}{CF} = \frac{ME}{PF} = \frac{AM}{CP}$.

Rezultă: $ME = 16$, $CP = 9$.



Probleme propuse

1. Folosește instrumente geometrice și desenează două triunghiuri dreptunghice isoscele. Sunt aceste triunghiuri asemenea? Verifică prin măsurare, apoi prin calcul.

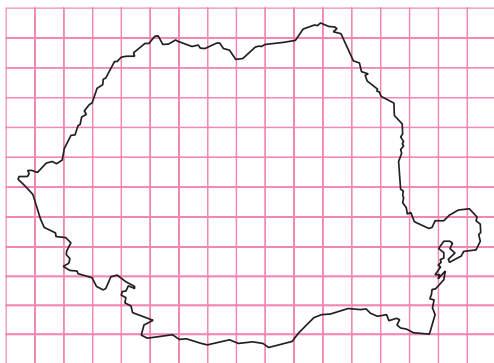


2. Două triunghiuri isoscele sunt asemenea. Dacă unul dintre ele are unghiul de la vârf de 40° , ce măsură au unghiurile de la baza celui alt triunghi?

3. Membrii cercului de aeromodele au realizat macheta unui planor: aceasta este asemenea cu un planor „adevărat”. Știind că macheta are lungimea de 7,8 cm și că s-a făcut construcția la scara 1 : 120, care este lungimea planorului original?

4. Macheta unei camere este construită la scara 1 : 15. Ce dimensiuni vor avea în machetă:
a) un pat cu dimensiunile 210 cm pe 75 cm;
b) un dulap cu dimensiunile 1,2 m \times 2,1 m \times 0,9 m?

5. Harta României din imagine a fost construită pe o rețea de pătrate cu latura de 0,5 cm.



Explică o modalitate de a redesena harta, la o scară de 3 ori mai mare.

6. Este oare adevărat că orice două romburi sunt asemenea? Dar două paralelograme? Dar două pătrate? De ce?

7. Geo crede că orice două triunghiuri echilaterale sunt asemenea. Are dreptate? Justifică răspunsul.

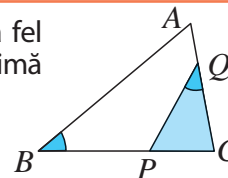
8. Adevărat sau fals?

a) Orice două triunghiuri congruente sunt asemenea.

b) Orice două triunghiuri asemenea sunt congruente.

9. Vlad dorește să facă o excursie cu mașina la Brașov și are o hartă la scara 1 : 500000. Știind că distanța, pe hartă, dintre orașul lui Vlad și Brașov este de 5 cm, câți kilometri are de parcurs Vlad?

10. Triunghiurile ABC și PQC din figura alăturată sunt asemenea, unghiurile la fel marcate fiind congruente. Scrie șirul de rapoarte egale prin care se exprimă proporționalitatea laturilor acestor triunghiuri.



Alege și rezolvă în 5 minute!

A Un triunghi dreptunghic poate fi asemenea cu un triunghi echilateral? De ce?

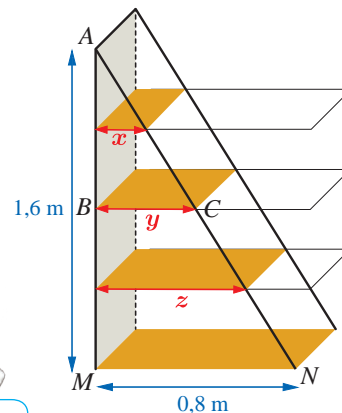
B Ce poți spune despre două triunghiuri asemenea, în care raportul de asemănare este egal cu 1?

C Desenează pe caietul tău două triunghiuri asemenea, cu raportul de asemănare 1 : 2.

O situație-problemă

Tatăl lui Geo are un mobilier de forma din imaginea alăturată, pe care vrea să-l transforme în bibliotecă. El intenționează să adauge 4 rafturi amplasate la distanțe egale, de lățimi din ce în ce mai mici.

Știind că lățimea plăcii de jos este de 0,8 m, la ce lățime ar trebui să taie celelalte plăci?



Am observat că segmentul de lungime x este linie mijlocie în triunghiul ABC ...

Iar segmentul de lungime y este linie mijlocie în triunghiul AMN ...



Și segmentul de lungime z este linie mijlocie în trapezul $BCNM$. Deci putem afla lățimile din aproape în aproape... Există oare o metodă directă de calcul?

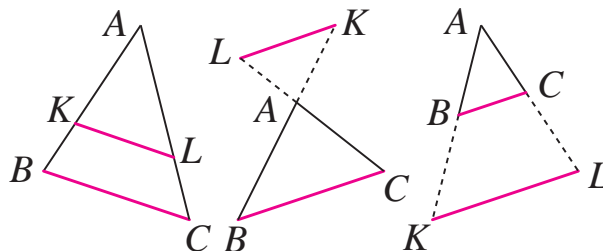
Vrem să știm!

Ce relație există între triunghiurile formate ducând o paralelă la o latură a unui triunghi dat?

Să formulăm!

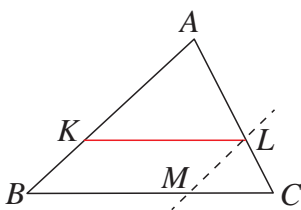
Teorema fundamentală a asemănării

Fiind dat un triunghi, o paralelă la una din laturile triunghiului formează cu celelalte două laturi, sau cu prelungirile lor, un triunghi asemenea cu triunghiul dat.



$$\Delta ABC \text{ oarecare } KL \parallel BC \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta AKL$$

Demonstrație:



Deoarece $KL \parallel BC$, unghiurile AKL și ABC , respectiv unghiurile ALK și ACB sunt congruente (corespondente). Deci ΔABC și ΔAKL au unghiurile două câte două congruente.

Aplicăm Teorema lui Thales pentru triunghiul ABC și dreapta KL și obținem:

$$\frac{AB}{AK} = \frac{AC}{AL} \quad (1)$$

Construim $LM \parallel AB$, $M \in BC$. Patrulaterul $KLMB$ este un paralelogram, deoarece laturile opuse sunt două câte două paralele. De aceea, $KL \equiv BM$.

Aplicăm Teorema lui Thales pentru triunghiul CAB și dreapta LM și obținem: $\frac{AC}{AL} = \frac{BC}{BM} = \frac{BC}{KL}$ (2)

Din (1) și (2) rezultă că $\frac{AB}{AK} = \frac{AC}{AL} = \frac{BC}{KL}$.

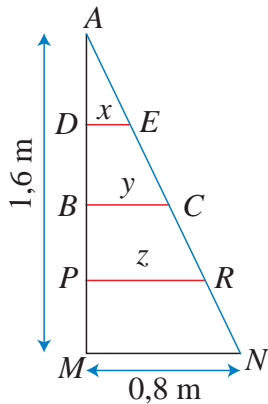
În concluzie: triunghiurile ABC și AKL au unghiurile două câte două congruente și laturile respectiv proporționale. Ca urmare, aceste triunghiuri sunt triunghiuri asemenea.



Încearcă să refaci demonstrația teoremei, construind paralela prin K la AC .

Gândim critic și constructiv!

Rezolvăm situația-problemă!



Aplicăm Teorema fundamentală a asemănării pentru a calcula lățimea x a celui mai mic dintre rafturi.

Triunghiurile ADE și AMN sunt asemenea, deoarece $DE \parallel MN$ (rafturile sunt orizontale). Deducem că:

$$\frac{AD}{AM} = \frac{AE}{AN} = \frac{DE}{MN}$$

Știm că $AD = \frac{1}{4} AM$, deoarece rafturile sunt montate la distanțe egale.

Ca urmare, $AD = 0,4$ m. De aceea: $\frac{0,4}{1,6} = \frac{x}{0,8}$.

Obținem $DE = x = 0,2$ m.

Continuă rezolvarea pentru a afla y și z !

Aplicăm!

Ce înălțime are muntele?

Folosind teorema fundamentală a asemănării putem calcula înălțimea muntelui din imagine.

PP' și MM' sunt drepte verticale, deci $PP' \parallel MM'$.

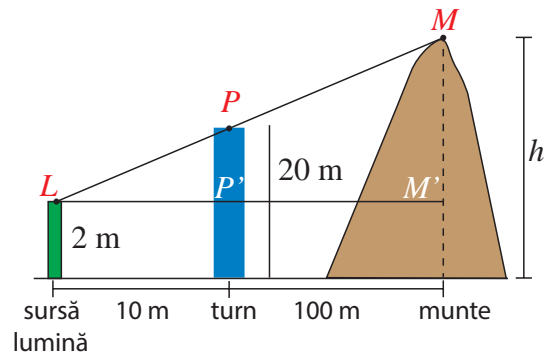
Aplicând teorema fundamentală a asemănării, deducem că:

$$\Delta LPP' \sim \Delta LMM'$$

$$\text{Deci: } \frac{LP}{LM} = \frac{LP'}{LM'} = \frac{PP'}{MM'}$$

Observăm că: $PP' = 18$ m, $LP = 10$ m, $LM = 110$ m.

Obținem $MM' = 198$ m.

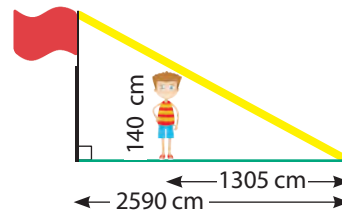


Continuă rezolvarea, pentru a afla înălțimea h a muntelui. Propune o problemă similară, în care să determini înălțimea unei clădiri foarte înalte.

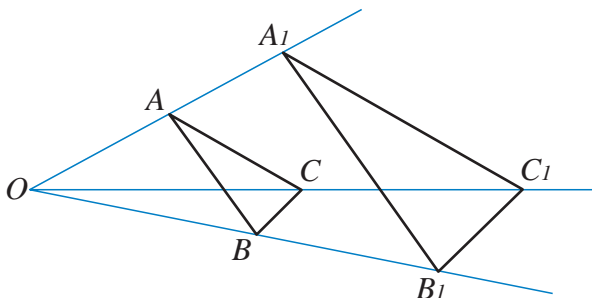
Gândim critic și constructiv!

Evaluăm nivelul de bază

Folosește datele din figură pentru a calcula înălțimea suportului de steag.



Extindem ...



Teorema fundamentală a asemănării ne arată cum putem construi un triunghi asemenea cu triunghiul ABC .

Pentru aceasta:

- Alegem un punct O și construim dreptele OA , OB , OC .
- Fixăm punctul $A_1 \in OA$ și construim $A_1B_1 \parallel AB$, $B_1 \in OB$ și $B_1C_1 \parallel BC$, $C_1 \in OC$.
- Triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt asemenea.

De ce crezi că sunt asemenea cele două triunghiuri? Cum ai putea folosi acest procedeu pentru a construi un patrulater asemenea cu un patrulater dat?

Gândim critic și constructiv!

Problemă rezolvată

În trapezul $ABCD$ (în care $AB \parallel CD$), notăm cu E intersecția diagonalelor și cu F intersecția laturilor AD și BC .

Demonstrează că $\frac{FD}{AF} = \frac{CE}{EA}$.

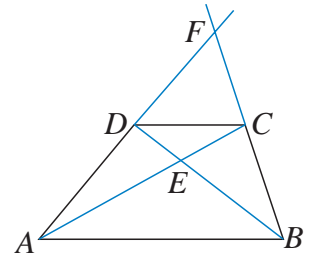
Rezolvare:

Deoarece $AB \parallel CD$, teorema fundamentală a asemănării arată că:

$\triangle DEC \sim \triangle BEA$ și $\triangle FDC \sim \triangle FAB$.

Obținem șirurile de rapoarte egale: $\frac{DC}{AB} = \frac{CE}{EA} = \frac{DE}{EB}$ și $\frac{DC}{AB} = \frac{FD}{FA} = \frac{FC}{FB}$.

Ca urmare: $\frac{CE}{EA} = \frac{DC}{AB} = \frac{FD}{FA}$, adică egalitatea din enunț.

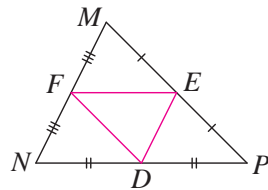


Exprimare orală

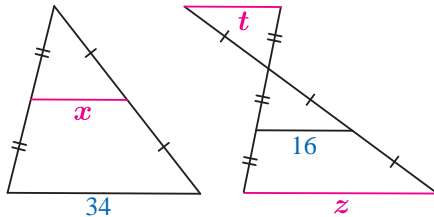
Ce alte egalități de rapoarte mai poți obține în problema rezolvată?

Probleme propuse

1. Numește toate perechile de triunghiuri congruente din figura alăturată.

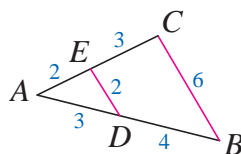


2. Folosind convențiile de desen, calculează lungimile segmentelor notate cu litere. (Lungimile sunt date în milimetri.)



3. În triunghiul ABC , $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm, $BC = 10$ cm. Calculează lungimile laturilor triunghiului MNP , unde M, N, P sunt mijloacele laturilor AB, AC , respectiv BC .

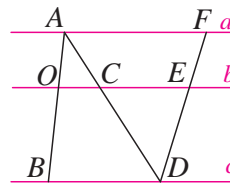
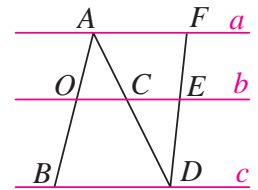
7. Segmente din figura alăturată au lungimile indicate. Este oare $DE \parallel BC$?



8. Dintr-o bucată de hârtie având forma unui triunghi isoscel MNP , Nelu a tăiat trei părți, de-a lungul liniilor mijlocii. Demonstrează că partea rămasă este tot un triunghi isoscel.

4. În figura alăturată, $a \parallel b \parallel c$ și $\frac{AO}{AB} = \frac{2}{5}$.

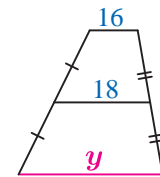
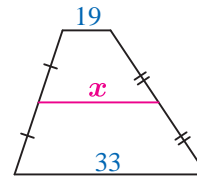
Calculează $\frac{OC}{BD}$ și $\frac{CE}{AF}$.



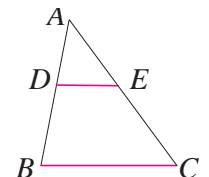
5. În figura din stânga, $a \parallel b \parallel c$ și $2AO = OB$.

Calculează $\frac{OC}{BD}$ și $\frac{CE}{AF}$.

6. Pentru trapezele din imaginea următoare, află lungimile necunoscute (notate cu litere).

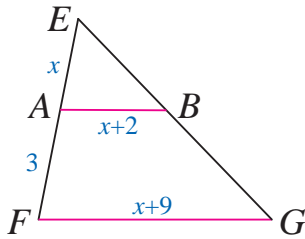


9. În figura alăturată, $DE \parallel BC$. Transcrie tabelul de mai jos și completează datele, știind că lungimile sunt date în centimetri.

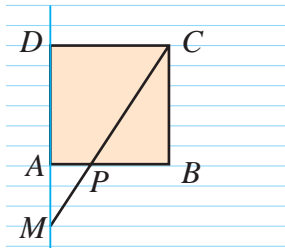


	AD	BD	AE	AC	DE	BC
a)	4	5	6		5	
b)		3	2	5		6
c)	3		6	13	8	
d)	3			6	4	12

- 10.** Știind că, pe figura următoare, $AB \parallel FG$, calculează AB și FG .

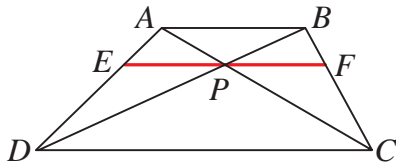


- 11.** Mati a desenat pe caietul său dictando (în care liniile sunt trasate la câte 1 cm unele de altele) pătratul $ABCD$ din figura de mai jos, apoi a unit punctul M de pe dreapta AD cu C .



Dacă P este intersecția dreptelor MC și AB , calculează AP și CP .

- 15.** În trapezul $ABCD$, P este intersecția diagonalelor. Paralela prin P la bazele AB și CD intersectează laturile AD și BC ale trapezului în E și F .

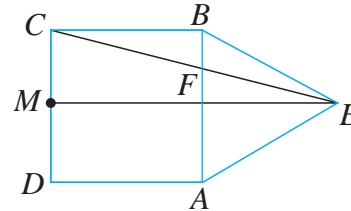


- a) Demonstrează că $EP \equiv PF$.
b) Calculează lungimea segmentului EF , dacă $AB = 4$ cm și $DC = 10$ cm.

- 12.** Prelungirile laturilor neparalele AB și CD ale trapezului $ABCD$ se intersectează în M . Știind că $AB = 3$ cm, $AD = 2$ cm, $CD = 6$ cm, $BC = 8$ cm, calculează perimetrul triunghiului MBC .

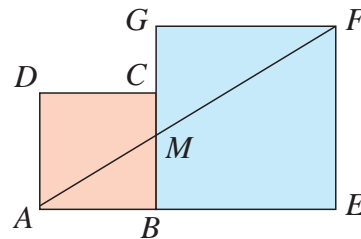
- 13.** Triunghiul ABC are laturile $AB = 9$ cm, $AC = 180$ mm, $BC = 1,5$ dm. Pe latura AB se ia un punct D , astfel încât $AD = 6$ cm. Paralela prin D la BC intersectează latura AC în E . Calculează perimetrul triunghiului ADE . Indică două metode de rezolvare.

- 14.** Pe figura următoare, $ABCD$ este un pătrat, iar ABE este triunghi echilateral. Notăm cu M mijlocul laturii CD și cu F punctul de intersecție între dreptele EC și AB .



- a) Arată că $EM \perp CD$.
b) Arată că $\triangle CDE$ este isoscel.
c) Calculează rapoartele $\frac{EF}{EC}$ și $\frac{AF}{FB}$.

- 16.** În figura următoare, $ABCD$ și $BEFG$ sunt două pătrate, cu laturile de 3 cm, respectiv 5 cm. Dreapta AF intersectează BC în M .



- a) Calculează lungimea segmentului BM .
b) Demonstrează că punctele D , M și E sunt coliniare.

Alege și rezolvă în 5 minute!

A

Un triunghi echilateral are perimetrul de 24 cm. Calculează lungimea unei linii mijlocii a triunghiului.

B

Punctele M și N împart laturile AB și AC ale triunghiului ABC în raportul 3 : 5. Dacă $BC = 24$ cm, calculează MN .

C

Desenează pe caietul tău un triunghi. Folosește doar rigla pentru a desena apoi un triunghi asemenea cu cel dat, având raportul de asemănare 2 : 3.

Să comparăm!

Două triunghiuri sunt **congruente** dacă au *unghiurile* respectiv **congruente** și *laturile* respectiv **congruente**.

Cazurile de congruență ne arată condiții necesare și suficiente pentru ca două triunghiuri să fie congruente:

Două triunghiuri sunt congruente dacă și numai dacă au respectiv congruente:

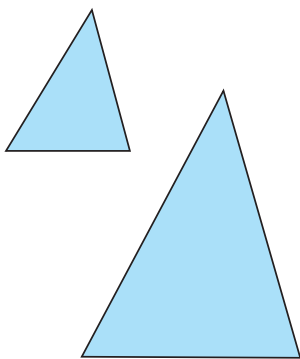
- toate laturile (L.L.L.); *sau*
- două laturi și unghiul dintre ele (L.U.L.); *sau*
- câte o latură și unghiurile alăturate ei (U.L.U.).

Două triunghiuri sunt **asemenea** dacă au *unghiurile* respectiv **congruente** și *laturile* **proporționale**.

Care ar putea fi condițiile necesare și suficiente pentru ca două triunghiuri să fie asemenea?



O situație-problemă



Liza și Mati au desenat pe caietele lor două triunghiuri. Triunghiul desenat de Liza are laturile de 2 cm, 4 cm și 5 cm, iar cel desenat de Mati are laturile de 3 cm, 6 cm și 7,5 cm. Ei cred că aceste două triunghiuri sunt asemenea, deoarece desenele sunt asemănătoare.

Cum ar putea afla Liza și Mati dacă au dreptate?

Eu cred că putem verifica prin măsurare dacă unghiurile sunt două câte două congruente. Verificăm și dacă laturile sunt respectiv proporționale. Atunci cele două triunghiuri sunt asemenea!



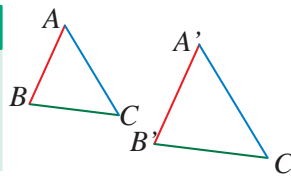
Vrem să știm!

Este suficient ca laturile a două triunghiuri să fie respectiv proporționale pentru ca triunghiurile să fie asemenea?

Să formulăm!

Criteriul de asemănare *latură – latură – latură* (L.L.L.)

Dacă laturile unui triunghi sunt proporționale cu laturile unui alt triunghi, atunci cele două triunghiuri sunt asemenea.



Dacă
 $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$
 atunci
 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Ce poți spune despre două triunghiuri, dacă rapoartele laturilor lor sunt egale cu 1?

Gândim critic și constructiv!

Rezolvăm situația-problemă!

Pentru triunghiurile construite de Liza și Mati verificăm egalitățile: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{5}{7,5}$.

Ca urmare, cele două triunghiuri sunt asemenea, conform cazului L.L.L.

Evaluăm nivelul de bază

În care dintre următoarele cazuri triunghiurile sunt asemenea (toate lungimile sunt exprimate în metri)?

- triunghiul cu laturile 4, 6, 8 și triunghiul cu laturile 9, 6, 12;
- triunghiul cu laturile 4, 6, 8 și triunghiul cu laturile 8, 10, 12.



Problemă rezolvată

Ce valoare ar trebui să aibă numărul pozitiv x din figura alăturată, pentru ca triunghiurile să fie asemenea?

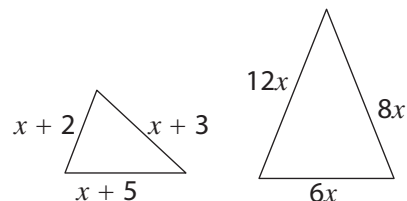
Rezolvare:

Condiția necesară și suficientă pentru asemănarea acestor triunghiuri este ca laturile corespunzătoare să fie proporționale. Dar cum stabilim corespondența laturilor?

În primul triunghi, latura cea mai mare are lungimea $x + 5$, iar latura cea mai mică are lungimea $x + 2$.

În al doilea triunghi, latura cea mai mare are lungimea $12x$, iar latura cea mai mică are lungimea $6x$.

De aceea, condiția devine: $\frac{x+2}{6x} = \frac{x+3}{8x} = \frac{x+5}{12x}$, de unde $x = 1$.

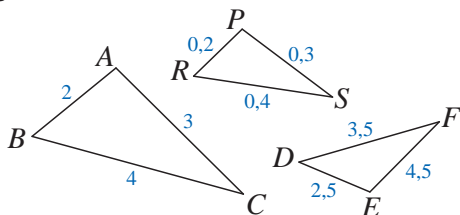


Exprimare orală

Explică modul în care se obține valoarea numărului x în rezolvarea anterioară.

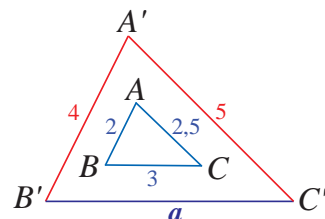
Probleme propuse

1. Precizează care dintre triunghiurile din figura următoare sunt asemenea.

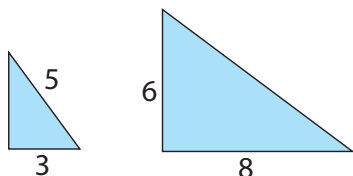


2. Demonstrează că orice două triunghiuri echilaterale sunt asemenea.

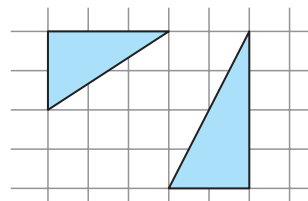
3. Află lungimea notată cu a , pentru ca triunghiurile alăturate din figură să fie asemenea.



4. Demonstrează că triunghiurile dreptunghice din imaginea de mai jos sunt asemenea. (Dimensiunile laturilor sunt în cm.)

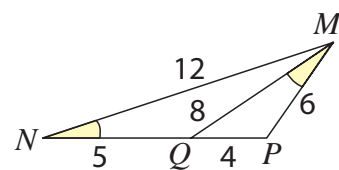


5. Verifică dacă triunghiurile colorate de Geo pe caietul său de matematică sunt asemenea.



6. Justifică de ce, pe orice hartă, indiferent de mărimea ei, unghiul determinat de punctele prin care se reprezintă trei localități date A, B, C are aceeași măsură.

7. Observă figura, apoi demonstrează că unghiurile MNQ și PMQ sunt congruente.



8. Romburile $ABCD$ și $MNPQ$ au diagonalele proporționale. Demonstrează că unghiurile primului romb sunt respectiv congruente cu unghiurile celui de-al doilea romb.

Alege și rezolvă în 5 minute!

A În care dintre următoarele cazuri obținem un triunghi asemenea cu triunghiul de laturi 4, 5, 5, știind că datele sunt exprimate în cm?

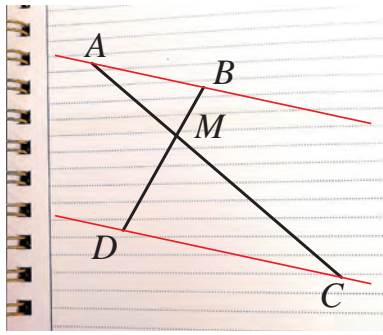
- A) 5, 5, 6 B) 12, 15, 12 C) 20, 16, 20

B Adevărat sau fals? Două triunghiuri sunt asemenea dacă și numai dacă laturile lor sunt două câte două paralele.

C Adevărat sau fals? Triunghiurile isoscele ABC și MNP (cu $AB \equiv AC$ și $MN \equiv MP$) sunt asemenea dacă și numai dacă $\frac{AB}{BC} = \frac{MN}{MP}$.

Criterii de asemănare a triunghiurilor: criteriul *latură – unghi – latură* (L.U.L.)

O situație-problemă



Geo a desenat, pe caietul său cu liniatură dictando, segmentele AC și BD din figura alăturată. El crede că dreptele AB și CD sunt paralele, dar nu știe cum să verifice această proprietate.



Am putea măsura unghiurile formate de aceste drepte cu AC !

Nu cred că e suficient, măsurătorile nu au o precizie prea mare!



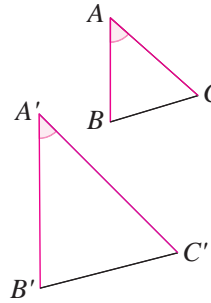
Vrem să știm!

Este suficient ca două triunghiuri să aibă o pereche de laturi proporționale și unghiurile dintre ele congruente pentru ca triunghiurile să fie asemenea?

Să formulăm!

Criteriul de asemănare *latură – unghi – latură* (L.U.L.)

Dacă două laturi ale unui triunghi sunt proporționale cu două laturi ale unui alt triunghi, iar unghiurile determinate de aceste laturi sunt congruente, atunci cele două triunghiuri sunt asemenea.



Dacă

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$$

și $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$,

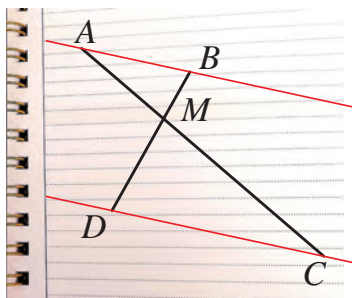
atunci

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

Imaginează-ți că deplasezi triunghiurile astfel ca vârful A și A' să coincidă, iar punctul B să ajungă pe latura $A'B'$. Ce poți spune despre dreptele BC și $B'C'$, după deplasare?

Gândim critic și constructiv!

Rezolvăm situația-problemă!



Deoarece liniile caietului reprezintă paralele echidistante, care împart orice segment în părți congruente, vedem că $MC = 2MA$ și $MD = 2MB$ (Numărăm pe câte „intervale” se întinde fiecare dintre aceste segmente!).

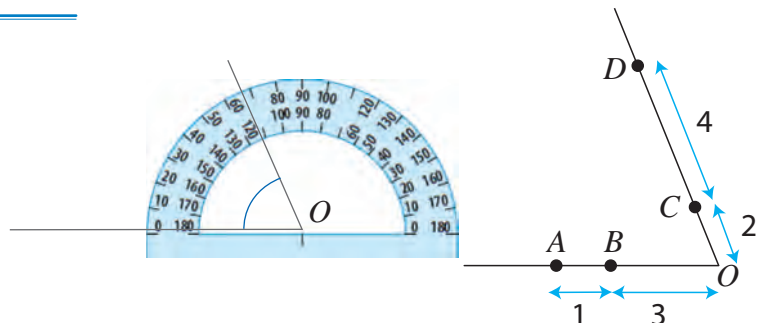
$$\text{Ca urmare: } \frac{AM}{MC} = \frac{BM}{MD} = \frac{1}{2}.$$

În plus, $\sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle CMD$ (sunt opuse la vârf).

Deducem că $\triangle AMB \sim \triangle CMD$ (L.U.L.), deci $\sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle MCD$. Obținem $AB \parallel CD$, pentru că formează cu secanta AC unghiuri alterne-interne congruente.

Evaluăm nivelul de bază

Ana a desenat un unghi folosind raportorul. Pe laturile acestuia a marcat 4 puncte, A, B, C, D ca în figura alăturată. Ea susține că, unind A cu C și B cu D , se formează două triunghiuri asemenea. Are dreptate?



Problemă rezolvată

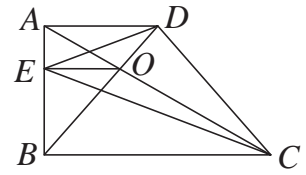
În trapezul dreptunghic $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $\sphericalangle A = 90^\circ$), notăm cu O intersecția diagonalelor și construim $OE \parallel AD$, $E \in AB$.

Arată că $\triangle ADE \sim \triangle BCE$.

Rezolvare:

Aplicăm teorema lui Thales în triunghiul ABC (în care $OE \parallel BC$) și teorema fundamentală a asemănării în triunghiul OBC (în care $AD \parallel BC$) și obținem: $\frac{AE}{EB} = \frac{AO}{OC} = \frac{AD}{BC}$.

Ca urmare, $\triangle ADE \sim \triangle BCE$ (cazul L.U.L.).

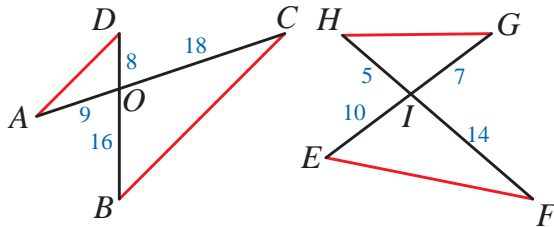


Exprimare orală

Identifică perechile de unghiuri congruente din triunghiurile ADE și BCE . Arată apoi că EO este bisectoarea unghiului DEC .

Probleme propuse

1. Identifică perechile de triunghiuri asemenea în imaginile următoare. Justifică de ce sunt asemenea.



2. Care dintre triunghiurile de mai jos este asemenea cu triunghiul alăturat?
-
- a) b) c)

3. Pe caietul tău cu pătrățele, desenează:

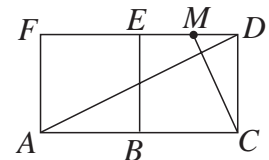
- a) două dreptunghiuri asemenea;
b) două paralelograme asemenea;
c) două pentagoane asemenea.

Gândește-te cum poți folosi criteriul L.U.L.

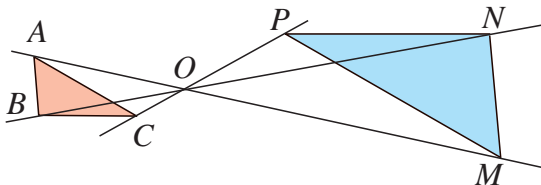
4. Pe figura de mai jos, $ABEF$ și $BCDE$ sunt pătrate, iar M este mijlocul laturii DE .

Arată că:

- a) $\triangle ACD \sim \triangle CDM$;
b) $AD \perp CM$.

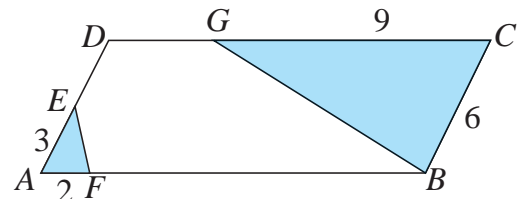


5. Ana a desenat pe caiet triunghiul ABC . A trasat apoi dreptele AO , BO și CO , pe care a marcat punctele M , N , P ca în figură, astfel ca $MO = 2 \cdot AO$, $NO = 2 \cdot BO$ și $PO = 2 \cdot CO$.



- a) Arată că $\triangle AOB \sim \triangle MON$.
b) Demonstrează că $\triangle ABC \sim \triangle MNP$.

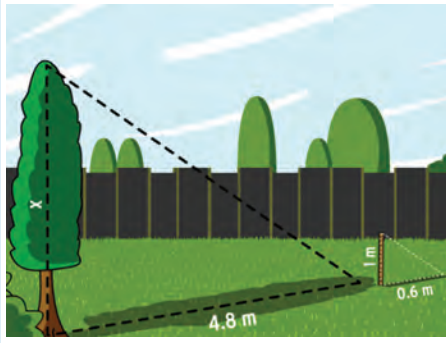
6. În figura următoare, $ABCD$ este un paralelogram, iar segmentele AE , AF , BC și CG au dimensiunile precizate.



Demonstrează că $\triangle AFE \sim \triangle CBG$.

7. Considerăm triunghiurile asemenea ABC și DEF . Fie M și N mijloacele laturilor BC , respectiv EF . Demonstrează că triunghiurile ABM și DEN sunt asemenea.

O situație-problemă



Tic ar vrea să calculeze înălțimea unui copac. El a citit că ar putea face acest lucru într-o zi însorită, cu ajutorul unui băț de lemn: trebuie să măsoare umbra copacului și umbra bățului și să utilizeze cumva aceste date.

Cred că bățul trebuie așezat vertical: altfel, umbra lui devine mai lungă...



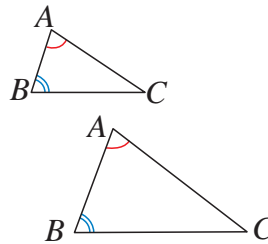
Vrem să știm!

Este suficient ca două triunghiuri să aibă câte două unghiuri respectiv congruente pentru ca triunghiurile să fie asemenea?

Să formulăm!

Criteriul de asemănare *unghi – unghi* (U.U.)

Dacă două unghiuri ale unui triunghi sunt respectiv congruente cu două unghiuri ale unui alt triunghi, atunci cele două triunghiuri sunt asemenea.



Dacă

$$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$$

$$\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B',$$

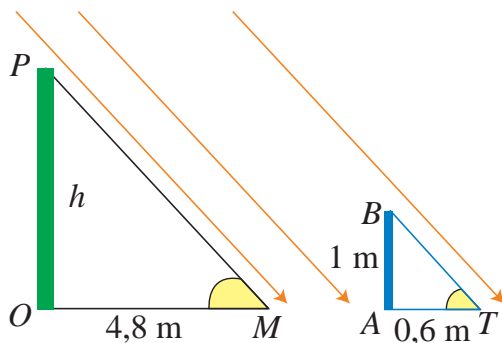
atunci

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

De ce crezi că este nevoie de numai două elemente ale triunghiurilor pentru acest criteriu de asemănare, în timp ce la celelalte criterii este nevoie de 3 elemente (laturi și/ sau unghiuri)?

Gândim critic și constructiv!

Rezolvăm situația-problemă!



Umbrele diverselor obiecte, într-o zi însorită, se datorează razelor Soarelui. Putem considera razele de Soare ca pe niște drepte paralele: ca urmare, în triunghiurile dreptunghice POM și BAT (formate de copacul PO și umbra sa OM , respectiv de bățul BA și umbra sa AT), unghiurile PMO și BTA sunt congruente. Deducem că $\triangle POM \sim \triangle BAT$ (cazul U.U.), deci

$$\frac{4,8}{0,6} = \frac{h}{1}.$$

Obținem $h = 8$ m.

Exprimare orală

Explică modul în care a fost formată proporția de mai sus.

Evaluăm nivelul de bază



Un triunghi isoscel are unghiurile de la bază de câte 40° . Un alt triunghi isoscel are un unghi de 100° . Arată că aceste triunghiuri sunt asemenea.

Problemă rezolvată

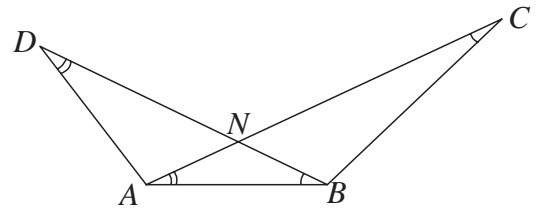
Observă notațiile din figura alăturată și arată că AB este medie geometrică între AD și BC .

Rezolvare:

$\triangle ABD \sim \triangle BCA$ (cazul U.U.); ca urmare: $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{BD}{AC}$.

Considerăm doar primele două rapoarte și obținem:

$AB^2 = AD \cdot BC$, sau $AB = \sqrt{AD \cdot BC}$, ceea ce înseamnă că AB este medie geometrică între AD și BC .

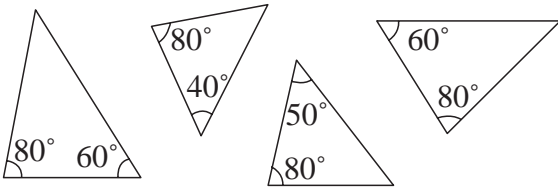


Exprimare orală

Identifică alte două triunghiuri asemenea pe această figură și explică de ce sunt asemenea.

Probleme propuse

1. Câte perechi de triunghiuri asemenea există printre cele 4 triunghiuri de mai jos?



2. a) În triunghiul ascuțitunghic ABC , construim înălțimile BD și CE ($D \in AC$, $E \in AB$). Demonstrează că $\triangle ABD \sim \triangle ACE$.
b) Rămâne problema adevărată, dacă ABC este triunghi obtuzunghic?
3. Justifică următorul criteriu: două triunghiuri dreptunghice sunt asemenea dacă și numai dacă un unghi ascuțit din primul triunghi este congruent cu un unghi din al doilea triunghi.



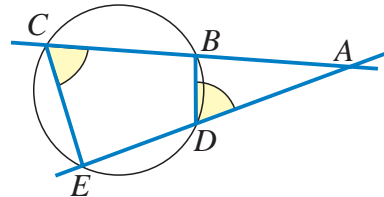
4. În triunghiul isoscel ABC ($AB \equiv AC$), considerăm punctul D pe BC și construim $DE \perp AB$ și $DF \perp AC$.

Arată că $\triangle DEB \sim \triangle DFC$.

5. În triunghiul ABC , înălțimile AD și BE se intersectează în F . Arată că:

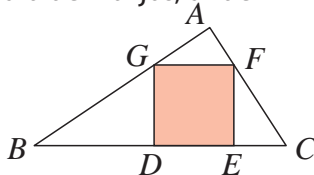
- a) $\triangle AFE \sim \triangle BFD$;
b) $\triangle AFE \sim \triangle ACD$;
c) $FA \cdot FD = FB \cdot FE$.

6. Prin punctul A au fost duse secantele BC și DE la cerc, ca în figura de mai jos.



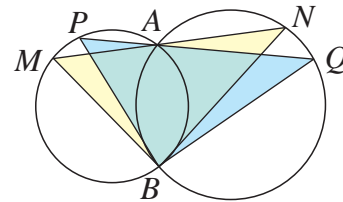
- a) Arată că $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle BCE$.
b) Demonstrează că $\triangle ABD \sim \triangle AEC$.
c) Justifică egalitatea: $AB \cdot AC = AD \cdot AE$.

7. Un tinichigiu a decupat un pătrat $DEFG$ dintr-o bucată de tablă triunghiulară ABC , ca în figura de mai jos, unde $\sphericalangle A = 90^\circ$.



- Arată că: a) $\frac{BD}{EF} = \frac{BG}{CF}$; b) $\triangle AGD \sim \triangle GFC$;
c) $\frac{AD}{CG} = \frac{DG}{CF}$.

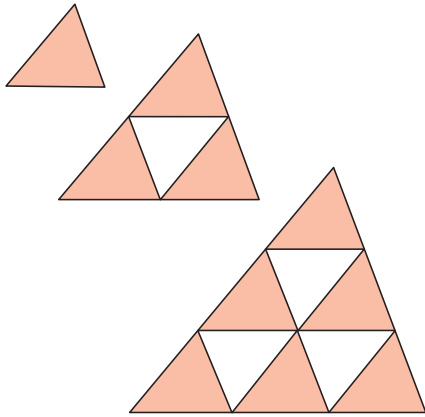
8. În imagine apar două cercuri secante în A și B . Două drepte ce trec prin A mai intersectează cercurile în M și N , respectiv în P și Q .



Demonstrează că triunghiurile BMN și BPQ sunt asemenea.

9. Demonstrează că în orice trapez, punctul de intersecție a diagonalelor, punctul de intersecție a laturilor neparalele și mijloacele bazelor sunt patru puncte coliniare.

O situație-problemă



Ema a folosit mai multe piese identice, cu formă de triunghi, din care a obținut primii 3 termeni ai unui șir de figuri geometrice, ca în imagine.

Ema și-a notat, pentru fiecare figură, numărul de piese folosite și perimetrul acestuia. Care sunt oare numerele ce vor apărea în tabel pentru a zecea figură?

Figura	1	2	3
Nr. de piese	1	4	9
Perimetrul	7	14	21

Toate figurile construite de Ema sunt asemenea cu piesa de bază. Ne ajută oare această observație?



Vrem să știm!

Cum se transferă proporționalitatea laturilor la perimetre și arii în cazul triunghiurilor asemenea?

Să observăm!

Ariile figurilor construite de Ema sunt proporționale cu numărul de piese folosite. De fiecare dată, numărul de piese a fost un pătrat perfect. Perimetrele figurilor construite de Ema sunt un multiplu al perimetrului piesei de bază.

Teoremă Raportul perimetrelor a două figuri asemenea este egal cu raportul lor de asemănare. Raportul ariilor a două figuri asemenea este egal cu pătratul raportului lor de asemănare.

Demonstrație:

Vom argumenta teorema pentru cazul triunghiurilor asemenea ABC și MNP .

Deoarece $\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} = \frac{BC}{NP} = r$ este raportul de asemănare, folosind

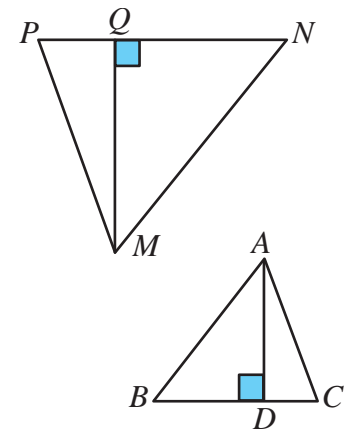
proprietatea fundamentală a șirului de rapoarte egale, avem:

$$\frac{Perim.(ABC)}{Perim.(MNP)} = \frac{AB+AC+BC}{MN+MP+NP} = r$$

Construim înălțimile AD și MQ în cele două triunghiuri; ABD și MNQ sunt triunghiuri asemenea (cazul U.U.), iar raportul lor de asemănare este tot r .

Atunci:

$$\frac{Aria(ABC)}{Aria(MNP)} = \frac{BC \cdot AD}{NP \cdot MQ} = r^2.$$



Explică modul în care au fost formate proporțiile de mai sus.

Gândim critic și constructiv!

Rezolvăm situația-problemă!

A zecea figură este un triunghi asemenea cu triunghiul inițial, raportul de asemănare fiind 10.

De aceea, raportul perimetrelor este 10, iar raportul ariilor este 100. Așadar, a zecea figură este formată din 100 de piese și are perimetrul egal cu 70.

Evaluăm nivelul de bază

Cât este raportul ariilor a două triunghiuri asemenea, pentru care raportul de asemănare este 3?

Rezolvări comparative

Elevii au avut de calculat raportul ariilor a două triunghiuri desenate pe o foaie cu pătrățele.

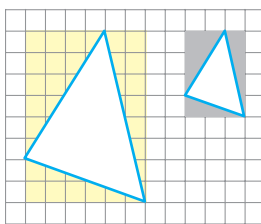
Mati:

Am calculat aria fiecărui triunghi, prin încadrare în dreptunghiuri.

Folosind triunghiurile colorate și dreptunghiurile

determinate de acestea, obținem că ariile triunghiurilor date sunt de $22u^2$, respectiv $\frac{11}{2}u^2$

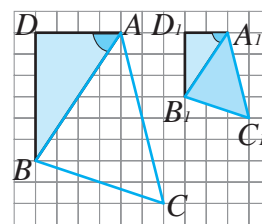
(unitatea u este lungimea laturii pătrățelului din rețea). Raportul ariilor este 4.



Ana:

Am observat că triunghiurile date au laturile respectiv paralele, deci sunt asemenea.

Triunghiurile ADB și $A_1D_1B_1$ sunt asemenea (cazul L.U.L.), deci $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle D_1A_1B_1$, ceea ce arată că $AB \parallel A_1B_1$. Analog, obținem că $AC \parallel A_1C_1$, deci $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (cazul L.U.L.). Raportul ariilor este pătratul raportului de asemănare, adică 2^2 .



Exprimare orală

Care rezolvare ți se pare mai rapidă? Dar mai interesantă? Justifică răspunsurile!

Probleme propuse

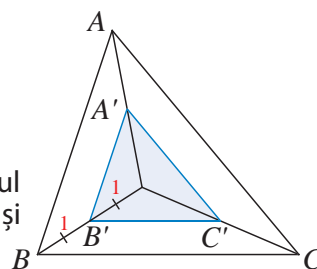
1. Află ariile a două triunghiuri asemenea care au raportul de asemănare $\frac{2}{3}$ și suma ariilor de 39 cm^2 .

2. Suma perimetrelor a două triunghiuri asemenea este de 15 cm , iar raportul lor de asemănare este $2 : 3$. Cât este perimetrul fiecărui triunghi?

4. Perimetrele a două triunghiuri asemenea sunt de 15 m , respectiv 25 m , iar aria primului triunghi este de 9 m^2 . Cât este aria celui de-al doilea triunghi?

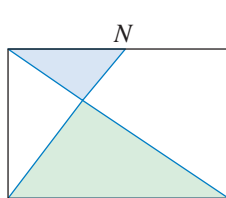


3. În figura alăturată, $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$, $BC \parallel B'C'$. Folosind informația din figură, exprimă raportul perimetrelor, apoi raportul ariilor triunghiurilor ABC și $A'B'C'$.

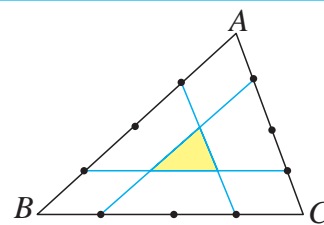


5. Într-o grădină triunghiulară PQR s-a construit un gard GH , prin mijloacele laturilor PR și QR . De câte ori este mai mică aria parcelei GHR decât aria grădinii?

6. În figura alăturată, N este mijlocul uneia dintre laturile dreptunghiului. Cât este raportul ariilor triunghiurilor colorate pe figură? Dar raportul perimetrelor lor?



7. În triunghiul ABC , fiecare latură a fost împărțită în câte 4 părți egale. Calculează raportul dintre aria triunghiului ABC și aria triunghiului colorat pe figură.



8. În trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$), notăm P intersecția diagonalelor și Q intersecția laturilor neoparalele. Demonstrează că $\text{Aria}(PAB) \cdot \text{Aria}(QCD) = \text{Aria}(QAB) \cdot \text{Aria}(PCD)$.

Alege și rezolvă în 5 minute!

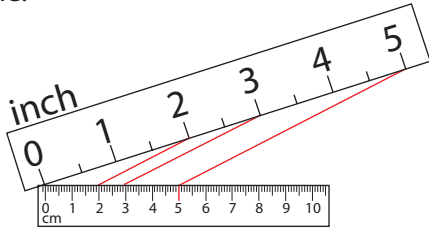
A Triunghiurile alăturate sunt asemenea, cu raportul laturilor 2. Cât este raportul perimetrelor lor?



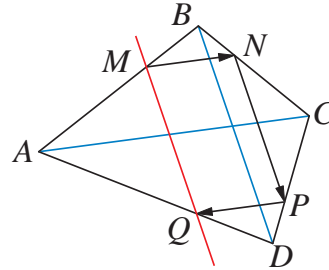
B Triunghiurile ABC și DEF sunt asemenea, cu raportul de asemănare 3. Cât este raportul ariilor lor?

C Două triunghiuri echilaterale au raportul ariilor $\frac{3}{4}$. Care este raportul înălțimilor lor? Justifică.

1. Așezăm două rigle – una gradată în centimetri, alta gradată în *inches*, astfel încât capetele cu diviziunea 0 să coincidă. Trasăm dreptele ce unesc gradații cu același număr de pe cele două rigle. Explică de ce dreptele trasate sunt paralele.

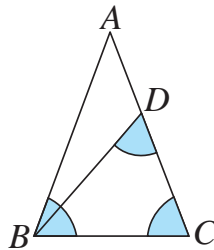


2. În patrulaterul $ABCD$, alegem un punct M pe latura AB și construim $MN \parallel AC$ ($N \in BC$), $NP \parallel BD$ ($P \in CD$) și $PQ \parallel AC$ ($Q \in AD$). Demonstrează că $MQ \parallel BD$.



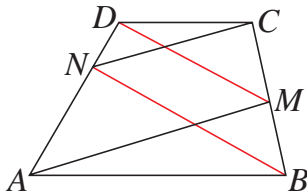
3. În figura alăturată, unghiurile marcate prin culoare sunt congruente.

- a) Arată că triunghiurile ABC și BCD sunt asemenea.
b) Demonstrează că $CB^2 = CA \cdot CD$.



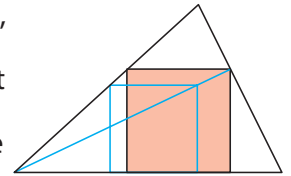
4. Considerăm triunghiurile asemenea ABC și MNP , în care construim bisectoarele AD , respectiv MQ ($D \in BC$, $Q \in NP$). Demonstrează că triunghiurile ABD și MNQ sunt asemenea.
5. În triunghiul dreptunghic ABC (cu $\sphericalangle A = 90^\circ$), construim înălțimea AD ($D \in BC$).
a) Arată că $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DAC$.
b) Demonstrează că $\Delta ABC \sim \Delta DBA$.

6. În trapezul $ABCD$ (cu $AB \parallel CD$), construim $AM \parallel CN$ ($M \in BC$, $N \in AD$).

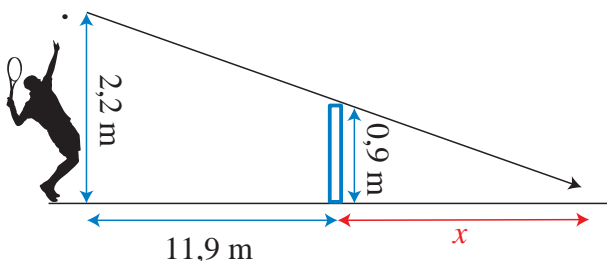


Demonstrează că $DM \parallel BN$.

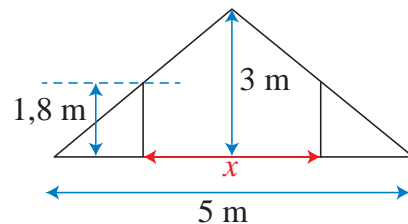
7. Observă figura alăturată, care explică modul de construcție a unui pătrat înscris într-un triunghi (adică pătratul are toate vârfurile pe laturile triunghiului). Folosește același procedeu, pentru a înscrie un dreptunghi în care raportul laturilor este 1 : 2 într-un triunghi dat.



8. Un jucător de tenis poate lovi mingea aflată la înălțimea de 2,2 m. Presupunând că mingea lovită de jucător se deplasează în linie dreaptă, la ce distanță minimă față de fileu poate fi aceasta trimisă?

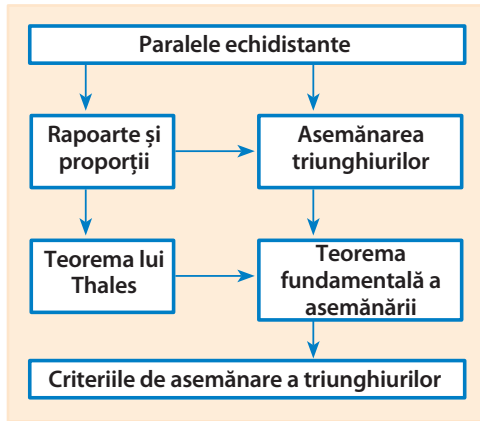


9. Imaginea de mai jos prezintă o secțiune în podul unei case.



Proprietarul vrea să amenajeze o mansardă, în care înălțimea minimă să fie de 1,8 m. Ce lățime va avea mansarda, după amenajare?

Ce am învățat?



Rezolv testele pentru a verifica dacă pot:

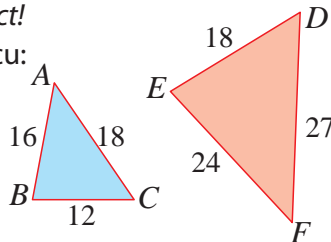
- să identific unghiuri corespondente în triunghiuri asemenea;
- să stabilesc relația de asemănare între triunghiuri date;
- să utilizez asemănarea triunghiurilor pentru determinarea de lungimi, măsuri de unghiuri și arii;
- să demonstrez paralelismul unor drepte;
- să modelez matematic situații practice.

TESTUL 1

1. Alege răspunsul corect!

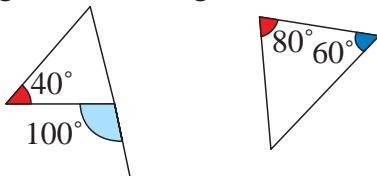
$\sphericalangle A$ este congruent cu:

- A. $\sphericalangle D$;
- B. $\sphericalangle E$;
- C. $\sphericalangle F$;
- D. $\sphericalangle B$.

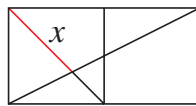


2. Adevărat sau fals?

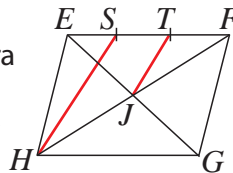
Triunghiurile din imagine sunt asemenea.



3. Cele două pătrate din imagine au laturile de câte 6 cm. Calculează lungimea segmentului notat cu x .

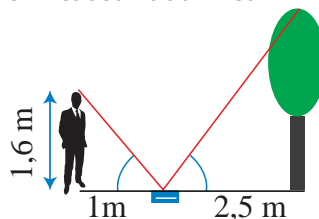


4. În paralelogramul $EFGH$, punctele S și T împart latura EF în 3 părți egale. Dacă J este intersecția diagonalelor, arată că $HS \parallel JT$.



5. Tic a determinat înălțimea unui copac, folosind o oglindă așezată astfel încât să vadă în ea vârful copacului.

Folosește datele din figură pentru a calcula și tu înălțimea copacului.

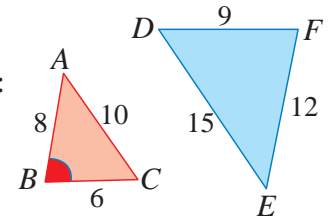


TESTUL 2

1. Alege răspunsul corect!

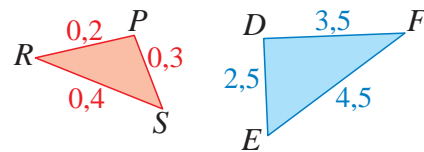
În figurile alăturate, $\sphericalangle ABC$ este congruent cu:

- A. $\sphericalangle ACB$;
- B. $\sphericalangle DEF$;
- C. $\sphericalangle EDF$;
- D. $\sphericalangle EFD$.

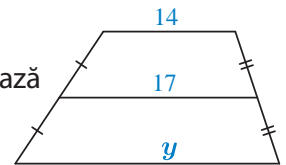


2. Adevărat sau fals?

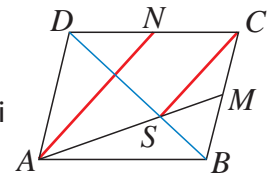
Triunghiurile din imagine sunt asemenea.



3. În trapezul alăturat, calculează lungimea notată cu y .



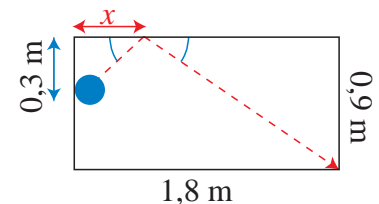
4. În paralelogramul $ABCD$, punctele M și N sunt mijloacele laturilor BC , respectiv CD . Dacă S este intersecția dreptelor AM și BD , arată că $AN \parallel CS$.



5. La biliard, bilele ricoșează

sub un unghi congruent cu unghiul de la venire.

Unde ar trebui să lovească bila din imagine marginea mesei, pentru a ajunge în buzunarul din colț?






Un traseu cu probleme

Plan de lucru

- ✓ **Materiale necesare:** coli dintr-un caiet de matematică
- ✓ **Scop:** Veți participa la un traseu matematic; veți intra în competiție, depășind obstacolele, pentru a ajunge la final.

Realizarea proiectului

Lucrați în echipe de câte trei, patru sau cinci colegi!

- ✓ Căutați problemele marcate cu . Pentru fiecare dintre acestea:
 - rezolvați problema, folosind ecuații sau sisteme de ecuații;
 - completați rezolvarea adăugând desene sugestive legate de tematica problemei;
 - modificați problema astfel încât să obțineți noi probleme, printre care cel puțin una să nu aibă soluție, iar alta să conțină date inutile.



- ✓ La final, echipele vor alcătui un portofoliu cu fișele de lucru realizate pe parcurs.

Pentru început:

- ✓ Depășiți obstacolele de pe traseu rezolvând problemele propuse alăturat.

Interacțiune

În cadrul echipei:

- ✓ Discutați etapele proiectului și împărțiți sarcinile în cadrul echipei.

Lucrați inter-echipe!

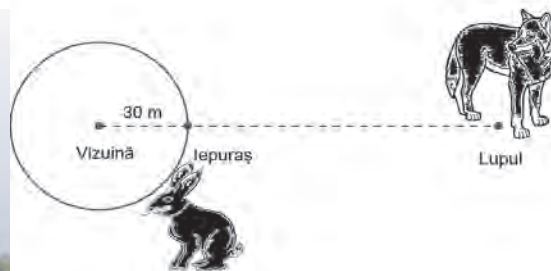
- ✓ Fiecare echipă va evalua portofoliile celorlalte echipe.
- ✓ Alegeți prin vot portofoliul care v-a plăcut cel mai mult.
- ✓ Atenție! Nicio echipă nu votează propriul portofoliu.

Prezentare

Lucrați cu toată clasa!

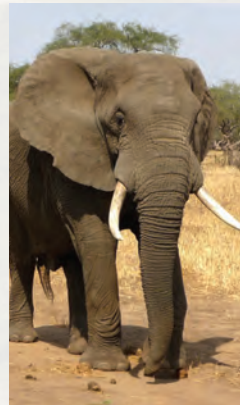
- ✓ Stabiliți clasamentul final, totalizând punctele propuse de fiecare echipă.
- ✓ Se prezintă portofoliul echipei care a întrunit cele mai multe puncte.

Ana a mers să-și viziteze bunicii cu autobuzul. Ea a remarcat că drumul la dus a fost parcurs cu viteza medie de 48 Km/h, iar același drum la întors a fost parcurs cu viteza medie de 54 Km/h. Dacă drumul dus-întors a durat 6 ore, care este distanța dintre locuința Anei și casa bunicii?



Iepurașul se află la 30 de metri de vizuină. El fuge cu 2,5 metri pe secundă. Lupul aleargă cu 5 metri pe secundă. La ce distanță se află lupul de iepuraș dacă, pornind simultan spre vizuină, ajung în același timp?

O turmă de elefanți migratori a început să se deplaseze cu o viteză de 6 km pe oră. Un elefant s-a oprit și a rămas în urmă. Apoi, acest elefant rătăcit a simțit pericolul și a început să alerge cu o viteză de 10 km pe oră și a ajuns din urmă turma în 5 minute. Pe ce distanță a alergat elefantul?



Rezolvând exercițiile următoare, îți vei aminti noțiuni și rezultate necesare pentru parcurgerea acestei Unități de învățare. Fiecare problemă propusă valorează 1 punct. Se acordă 1 punct din oficiu.

I. Scrie pe foaia de rezolvare cuvintele sau rezultatele care, înscrise în spațiile punctate, formează enunțuri adevărate.

Operații cu numere întregi

1. Rezultatul calculului $[-3 \cdot (-5) + 2 \cdot (6 - 3 \cdot 9)] : (-3)^2$ este ...

Operații cu numere raționale

2. Rezultatul calculului $0,1 + 2,1(3) - \frac{1}{5} \cdot \frac{37}{6}$ este ...

Operații cu numere reale

3. Rezultatul calculului $[(5\sqrt{2} - 3 \cdot \sqrt{18}) \cdot (-4\sqrt{3})] \cdot (\sqrt{96})^{-1}$ este ...

II. Scrie pe foaia de rezolvare litera corespunzătoare răspunsului corect pentru următoarele exerciții.

Rezolvarea ecuațiilor de forma $x + a = b$, cu $a, b \in \mathbb{Q}$

4. Soluția ecuației $x + 19 = 23$ este:
A. 5; B. -5; C. 4; D. -4.

Rezolvarea ecuațiilor de forma $ax + b = c$, cu $a, b, c \in \mathbb{Q}$

5. Soluția ecuației $-3x + 5 = 11$ este:
A. -2; B. $-\frac{1}{2}$; C. 2; D. 9.

Verificarea faptului că un număr rațional este soluție a unei ecuații

6. Numărul rațional a pentru care ecuația $a \cdot x - 1 = 5$ are soluția $x = 5$ este:
A. 5; B. $\frac{6}{5}$; C. $\frac{4}{5}$; D. $-\frac{6}{5}$.

III. Scrie pe foaia de rezolvare soluțiile complete ale exercițiilor următoare.

Rezolvarea de probleme cu ajutorul ecuațiilor

7. Determină un număr natural, știind că triplul său este cu 18 mai mare decât numărul.

Proportionalitate. Regula de trei simplă

8. O persoană cumpără 3 kg de fructe și plătește 16,5 lei. Cât va plăti pe 5 kg de fructe de aceeași calitate?

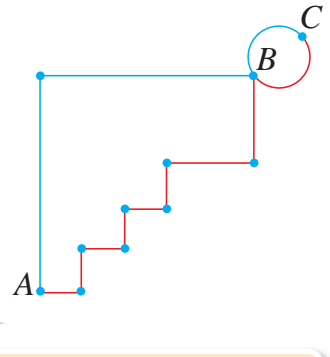
Rezolvarea de probleme prin metode aritmetice

9. 5 caise și 4 piersici cântăresc 880 g, iar 2 caise și 3 piersici cântăresc 520 g. Cât cântăresc 3 caise și 5 piersici?

Dacă ai obținut mai puțin de jumătate din punctaj la acest test, este util să revezi definițiile și proprietățile verificate mai sus, pentru a înțelege mai bine ceea ce urmează.

O situație-problemă

Geo și Mati își testează noile biciclete pe două trasee diferite, de la A la B ca în schema alăturată. Fiecare parcurge în plus același număr de kilometri (de la B la C), după încheierea traseelor.



Eu pot arăta că traseele inițiale au aceeași lungime!

Dar mai rămân egale distanțele totale parcurse de Geo și Mati?

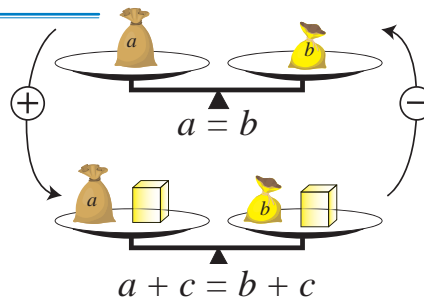


Vrem să știm!

Ce transformări putem face în ambii membri ai unei egalități, astfel încât aceasta să rămână adevărată?

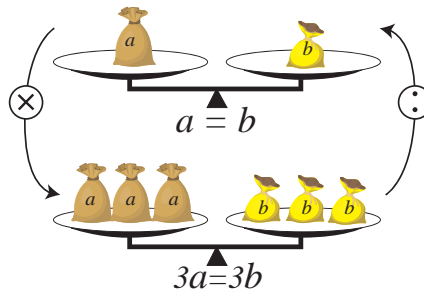
Ne amintim și extindem...

Dacă adunăm/scădem la ambii membri ai unei egalități același număr, atunci egalitatea se păstrează.



$a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$,
oricare ar fi numerele reale a, b, c .

Dacă înmulțim/împărțim ambii membri ai unei egalități cu același număr nenul, atunci egalitatea se păstrează.



$a = b \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c$,
oricare ar fi numerele reale a, b, c , cu $c \neq 0$

Folosind proprietățile enunțate mai sus, justifică afirmațiile:

- a) Dacă $a = b$ și $c = d$, atunci $a + c = b + d$; $a - c = b - d$;
- b) Dacă $a = b$ și $c = d$, $d \neq 0$, atunci $a \cdot c = b \cdot d$ și $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Gândim critic și constructiv!

Rezolvăm situația-problemă!

Geo a parcurs a km, iar Mati a parcurs b km. Ulterior, fiecare dintre ei a mai parcurs încă c km. Cum $a = b$, avem $a + c = b + c$, deci distanțele parcurse în final de cei doi băieți sunt egale.

Observă imaginea care însoțește problema și justifică de ce traseele parcurse inițial de Geo și Mati au lungimi egale.

Gândim critic și constructiv!

Evaluăm nivelul de bază!

4 mere și 3 nuci cântăresc la fel de mult ca 2 mere și 11 nuci. Câte nuci cântăresc exact cât un măr?



Problemă rezolvată!

Temperaturile se pot exprima în grade Celsius sau în grade Fahrenheit. Dispunem de următoarea formulă de transformare a gradelor Fahrenheit în grade Celsius: $T_{Celsius} = \frac{5}{9} \cdot (T_{Fahrenheit} - 32)$.

Care este formula pentru transformarea gradelor Celsius în grade Fahrenheit?

Rezolvare:

Aplic proprietățile învățate: $\longrightarrow T_{Celsius} = \frac{5}{9} \cdot (T_{Fahrenheit} - 32)$

Împart la $\frac{5}{9}$ fiecare membru al egalității: $\longrightarrow T_{Celsius} : \frac{5}{9} = \frac{5}{9} \cdot (T_{Fahrenheit} - 32) : \frac{5}{9}$

Efectuez calculele, ceea ce revine la înmulțirea cu $\frac{9}{5}$: $\longrightarrow \frac{9}{5} \cdot T_{Celsius} = T_{Fahrenheit} - 32$

Adun 32 la cei doi membri ai egalității: $\longrightarrow \frac{9}{5} \cdot T_{Celsius} + 32 = T_{Fahrenheit} - 32 + 32$

Efectuez calculele și exprim temperatura în grade Fahrenheit. $\longrightarrow T_{Fahrenheit} = \frac{9}{5} \cdot T_{Celsius} + 32$

Fiecare transformare a condus la o nouă egalitate, echivalentă cu aceea de la care am plecat.

Exprimare orală

Explică modul în care am dedus formula de transformare a gradelor Celsius în grade Fahrenheit.

Probleme propuse

1. Notăm cu x un număr real nenul. Scrie:
- a) dublul lui x ; b) jumătatea lui x ; c) inversul lui x ;
 - d) triplul lui x ; e) opusul lui x ; f) sfertul lui x ;
 - g) un număr cu 2 mai mare ca x ;
 - h) un număr cu $\frac{2}{5}$ mai mic decât x ; i) diferența dintre x și 4; j) suma dintre -2 și cincimea lui x ;
 - k) produsul dintre dublul lui x și suma lui x cu 5.

2. Dacă $a = b$, scrie egalitatea echivalentă cu aceasta, obținută:
- a) adunând cu 100 ambii termeni;
 - b) scăzând 12 din ambii termeni;
 - c) triplând membrii egalității;
 - d) înjumătățind membrii egalității;
 - e) înmulțind cu -2 și adunând cu $\sqrt{5}$ ambii membri.

3. Dacă $3a - 3b = 30$, calculează: $7 \cdot (a - b)$; $a - b - 10$.
4. Propune o problemă în care folosești transformarea din grade Celsius în grade Fahrenheit.

5. Scrie, pentru fiecare dintre echivalențele de mai jos, proprietatea relației de egalitate aplicată:
- $$9 - 6x = -8x + 31 \Leftrightarrow 9 + 2x = 31 \Leftrightarrow 2x = 22 \Leftrightarrow x = 11$$

6. Știind că $x + 2y = 5$ și $y - 4z = 7$, calculează $x + 5y - 12z$.
7. Dacă $a + b = \sqrt{2}$, $b + c = \sqrt{18}$ și $c + a = \sqrt{72}$, determină numerele reale a , b și c .

8. Scrie un exemplu de patru numere reale a, b, c, d distincte două câte două, astfel încât $a + b = c + d$.
9. Scrie un exemplu de patru numere reale a, b, c, d distincte două câte două, astfel încât $a \cdot b = c \cdot d$.

Alege și rezolvă în 5 minute!

A

Dacă $x + y = 5$, calculează $4(x + y)$.

B

Dacă $2x + 2y = 8$, calculează $3x + 3y$.

C

Dacă $x - 2y = 5$ și $y + 3z = 7$, calculează $x + 6z$.

O situație-problemă

Dacă Dan ar cumpăra 3 tricouri, i-ar rămâne 14 lei, iar dacă ar cumpăra 5 tricouri, i-ar lipsi 14 lei. Care este prețul unui tricou ?

Problema se poate exprima prin ecuația $3x + 14 = 5x - 14$



Vrem să știm!

Cum se rezolvă ecuația $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$?

Ne amintim și extindem ...

$ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, este o **ecuație în necunoscuta x** .

De regulă, se precizează de la început mulțimea în care necunoscuta x poate lua valori: aceasta este mulțimea de definiție a ecuației. Dacă mulțimea de definiție nu este precizată explicit, se consideră că aceasta este mulțimea numerelor reale \mathbb{R} .

Un număr din mulțimea de definiție care, înlocuit în ecuație, conduce la o afirmație adevărată se numește **soluție** a ecuației. Prin **rezolvarea unei ecuații** înțelegem determinarea mulțimii tuturor soluțiilor.

Două ecuații sunt **echivalente** dacă mulțimile lor de soluții coincid.

Rezolvăm!

1. $4x - 3 = 0$, $x \in \mathbb{R}$

Rezolvăm:

La fiecare pas, transformăm ecuația obținută într-o ecuație echivalentă, mai simplă:

$$4x - 3 + 3 = 3 \quad \text{Am adunat 3 în ambii membri ai ecuației.}$$

$$4x = 3 \quad \text{Am efectuat calculele.}$$

$$\frac{4x}{4} = \frac{3}{4} \quad \text{Am împărțit la 4 ambii membri ai ecuației.}$$

$$x = \frac{3}{4} \quad \text{Am obținut soluția.}$$

În concluzie: $S = \left\{ \frac{3}{4} \right\}$ este mulțimea soluțiilor ecuației.

2. $3(x + 1) + 1 = 11 - 4x$, $x \in \mathbb{R}$

$$3x + 3 + 1 = 11 - 4x$$

$$3x + 4 = 11 - 4x \quad | +4x$$

$$7x + 4 = 11 \quad | -4$$

$$7x = 7 \quad | :7 \Rightarrow x = 1 \quad S = \{1\}$$

Transformările efectuate urmăresc izolarea într-un membru a tuturor termenilor care conțin necunoscuta și gruparea în celălalt membru a termenilor „liberi” (care nu conțin necunoscuta).



Generalizăm:

O ecuație de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ se rezolvă astfel:

Dacă $a \neq 0$:

$$ax + b = 0 \quad | -b$$

$$ax = -b \quad | :a$$

$$x = -\frac{b}{a}, \quad S = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$$

Dacă $a = 0$ și $b \neq 0$, atunci $S = \emptyset$.

Dacă $a = 0$ și $b = 0$, atunci $S = \mathbb{R}$.



Rezolvăm situația-problemă!

$$3x + 14 = 5x - 14 \Leftrightarrow 5x - 3x = 14 + 14 \Leftrightarrow 2x = 2 \cdot 14 \Leftrightarrow x = 14$$

Deci prețul unui tricou este de 14 lei.

Explică modul în care a fost asociată ecuația de mai sus situației-problemă. Care ar fi prețul tricoului, dacă în situația problemă, în loc de 14 lei, ar fi 12,5 lei?

Gândim critic și constructiv!

Evaluăm nivelul de bază!

① Verifică dacă 0,5 este soluție a ecuației $2x + 1 = 0$.

② Rezolvă în \mathbb{R} ecuațiile: **a)** $x - \sqrt{2} = 0$; **b)** $2x = 2\sqrt{2}$; **c)** $4x - 8 = 0$.

Rezolvări comparative

Care dintre cei trei elevi a rezolvat corect ecuația $\frac{4x+7}{2} = 5$?

Rezolvarea lui Tic:

$$\begin{aligned} \frac{4x+7}{2} = 5 &\Leftrightarrow \frac{4x+7}{2} = 5 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x+7=5 \Leftrightarrow 2x=5-7 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x=-2 \Leftrightarrow x=-1 \end{aligned}$$

Rezolvarea Anei:

$$\begin{aligned} \frac{4x+7}{2} = 5 &\Leftrightarrow 4x+7=2 \cdot 5 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x+7=10 \Leftrightarrow 4x=10-7 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x=3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Rezolvarea lui Mati:

$$\begin{aligned} \frac{4x+7}{2} = 5 &\left| \cdot 2 \right. \\ 4x+7 &= 10 \left| -7 \right. \\ 4x &= 3 \left| : 4 \right. \\ x &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Exprimare orală

Explică greșelile făcute de elevii care nu au rezolvat corect ecuația.

Probleme propuse

1. Ecuațiile de mai jos sunt de forma $ax + b = 0$, unde necunoscuta x a fost notată cu alte litere. Transcrie și completează tabelul, după model.

Ecuația	Necunoscuta	a	b
$-\sqrt{5}y + 7 = 0$	y	$-\sqrt{5}$	7
$t - \sqrt{8} = 0$			
$3z = 0$			
$3 - 0,11 \cdot m = 0$			

2. Rezolvă în mulțimea \mathbb{R} ecuațiile:
a) $4x + 1 = 0$; **b)** $12 - 4x = 0$; **c)** $0,5 \cdot x + 3 = 0$;
d) $1,3 \cdot x + 3,2 = 0$; **e)** $2x + \sqrt{20} = 0$.

3. Stabilește dacă următoarele ecuații sunt echivalente și justifică răspunsul:

a) $2x + \sqrt{5} = 0$ și $2x = -\sqrt{5}$;
b) $\frac{3x+7}{2} = \frac{1-4x}{7}$ și $29x + 51 = 0$.

4. Care dintre elementele mulțimii $\{0; 2; -\sqrt{3}; 2,5\}$ este soluție a ecuației $\sqrt{3}(x - \sqrt{12}) = \sqrt{3}x - 6$?

5. Se consideră ecuațiile $\frac{2x-7}{2} = \frac{3x-10,5}{3}$ și $\sqrt{15}x - 5\sqrt{3} = 0$. Verifică faptul că numărul $\sqrt{5}$ este soluție comună a celor două ecuații.

6. Rezolvă ecuația $x\sqrt{3} + 2 = 8$ și efectuează proba pentru a verifica soluția obținută.

7. La ora 12 două automobile pleacă unul spre celălalt, unul de la borna kilometrică 20, celălalt de la borna kilometrică 60. Fiecare automobil parcurge distanța dintre două borne kilometrice consecutive într-un minut. La ce oră se întâlnesc cele două automobile?

8. Rezolvă în mulțimea \mathbb{R} ecuațiile:

a) $2x - 5(x + 3) + 4 = 6x + 24 - 2(x - 1) - 18$;
b) $\frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}x - 1 \right) - 1 \right] - 1 \right\} - 1 = 0$;
c) $\frac{5x-7}{2} - \frac{2x+7}{3} = 3x - 14$.

9. Rezolvă ecuațiile:

a) $\frac{x+3}{\sqrt{2}} - \frac{3-x}{\sqrt{18}} = \frac{x-4}{\sqrt{50}} + 1$;
b) $\frac{4x+\sqrt{3}}{\sqrt{20}} - \frac{2x+3\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{15}}{2}$;
c) $-\sqrt{7}(x+3) = \sqrt{5} - \sqrt{7}(x-3)$; **d)** $|x-1| = |2x-2|$.

10. Determină mulțimea soluțiilor ecuației $3x - 2m = n - mx$, în funcție de valorile parametrilor m și n .

11. Rezolvă în mulțimea \mathbb{R} ecuația $\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}x + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}x + \dots + \frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{\sqrt{9900}}x = \sqrt{2}$.

Alege și rezolvă în 5 minute!

A Verifică dacă $\sqrt{2}$ este soluție a ecuației $7x - 6\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

B Rezolvă ecuația $\sqrt{3}x + \sqrt{75} = \sqrt{147}$.

C Determină a astfel încât $\sqrt{7}$ să fie soluție a ecuației $ax - \sqrt{45} = \sqrt{245}$.

O situație-problemă

Ema a cumpărat 20 de coli de hârtie și două creioane, pentru care a plătit 9 lei. Ana ar vrea să știe cât a costat o coală, însă Ema a pierdut bonul și nu își amintește prețul articolelor cumpărate.

Dacă un creion costă 1 leu, atunci o coală de hârtie costă 35 de bani.

Sau dacă un creion costă 2 lei, atunci o coală costă 25 de bani.

Dacă x este prețul unei coli și y prețul unui creion, atunci putem exprima situația descrisă prin ecuația $20x + 2y = 9$.

Vrem să știm!

Ce este un sistem de ecuații liniare? Cum se rezolvă sistemele?

Ne amintim și extindem!

Ecuația la care am ajuns în rezolvarea situației-problemă are forma $ax + by = c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. În această ecuație, x și y sunt necunoscutele, iar numerele a, b, c sunt coeficienții ecuației. Perechile de numere care verifică ecuația reprezintă soluțiile acesteia.

$(0,35; 1)$ și $(0,25; 2)$ reprezintă două soluții ale ecuației $20x + 2y = 9$.

Definim!

$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ dx + ey + f = 0 \end{cases}$ este un sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute: x și y . Acolada indică faptul că trebuie simultan îndeplinite cele două condiții. **Soluție** a sistemului este o **soluție comună** a celor două ecuații. Prin **rezolvarea sistemului** înțelegem determinarea mulțimii soluțiilor sale.

Rezolvăm!

Să rezolvăm sistemul: $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x + 3y = 15 \end{cases}$ folosind metoda reducerii.

Cum gândim?

Înmulțim convenabil una dintre ecuații sau pe ambele, astfel încât prin adunarea lor să fie eliminată o necunoscută.

Adunăm ecuațiile obținute membru cu membru și obținem o ecuație cu o singură necunoscută. Rezolvăm ecuația astfel obținută.

Scriem mulțimea de soluții.

Verificăm corectitudinea calculelor.

Reducem necunoscuta y

$$\begin{cases} x - 2y = 4 & | \cdot 3 \\ 2x + 3y = 15 & | \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 6y = 12 \\ 4x + 6y = 30 \\ 7x / = 42 & | :7 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$\rightarrow S = \{(6; 1)\}$$

$$6 - 2 \cdot 1 = 6 - 2 = 4 \text{ și } 2 \cdot 6 + 3 \cdot 1 = 12 + 3 = 15$$

Cum scriem?

Reducem necunoscuta x

$$\begin{cases} x - 2y = 4 & | \cdot (-2) \\ 2x + 3y = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + 4y = -8 \\ 2x + 3y = 15 \\ / & 7y = 7 & | :7 \\ y = 1 \end{cases}$$

Evaluăm nivelul de bază!

Rezolvă sistemele: a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 2x - 5y = 3 \end{cases}$

Problemă rezolvată/ Rezolvări comparative

La cantina taberei se aduc într-o zi 3 saci de zahăr și 5 saci de orez, cântărind împreună 90 kg. A doua zi mai vine un transport cu 3 saci de zahăr și 7 saci de orez, cântărind cu totul 114 kg. Șeful cantinei vrea să știe cât cântărește fiecare sac, dar cântarul nu funcționează. Cum poate afla masele?

Rezolvarea Anei:

Am folosit **metoda comparației**.

3 saci zahăr ... 5 saci orez ... 90 kg

3 saci zahăr ... 7 saci orez ... 114 kg

Compar: diferența de 24 kg provine de la cei doi saci de orez în plus.

Ca urmare, un sac de orez cântărește 12 kg.

Pot afla acum că un sac de zahăr cântărește 10 kg.

Rezolvarea lui Geo:

Am asociat un sistem și am folosit **metoda reducerii**.

Notez: x = masa unui sac de zahăr; y = masa unui sac de orez și obțin sistemul:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 90 \\ 3x + 7y = 114 \end{cases}$$

Scad cele două ecuații termen cu termen:

$$2y = 24 \mid :2 \Rightarrow y = 12. \text{ Soluția sistemului este } (10; 12).$$

Exprimare orală

Compară cele două metode de rezolvare și spune care ți se pare mai practic de aplicat.

Probleme propuse

1. Rezolvă sistemele:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 3y = 4 \\ x - 3y = 2 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} 2x + y = 5 \\ -2x + y = 1 \end{cases}$$

2. Alege răspunsul corect!

Soluția sistemului $\begin{cases} -2x + 3y = 10 \\ -4x + y = 0 \end{cases}$ este:

A. (0, 1); B. (-2, 4); C. (1, 4); D. (4, 1).



3. Rezolvă sistemele:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 6x + 3y = 5 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} 8a - 4b = -4 \\ 2a + 5b = 2 \end{cases}$$

4. Arată că sistemele următoare sunt echivalente:

$$\text{a) } \begin{cases} a + 5b = 21 \\ -3a + 2b = -12 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} 0,5x - 0,2y = 2,4 \\ 0,2x + 0,5y = 2,7 \end{cases}$$

5. Rezolvă sistemele de ecuații:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 3y = 11\sqrt{5} \\ 3x - 4y = -9\sqrt{5} \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} \sqrt{7}x + \sqrt{28}y = 0 \\ \sqrt{63}x + \sqrt{7}y = -5\sqrt{7} \end{cases}$$

6. Determină numerele a și b dacă sistemul:

$$\begin{cases} (a+1)x + by = 9 \\ bx - ay = -1 \end{cases} \text{ are soluția } (1; 2).$$

7. Rezolvă următoarele sisteme de ecuații:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 4y = 8 \\ -6x + 8y = 10 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} 2x - 5y = 6 \\ -x + 2,5y = -3 \end{cases}; \quad \text{c) } \begin{cases} \frac{1}{x-1} + \frac{2}{y+1} = 9 \\ -\frac{3}{x-1} + \frac{1}{y+1} = -13 \end{cases}; \quad \text{d) } \begin{cases} 5|x| + 2y = \frac{9}{2} \\ 2|x| + 3y = -7 \end{cases}$$

Alege și rezolvă în 5 minute!

A Rezolvă sistemul:

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

B

$$\begin{cases} \sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 5 \\ \sqrt{18}x + \sqrt{12}y = 12 \end{cases}$$

C

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \\ \frac{3x}{4} + \frac{4y}{3} = -1 \end{cases}$$

O situație-problemă!



La deschiderea unei expoziții au participat 320 de persoane, adulți și copii. Prețul unui bilet este de 3 lei pentru un copil și de 10 lei pentru un adult. Organizatorii au anunțat obținerea a 1800 lei din încasări. Câți copii și câți adulți au vizitat expoziția?



Problema se poate exprima prin sistemul

$$\begin{cases} x + y = 320 \\ 3x + 10y = 1800 \end{cases}$$

Am citit că putem folosi și metoda substituției pentru rezolvarea sistemelor!



Vrem să știm!

În ce constă metoda substituției?

Rezolvăm!

Să rezolvăm sistemul: $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x + 3y = 15 \end{cases}$ folosind metoda substituției.

Cum gândim?

Folosim una dintre ecuații ca să exprimăm o necunoscută în funcție de cealaltă.

Substituim necunoscuta exprimată anterior în ecuația rămasă, care devine astfel o ecuație cu o singură necunoscută.

Rezolvăm ecuația cu o singură necunoscută obținută.

Determinăm cealaltă necunoscută, prin înlocuire în una dintre ecuațiile sistemului.

Scriem mulțimea de soluții.

Verificăm (în forma inițială a sistemului) corectitudinea calculelor.

Cum scriem?

→ Din ecuația: $x - 2y = 4$ obținem $x = 2y + 4$

→
$$\begin{cases} x = 2y + 4 \\ 2(2y + 4) + 3y = 15 \end{cases}$$

→ $4y + 8 + 3y = 15 \Rightarrow 7y = 7$, deci $y = 1$

→
$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \end{cases}$$

$S = \{(6, 1)\}$

→ Verificare: $6 - 2 \cdot 1 = 6 - 2 = 4$ și $2 \cdot 6 + 3 \cdot 1 = 12 + 3 = 15$

Substituție înseamnă „înlocuire”: ce ar trebui oare să înlocuim?



Rezolvă sistemul de mai sus: **a)** exprimând x în funcție de y din a doua ecuație; **b)** exprimând y în funcție de x din prima ecuație. Obții aceleași mulțimi de soluții? De ce?

Gândim critic și constructiv!

În rezolvarea sistemelor mai pot apărea două cazuri:

Ecuațiile sistemului sunt echivalente. În acest caz sistemul are o infinitate de soluții.

$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ -2x + 4y = -8 \end{cases} \quad | :(-2) \quad \Leftrightarrow \quad x - 2y = 4$$

$$S = \{(2t + 4; t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Cele două ecuații se contrazic. În acest caz sistemul nu are soluție.

$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ -2x + 4y = -10 \end{cases} \quad | :2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - 2y = 4 \\ -x + 2y = -5 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 0 = -1 \\ \text{Deci } S = \emptyset \end{array}$$

Compară situațiile descrise mai sus cu modul de rezolvare pentru: **a)** $0 \cdot x = 0$; **b)** $0 \cdot x = 2$.

Gândim critic și constructiv!

Evaluăm nivelul de bază!

Rezolvă următoarele sisteme aplicând metoda substituției: ① $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$; ② $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 4x + 7y = -3 \end{cases}$.

Rezolvăm situația problemă/ Rezolvări comparative

Elevii au rezolvat situația-problemă, folosind metode diferite.

Rezolvarea lui Tic:

Am folosit metoda **falsei ipoteze**.

Dacă toți vizitatorii ar fi fost copii, s-ar fi încasat pe bilete $320 \times 3 = 960$ lei.

Diferența de 840 lei provine din faptul că unele bilete au costat, de fapt, 10 lei, adică cu 7 lei mai mult.

De aceea, au fost $840 : 7 = 120$ vizitatori adulți, iar restul (adică 200 de vizitatori) au fost copii.

Rezolvarea Lizei:

Am format un sistem de ecuații și am aplicat **metoda substituției**. Am notat numărul copiilor cu x , iar al adulților cu y .

$$\begin{cases} x + y = 320 \\ 3x + 10y = 1800 \end{cases}$$

Folosesc substituția $y = 320 - x$.

Înlocuiesc în ecuația a doua, care devine:

$$3x + 10(320 - x) = 1800 \Rightarrow x = 200 \text{ și } y = 120.$$

Exprimare orală

Reia cele două rezolvări, cu modificările: **a)** presupune că toți vizitatorii au fost adulți; **b)** exprimă și substituie x în funcție de y .

Probleme propuse

1. Rezolvă sistemele prin metoda substituției:

a) $\begin{cases} x = 5 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 3x + 6y = 9 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$.

2. Alege metoda de rezolvare și rezolvă:

a) $\begin{cases} y = -3x \\ 5x + 2y = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 6 \end{cases}$.

3. Rezolvă sistemele prin metoda substituției:

a) $\begin{cases} 7(x + y) = 24,5 \\ 6x - 9y = 31,5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 6x - \frac{1}{2}y = 4 \end{cases}$.

5. Determină numerele $m, p \in \mathbb{R}$ dacă sistemul $\begin{cases} (m-3)x + (p-2)y = m \\ (m+3)x + (p+2)y = -p \end{cases}$ admite soluția $(3; -2)$.

4. Scrie un sistem și rezolvă-l prin metoda substituției.

6. Propune și rezolvă o situație-problemă asemănătoare celei date la începutul lecției, folosind alte date.

7. Rezolvă sistemele prin metoda substituției:

a) $\begin{cases} \sqrt{3}x - 6y = 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2y = \frac{4}{6} - \frac{1}{3} \end{cases}$; b) $\begin{cases} \frac{4}{9}x - \frac{1}{3}y = \frac{1}{9}(81 - y) \\ 2(2x - y) = 13 \end{cases}$.

8. Calculează suma $a + b$, dacă sistemele

$$\begin{cases} x + ay = 4 \\ 3x + 5y = 44 \end{cases} \text{ și } \begin{cases} x + y = 10 \\ 3bx + 5y = 4 \end{cases}$$
 sunt echivalente.

9. Dan pleacă cu bicicleta, iar după 2 minute pornește după el, din același loc, prietenul lui. Dan se deplasează cu 12 km/h, iar prietenul lui cu 15 km/h. La ce distanță de punctul de plecare este Dan ajuns din urmă?

10. Determină $m \in \mathbb{R}$, știind că numerele reale x și y , care formează soluția sistemului următor, sunt direct proporționale cu 3 și 2:

$$\begin{cases} -1, (3)x + 1,25y = -3 \\ (m-1)x - (2m-3)y = 5 \end{cases}$$

Alege și rezolvă în 5 minute!

A Verifică dacă $(1; -2)$ este soluție a sistemului:

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

B Rezolvă prin metoda substituției:

$$\begin{cases} \frac{x-5y}{3} + 2 = x \\ y + \frac{x-y}{2} = 2(1+x) \end{cases}$$

C Rezolvă prin metoda substituției:

$$\begin{cases} \sqrt{5}x + 2y = 3 \\ 3x - \sqrt{5}y = 2 \end{cases}$$



Situație-problemă!

Dintr-un ghem de sfoară am folosit prima oară o treime și altă dată jumătate. Am constatat că au mai rămas numai 5 m de sfoară. Ce lungime a avut inițial sfoara din ghem?

Vrem să știm! Cum rezolvăm o problemă cu ajutorul unei ecuații sau al unui sistem?

Rezolvăm situația-problemă!

Dintr-un ghem de sfoară am folosit prima oară o treime și altă dată jumătate. Am constatat că au mai rămas numai 5 m de sfoară. Ce lungime a avut inițial sfoara din ghem?



Etapă	Rezolvare
Alegem necunoscuta	Notăm cu x lungimea în metri a sforii din ghem.
Transcriem cu ajutorul necunoscutei informațiile din enunțul problemei. În acest mod, asociem problemei o ecuație.	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 60%;"> Dintr-un ghem de sfoară am folosit prima oară o treime și altă dată jumătate Am constatat că au mai rămas numai 5 m de sfoară. </div> <div style="width: 35%; text-align: right;"> x $\frac{1}{3}x$ $\frac{1}{2}x$ $x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x = 5$ </div> </div>
Rezolvăm ecuația obținută.	$6x - 2x - 3x = 30$ $x = 30$ Ghemul de sfoară avea la început 30 m.
Interpretăm rezultatul. Verificăm.	Am folosit prima oară $\frac{1}{3} \cdot 30 \text{ m} = 10 \text{ m}$, a doua oară $\frac{1}{2} \cdot 30 \text{ m} = 15 \text{ m}$ și au rămas $30 \text{ m} - 10 \text{ m} - 15 \text{ m} = 5 \text{ m}$.

Să analizăm încă o situație!

O brățară dintr-un aliaj de aur și argint cântărește 65,6 g și are un volum de 5 cm^3 . Știm că densitatea aurului pur este de $19,3 \text{ g/cm}^3$, iar a argintului de 9 g/cm^3 . Putem determina câte grame de argint au fost folosite pentru realizarea acestei brățări?

Etapă	Rezolvare
Alegem necunoscutele.	Notăm cu x și y volumul (în cm^3) al aurului, respectiv argintului
Transcriem algebric informațiile din enunțul problemei. În acest mod, asociem problemei un sistem de ecuații.	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 60%;"> Volumul brățării este de 5 cm^3. Masa aurului folosit pentru realizarea brățării Masa argintului folosit pentru realizarea brățării Brățara cântărește 65,6 g. </div> <div style="width: 35%; text-align: right;"> $x + y = 5$ $19,3 \cdot x$ $9y$ $19,3x + 9y = 65,6$ </div> </div>
Rezolvăm sistemul obținut.	$\begin{cases} x + y = 5 \\ 19,3x + 9y = 65,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9x - 9y = -45 \\ 19,3x + 9y = 65,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$
Interpretăm rezultatul.	$2 \text{ cm}^3 \cdot 19,3 \text{ g/cm}^3 = 38,6 \text{ g}$ (de aur conține aliajul).

Ai putea rezolva această problemă folosind de la început o singură ecuație? Explică răspunsul!

Gândim critic și constructiv!

Evaluăm nivelul de bază!

- ① Suma dintre un număr întreg și triplul său este 20. Calculează numărul.
- ② Mihai are 15 lei, își cumpără 8 pixuri și rămâne cu 4,60 lei. Care este prețul unui pix?

Rezolvări comparative

Află două numere naturale, știind că suma lor este 430, iar al doilea număr este cu 50 mai mic decât primul.

Ana:

Am folosit metoda figurativă.

Reprezint situația descrisă prin desene:



Al doilea număr este $(430 - 50) : 2 = 190$.

Primul număr este: $190 + 50 = 240$.

Tic:

Am pus problema în ecuație.

Notez cu x al doilea număr; atunci primul număr este egal cu $x + 50$.

Obțin:

$$x + x + 50 = 430 \Leftrightarrow 2x + 50 = 430$$

$$\Leftrightarrow 2x = 430 - 50 \Leftrightarrow 2x = 380 \Leftrightarrow x = 380 : 2$$

$$\Leftrightarrow x = 190 \text{ (al doilea număr).}$$

Deci primul număr este egal cu 240.

Exprimare orală

Comparând cele două rezolvări, care ți se pare mai ușor de aplicat? Argumentează răspunsul.

Probleme propuse

- Un elev plătește 6 lei pentru 3 creioane, care au același preț. Află ce sumă plătește elevul pentru 5 creioane de același fel cu primele.
- a) Există două numere naturale consecutive a căror sumă să fie egală cu 2019?
b) Dar egală cu 2020?
- Maria și Ioana au strâns scoici de pe plajă. Împreună au 42 de scoici. Dacă Maria i-ar da Ioanei 3 scoici, atunci cele două ar avea același număr de scoici. Află câte scoici a adunat fiecare.
- Un pix și un creion costă împreună 5 lei. Află prețul fiecăruia, dacă pixul e cu 2 lei mai scump.
- Un biciclist a parcurs într-o zi 68 km în 4 ore și îi rămân de parcurs, pentru a doua zi, încă 51 km. Află la ce oră va ajunge la destinație biciclistul, dacă a doua zi pornește la ora 7 și se deplasează cu aceeași viteză pe întregul traseu.
- Media geometrică a două numere naturale consecutive este $2\sqrt{3}$. Află cele două numere.
- Un elev construiește din bețișoare hexagoane și pătrate. Pentru cele 34 de figuri geometrice construite a folosit în total 182 de bețișoare. Află câte hexagoane a construit.
- Două numere reale pozitive au media aritmetică egală cu $9\sqrt{5}$. Află cele două numere, știind că primul este de 5 ori mai mare decât al doilea.
- Distanța dintre Piatra Neamț și Roman este de 45 km. La ora 8 pleacă din Piatra Neamț spre Roman un camion și din Roman spre Piatra Neamț o mașină de teren. Tot la ora 8, de la jumătatea traseului, pleacă spre Roman un biciclist. Camionul se deplasează cu 45 km/h, mașina de teren cu 70 km/h, iar biciclistul cu 15 km/h. Care dintre vehicule se întâlnesc primele și la ce oră?
- O șalupă ce dezvoltă o viteză constantă parcurge distanța de 12 km în 2 h. Viteza de curgere a apei este de 2 km/h. În cât timp parcurge șalupa aceeași distanță înapoi? (Este necesar să analizezi două cazuri).
- Tic are o sumă de bani. Pentru un dicționar folosește o treime din sumă, pentru un stilou cheltuiește un sfert din banii rămași, iar ca să-și cumpere o revistă încă un sfert din noul rest. Se întoarce acasă cu 45 de lei. Ce sumă de bani a avut Tic?

Alege și rezolvă în 5 minute!

A

Află două numere a căror sumă este 13 și a căror diferență este 9.

B

La o fermă sunt 41 de găște și de capre. Dacă numărăm picioarele constatăm că sunt 126. Află câte găște și câte capre sunt la fermă.

C

Lungimea unui cerc este cu 1 cm mai mare decât perimetrul unui pătrat care are latura egală cu raza cercului. Calculează lungimea laturii pătratului, cu două zecimale exacte.



1. Care dintre numerele $-\sqrt{2}$; 0 ; $\frac{1}{3}$; $\sqrt{2}$ este soluție a ecuației $3(x-1)+3=2x+\sqrt{2}$?

2. Verifică dacă $(1; 2)$ este soluție a sistemului
$$\begin{cases} 2x+y=4 \\ x+2y=5 \end{cases}$$

3. Rezolvă prin metoda substituției și a reducerii următoarele sisteme:

a) $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x-y=3 \\ y=x-1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} y=x-3 \\ 3x+y=-3 \end{cases}$.



7. Află $a \in \mathbb{R}$ dacă ecuația $ax+3=2(x-1)+3$ are soluția $x=-2$.

8. Rezolvă în \mathbb{R} ecuațiile:

a) $x-3=0$; b) $2x+10=0$;
c) $\frac{12}{5}x=36$; d) $3x-5=1+3(x-2)$;
e) $2(3x+1)-2=5(x+2)+x-3$.

9. Rezolvă în \mathbb{N} ecuațiile:

a) $6x-15=0$; b) $-12x+6=0$;
c) $-5x-10=0$; d) $4x-\frac{5}{4}=20-\frac{9}{4}x$.

10. Rezolvă în \mathbb{R} ecuațiile:

a) $5x+2=3x$; b) $2+7x=-6x$;
c) $-\sqrt{3}x=\sqrt{27}$; d) $\sqrt{2}x=-5\sqrt{6}$.
e) $3(x+\sqrt{2})-(x-\sqrt{2}) \cdot (-3)=2x-3(x+\sqrt{2})+10$;
f) $2\sqrt{3}(2x+1)-3\sqrt{3}(1-2x)=5(2\sqrt{3}x-3)+4$.



16. Între Arad și Deva sunt aproximativ 149,5 km. Din Arad pleacă spre Deva un camion cu viteza medie de 54 km/h la ora 8:30. La ora 9, din Deva pleacă spre Arad o mașină de teren cu viteza medie de 72 km/h. La ce distanță de Arad se întâlnesc cele două vehicule?

17. Propune și rezolvă o situație-problemă asemănătoare celei anterioare, folosind alte date.



20. Se dă ecuația $\frac{3x+1}{x-5}=m$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$. Rezolvă ecuația în funcție de necunoscuta x și determină $m \in \mathbb{N}$, astfel încât soluția ecuației să fie număr natural.

4. După ce a citit trei cincimi dintr-o carte, unui elev i-au mai rămas de citit 36 de pagini. Câte pagini are cartea?

5. Suma a două numere este 60. Află cele două numere, știind că unul dintre ele este egal cu o cincime din celălalt.

6. În care dintre cazurile următoare avem ecuații echivalente?

a) $2x-2=0$ și $x+2=3$;
b) $2x-5=9$ și $3-2x=3(1-x)+x$.

11. Am cumpărat un suc și un tort, plătind 15 lei. Dacă aș fi cumpărat 4 sucuri și 7 torturi, aș fi plătit cu 84 lei mai mult. Cât costă un suc? Dar un tort?

12. Suma a două numere este 15. Dacă înmulțim primul număr cu 4, pe al doilea cu 7 și adunăm produsele obținem 99. Află cele două numere.

13. Stabilește care dintre următoarele sisteme sunt echivalente:

a) $\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=-1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x-5y=1 \\ -x+6y-2=0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x+y-3=0 \\ x=6y-2 \end{cases}$.

14. Dacă unui număr i se adaugă 7, iar rezultatul se înmulțește cu 4, se obține dublul numărului 15. Care a fost numărul inițial?

15. Suma a două numere naturale este 122. Împărțind numărul mai mare la numărul mai mic, se obține câtul 4 și restul 7. Află cele două numere.



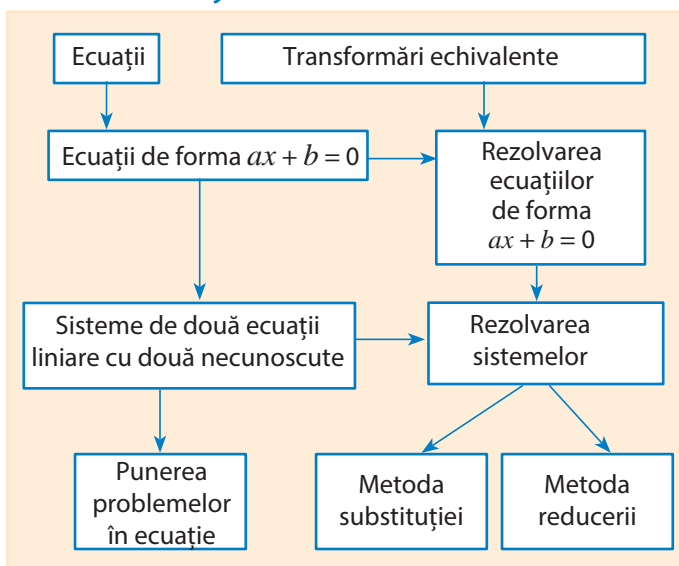
18. Rezolvă în \mathbb{Q} ecuațiile:

a) $1 \cdot x + 2 \cdot x + 3 \cdot x + \dots + 102 \cdot x = 102 \cdot 103$;
b) $\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} + \dots + \frac{x+99}{100} = 99$.

19. Rezolvă următoarele sisteme de ecuații:

a) $\begin{cases} x=\sqrt{3}y \\ \sqrt{3}x+3y=5\sqrt{3} \end{cases}$ b) $\begin{cases} |x|-3|y|=1 \\ 5|x|-3|y|=5 \end{cases}$

Ce am învățat?



Rezolv teste pentru a verifica dacă pot:

- să identific necunoscuta și coeficienții unei ecuații;
- să verific prin calcul dacă un număr este soluție a unei ecuații sau o pereche de numere este soluție a unui sistem de ecuații;
- să aplic transformări pentru a obține ecuații echivalente și să rezolv ecuații de forma $ax + b = 0$, cu $a, b \in \mathbb{R}$;
- să rezolv sisteme de ecuații prin metoda reducerii și metoda substituției;
- să rezolv probleme cu conținut practic, utilizând ecuații sau sisteme de ecuații liniare.

TESTUL 1

1. Arată că numărul real $\sqrt{3}$ este soluție a ecuației $2\sqrt{3} \cdot x - 5 = 1$.
2. Determină numărul real m pentru care ecuația $(m+1)x - 4 = 0$ are soluția $\frac{1}{3}$.
3. Rezolvă ecuațiile:
 - a) $3x - \sqrt{2} = \sqrt{50}$;
 - b) $2x - \sqrt{20} = 3x + \sqrt{5}$.
4. Rezolvă sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$ prin metoda reducerii. Verifică rezultatul rezolvând sistemul prin metoda substituției.
5. Trei cutii și două pungi conțin 128 de bomboane, iar două cutii și patru pungi de același fel conțin 192 de bomboane. Află câte bomboane conține o cutie, respectiv o pungă.

TESTUL 2

1. Arată că numărul real $1 - \sqrt{2}$ este soluție a ecuației $1 - x = \sqrt{2}$.
2. Determină numărul real a pentru care ecuația $3x - 2a + 1 = 0$ are soluția -2 .
3. Rezolvă ecuațiile:
 - a) $\sqrt{2}x + 3 = 4$;
 - b) $\frac{x - \sqrt{5}}{3} = \frac{x + \sqrt{5}}{4}$.
4. Rezolvă sistemul de ecuații $\begin{cases} -2x + 3y = 10 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$ prin metoda substituției. Verifică rezultatul rezolvând sistemul prin metoda reducerii.
5. Cinci creioane și două ascuțitori costă 27 lei. Află cât costă un creion și o ascuțitoare, dacă prețul unei ascuțitori e de două ori mai mare decât prețul unui creion.



Jocuri cu pătrate și triunghiuri

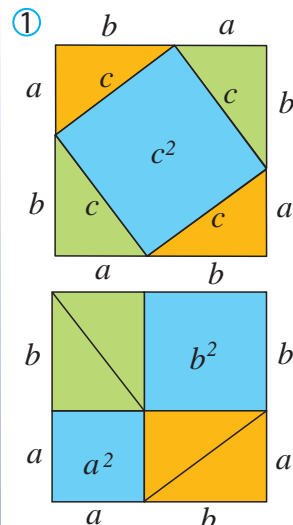
Plan de lucru

- ✓ **Materiale necesare:** coli de hârtie, creioane colorate, foarfece
- ✓ **Scop:** Veți realiza „demonstrații” practice ale teoremei lui Pitagora.

Realizarea proiectului

Lucrați în echipe de câte doi, trei sau patru colegi!

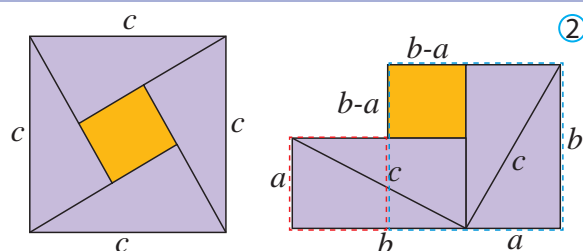
- ✓ Alăturat sunt sugerate două reprezentări (1 și 2) pentru a demonstra teorema lui Pitagora. Realizați practic aceste modele și verificați teorema.
- ✓ Pentru fiecare model realizat, pregătiți o fișă în care explicați construcția și menționați toate relațiile algebrice identificate.
- ✓ Explorați diferite surse de informare: cărți din biblioteca familiei sau împrumutate de la biblioteca școlii, internet etc. și identificați și alte demonstrații ale teoremei lui Pitagora. Prezentați aceste demonstrații, frumos organizate, pe fișe ale proiectului vostru.
- ✓ Aplicați toate materialele realizate, pe un poster, într-o manieră cât mai atractivă.



Interacțiune

În cadrul echipei:

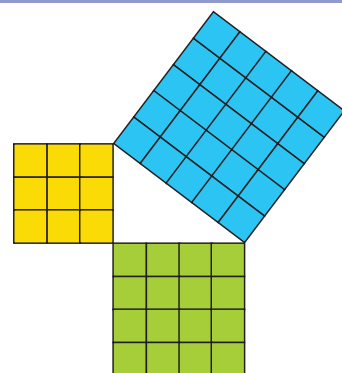
- ✓ Discutați etapele proiectului și împărțiți sarcinile.
- ✓ Fiecare rezolvă propria sarcină, dar colaborează și cu ceilalți pentru a obține la final un produs cât mai bun al întregii echipe.
- ✓ Discutați și stabiliți forma finală a posterului pe care aplicați toate materialele realizate.



Pentru început:

Observați figura alăturată.

La mijlocul secolului al XX-lea, oamenii de știință căutau un simbol cât mai clar pentru a informa eventuale forme inteligente din Univers despre existența vieții pe Pământ. Acest simbol, imprimat pe o suprafață uriașă în deșertul Saharei, urma să poată fi observat, spre exemplu, de pe Marte, cu ajutorul unui telescop perfecționat. Care putea fi acel simbol? După îndelungi dezbateri, s-a convenit că simbolul cel mai potrivit să „vorbească” simplu și clar despre inteligența oamenilor și puterea lor de construcție este cel alăturat. Aflați mai multe date despre această figură și relațiile implicate!



Prezentare

Lucrați cu toată clasa!

- ✓ Fiecare echipă va evalua posterele celorlalte echipe.
 - Alegeți prin vot posterul care v-a plăcut cel mai mult.
 - Atenție! Nicio echipă nu votează propriul poster.
- ✓ Stabiliți clasamentul final, totalizând punctele propuse în cadrul fiecărei echipe.

Rezolvând exercițiile următoare, îți vei aminti noțiuni și rezultate necesare pentru parcurgerea acestei Unități de învățare. Fiecare problemă propusă valorează 1 punct. Se acordă 1 punct din oficiu.

I. Scrie pe foaia de rezolvare cuvintele sau rezultatele care, înscrise în spațiile punctate, formează enunțuri adevărate.

Pătratul unui număr

1. Pătratul numărului 36 este egal cu: ...

Media aritmetică și media geometrică

2. Media aritmetică a numerelor 8 și 18 este ..., iar media geometrică a acestora este ...

Aria dreptunghiului

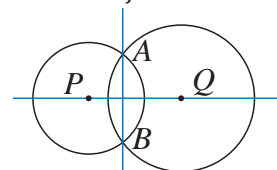
3. Un dreptunghi are laturile de 3,25 cm și 2,5 cm. Aria dreptunghiului este egală cu ... dm².

II. Scrie pe foaia de rezolvare litera corespunzătoare răspunsului corect pentru următoarele exerciții:

Drepte perpendiculare

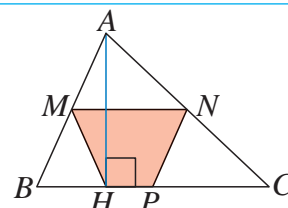
4. Cercurile de centre P și Q se intersectează în punctele A și B . Atunci suntem siguri că:

- A. $PA \perp AQ$; B. $PA \perp BP$;
C. $\sphericalangle PAB \equiv \sphericalangle QAB$; D. $PQ \perp AB$.



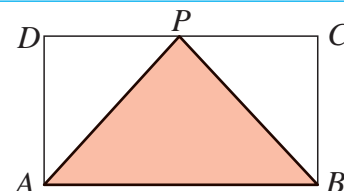
Proprietăți ale triunghiurilor dreptunghice

5. În figura alăturată, AH este înălțimea triunghiului ABC , iar M, N, P sunt mijloacele laturilor triunghiului. Știind că $AB = 6$ cm și $BC = 10$ cm, atunci $HM + MN + NP = \dots$
A. 11 cm; B. 13 cm; C. 9 cm; D. 15 cm.



Criteriul de congruență C.C.

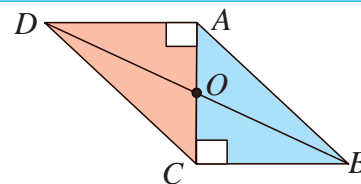
6. În dreptunghiul $ABCD$, notăm cu P mijlocul laturii CD . Dacă $PC = 25$ mm și $AP = 3,5$ cm, perimetrul triunghiului APB este egal cu:
A. 57 mm; B. 120 mm;
C. 57,5 cm; D. 75 mm.



III. Scrie pe foaia de rezolvare soluțiile complete ale exercițiilor următoare:

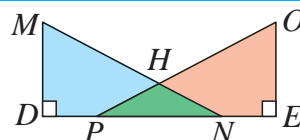
Criteriul de congruență I.C.

7. Pe figura alăturată apar triunghiurile dreptunghice ABC și ACD , unde $AB = CD$. Demonstrează că punctul O este mijlocul segmentului AC .



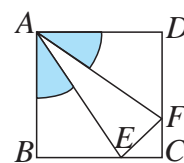
Criteriul de congruență I.U.

8. Pe figura alăturată, știm că triunghiurile PHN și MHO sunt isoscele. Demonstrează că $DM \equiv OE$.



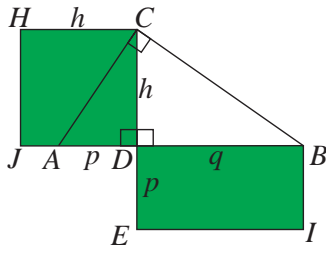
Criteriul de congruență C.U.

9. În pătratul $ABCD$ din figură, unghiurile marcate prin culoare sunt congruente. Demonstrează că triunghiul AEF este isoscel.



Dacă ai obținut mai puțin de jumătate din punctaj la acest test, este util să revezi definițiile și proprietățile verificate mai sus, pentru a înțelege mai bine ceea ce urmează.

O situație-problemă



Bunicul are două terenuri, unul de formă pătrată, iar altul dreptunghiular. Am făcut o schiță a lor și am notat cu h latura pătratului și cu p și q laturile dreptunghiului. Pe schița mea, el a desenat un triunghi dreptunghic și mi-a spus că terenurile lui au arii egale:
Deci $h^2 = p \cdot q$.



O fi oare adevărat?

Vrem să știm!

Ce relații există între lungimile laturilor unor triunghiuri dreptunghice?

Ne amintim ...

Media geometrică a două numere pozitive este rădăcina pătrată a produsului lor.

Exemplu:

Media geometrică a numerelor 2 și 18 este $m_g = \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6$.

În general, numărul pozitiv h este media geometrică a două numere pozitive m și n dacă $h^2 = m \cdot n$ sau $h = \sqrt{m \cdot n}$.

Relația poate fi scrisă și sub formă de proporție: $\frac{m}{h} = \frac{h}{n}$.

De aici rezultă și o altă denumire a mediei geometrice, anume aceea de **medie proporțională**.

Să demonstrăm!

Teorema înălțimii

Într-un triunghi dreptunghic, înălțimea corespunzătoare ipotenuzei este media geometrică a segmentelor determinate de ea pe ipotenuză.

Ipoteză:

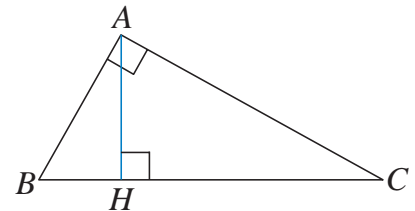
$\triangle ABC$, $\hat{A} = 90^\circ$; $AH \perp BC$

Concluzie:

$AH^2 = BH \cdot HC$

Demonstrație:

$\triangle ABH \sim \triangle CAH$ (U.U.). Rezultă că $\frac{BH}{AH} = \frac{AH}{HC}$, deci $AH^2 = BH \cdot HC$



Reciproca teoremei înălțimii

Dacă într-un triunghi ABC , în care unghiurile B și C sunt ascuțite, înălțimea din A este medie proporțională între segmentele determinate de ea pe latura opusă, atunci triunghiul este dreptunghic în A .

Ipoteză:

$\triangle ABC$; $AH \perp BC$; $AH^2 = BH \cdot HC$

Concluzie:

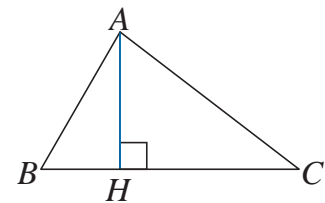
$\widehat{BAC} = 90^\circ$

Demonstrație:

Deoarece $AH^2 = BH \cdot HC$ rezultă $\frac{BH}{AH} = \frac{AH}{HC}$.

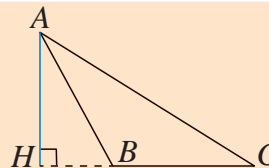
În plus, $\widehat{AHB} \equiv \widehat{CHA}$ (unghiuri drepte). Rezultă că $\triangle AHB \sim \triangle CHA$ (L.U.L.).

Deci $\widehat{B} \equiv \widehat{CAH}$, $\widehat{C} \equiv \widehat{BAH}$. În concluzie, $\widehat{BAC} = 90^\circ$.



Ce se întâmplă dacă punctul H se află în exteriorul laturii BC ?

Analizează figura alăturată, apoi răspunde!



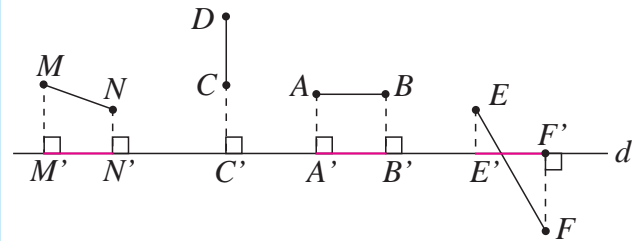
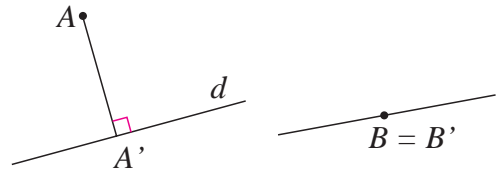
Gândim critic și constructiv!

În triunghiurile ABC anterioare, a fost trasată înălțimea AH a triunghiului. Punctul H este **proiecția ortogonală** a punctului A pe latura BC .

Definiții

Proiecția ortogonală a unui punct pe o dreaptă este piciorul perpendicularei duse din acel punct pe dreaptă. Dacă punctul se află pe dreaptă, proiecția lui coincide cu punctul însuși.

Proiecția ortogonală a unui segment pe o dreaptă poate fi un segment sau un punct.



Să demonstrăm!

Putem enunța acum o nouă proprietate a triunghiului dreptunghic:

Teorema catetei Într-un triunghi dreptunghic, lungimea unei catete este medie geometrică între lungimea ipotenuzei și a proiecției acelei catete pe ipotenuză.

Ipoteză:

$$\triangle ABC, \hat{A} = 90^\circ \\ AH \perp BC$$

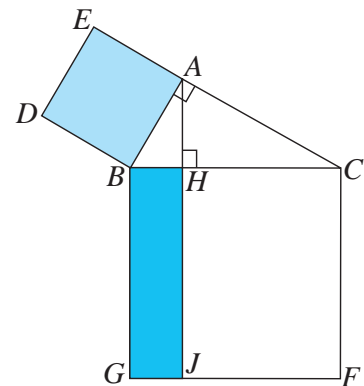
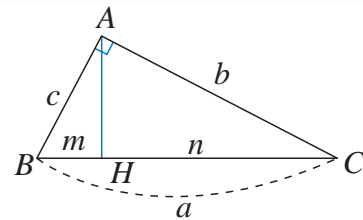
\Rightarrow

Concluzie:

$$AB^2 = BH \cdot BC \quad (c^2 = a \cdot m) \\ AC^2 = CH \cdot CB \quad (b^2 = a \cdot n)$$

Demonstrație:

$\triangle ABH \sim \triangle CBA$ (U.U.). Rezultă că $\frac{BH}{AB} = \frac{AB}{BC}$. Deci $AB^2 = BH \cdot BC$.



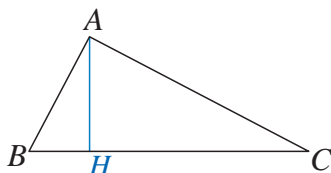
Să observăm!

Teorema catetei descrie o relație între segmentele BA , BH și BC , care au un capăt comun.

Teorema catetei afirmă că pătratul $ABDE$ și dreptunghiul $BHJG$ cu $BG = BC$, colorate pe figura din dreapta, sunt echivalente (au arii egale).

Reciproca teoremei catetei

Dacă într-un triunghi ABC , în care unghiul B este ascuțit, latura AB este medie geometrică între BC și proiecția laturii AB pe latura BC , atunci triunghiul este dreptunghic în A .



Ipoteză:

$$\triangle ABC; AH \perp BC \\ AB^2 = BH \cdot BC$$

\Rightarrow

Concluzie:

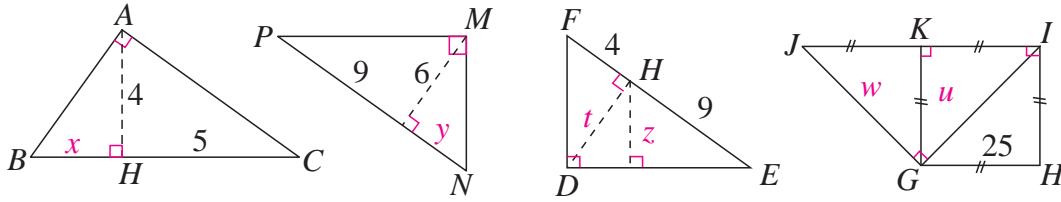
$$\hat{BAC} = 90^\circ$$

Completează pe caiet demonstrația pentru reciproca teoremei catetei.

Gândim critic și constructiv!

Evaluăm nivelul de bază

Determină lungimile notate cu litere în figurile de mai jos.



Probleme propuse

1. Alege răspunsul corect!

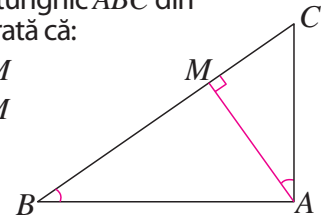
Proiecția unui punct pe o dreaptă este:

- A. o dreaptă; B. un număr;
C. un segment; D. un punct.

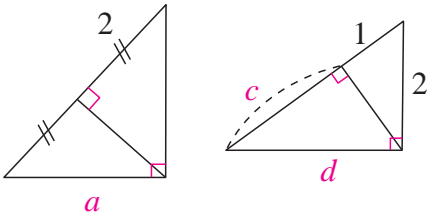
2. Desenează dreapta d și segmentele AB și CD a căror proiecție pe d este un segment, respectiv un punct.

3. În triunghiul dreptunghic ABC din figura alăturată, arată că:

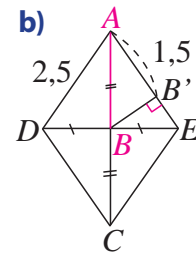
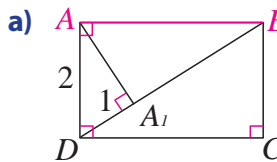
- a) $AC^2 = BC \cdot CM$
b) $AB^2 = BC \cdot BM$



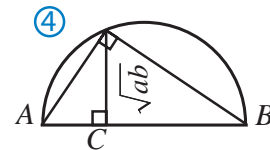
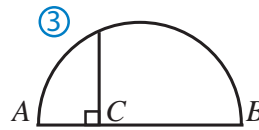
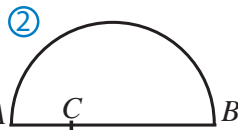
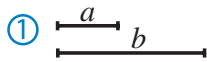
4. Determină lungimile notate cu litere pentru fiecare dintre triunghiurile de mai jos.



5. Determină lungimea segmentului AB pentru fiecare figură.

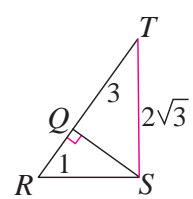
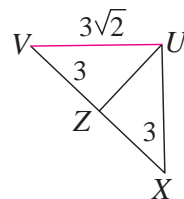
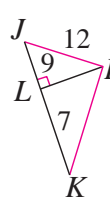
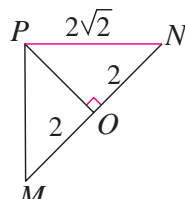
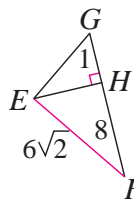
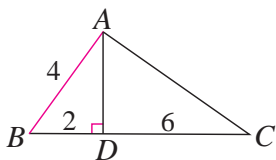


6. Putem construi media proporțională a două segmente folosind teorema înălțimii, ca mai jos.



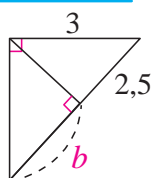
Procedează similar pentru a construi media geometrică a două segmente folosind teorema catetei.

7. Arată că triunghiurile de mai jos sunt dreptunghice, utilizând datele notate pe desene și teoremele studiate.

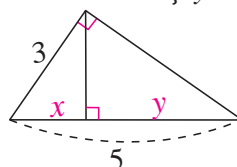


Alege și rezolvă în 5 minute!

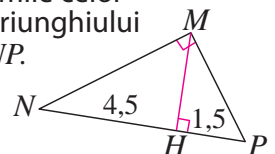
A Determină b .



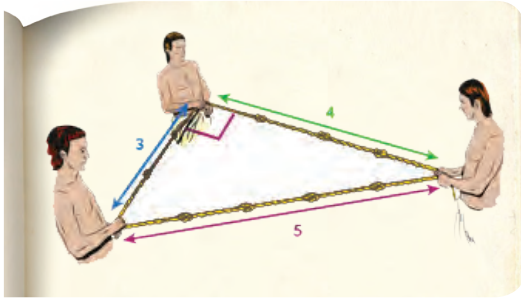
B Determină x și y .



C Pentru figura alăturată, determină lungimile celor trei înălțimi ale triunghiului dreptunghic MNP .



O situație-problemă



Am citit că vechii egipteni aveau metode foarte simple de a face construcții cu unghiuri drepte! Iată o imagine dintr-o carte...

Da, numerele 3, 4, 5 verifică relația $3^2 + 4^2 = 5^2$ din Teorema lui Pitagora. Oare reciproca este adevărată?

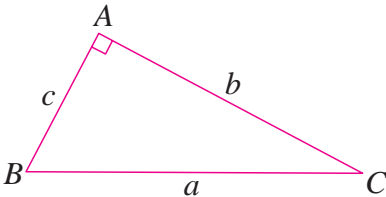


Vrem să știm! Cum aplicăm teorema lui Pitagora și reciproca ei?

Să demonstrăm!

Teorema lui Pitagora

Într-un triunghi dreptunghic, suma pătratelor lungimilor catetelor este egală cu pătratul lungimii ipotenuzei.



$$\triangle ABC, \hat{A} = 90^\circ \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$$

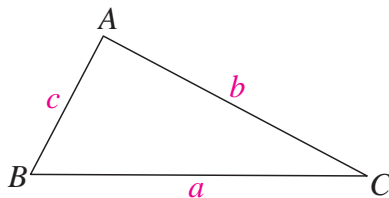
$$b^2 + c^2 = a^2$$



Urmărește proiectul acestei unități de învățare pentru a realiza diferite demonstrații ale teoremei lui Pitagora.

Reciproca teoremei lui Pitagora

Dacă trei numere pozitive a, b, c satisfac relația $b^2 + c^2 = a^2$ atunci există un triunghi dreptunghic care are catetele de lungimi b, c și ipotenuza de lungime a .



Ipoteză:

$$\triangle ABC, AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$b^2 + c^2 = a^2$$

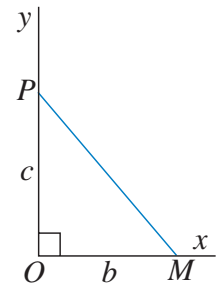
Concluzie:

$$\widehat{BAC} = 90^\circ$$

Demonstrație:

Desenăm un unghi drept xOy , iar pe laturile lui marcăm segmentele $OP = c$ și $OM = b$. Cum triunghiul MOP este dreptunghic, conform teoremei lui Pitagora rezultă că $b^2 + c^2 = PM^2$.

Deci $MP = a$. Am obținut $\triangle ABC \equiv \triangle OPM$ (conform L.L.L.). Ca urmare, $\sphericalangle POM \equiv \sphericalangle BAC$ și măsurile lor sunt de 90° .



Exprimare orală Formulează cele două teoreme folosind expresia „dacă și numai dacă”.

Problemă rezolvată

Calculează lungimile laturilor paralelogramului ABCD alăturat folosind informațiile notate pe figură. Lungimile sunt date în centimetri.

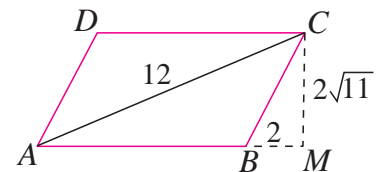
Rezolvare:

Din teorema lui Pitagora aplicată în triunghiul BMC, obținem $BC = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ (cm)

Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic MAC.

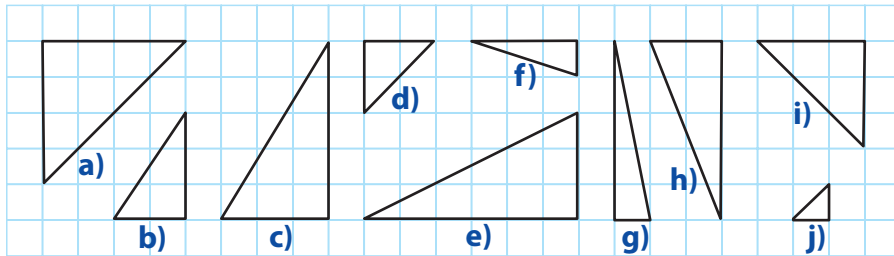
Obținem: $AM = \sqrt{AC^2 - MC^2} = \sqrt{144 - 44} = \sqrt{100} = 10$ (cm).

Deci laturile paralelogramului au lungimile de 8 cm și $4\sqrt{3}$ cm.

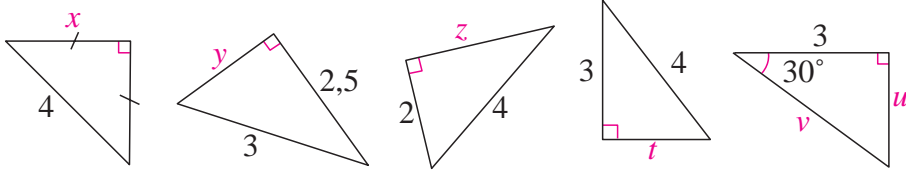




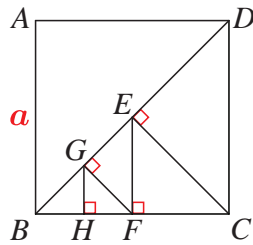
1. Folosind ca unitate de măsură lungimea laturii pătratului de rețea, calculează ipotenuzele triunghiurilor de mai jos.



2. Calculează lungimile notate cu litere pentru triunghiurile de mai jos.



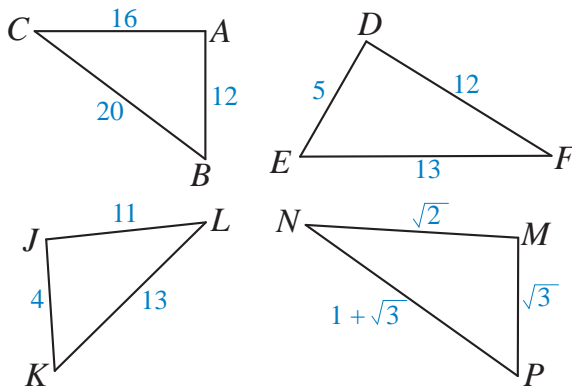
3. Află lungimile laturilor triunghiurilor din figura alăturată, în funcție de a (latura pătratului).



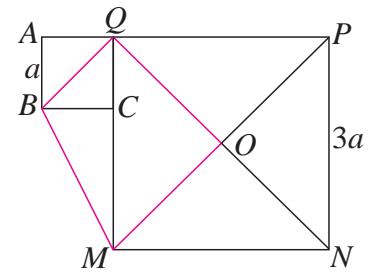
4. Arată că tripletele următoare de numere pot reprezenta lungimile laturilor unor triunghiuri dreptunghice:

- a) (3, 4, 5);
- b) (5, 12, 13);
- c) (17, 15, 8).

5. Află prin calcul care dintre triunghiurile de mai jos este dreptunghic. Precizează care este ipotenuza în fiecare caz.



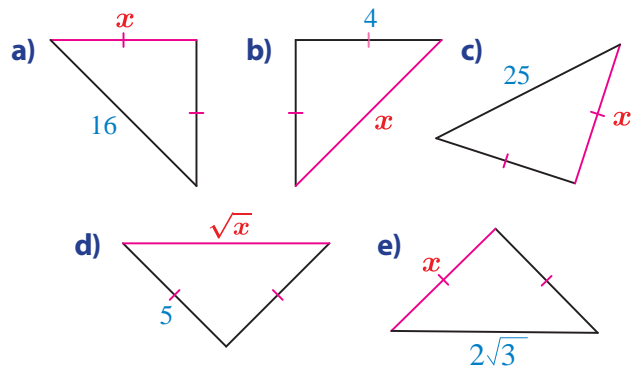
6. În figura alăturată, $ABCQ$ și $QMNP$ sunt pătrate având latura de lungime a și respectiv $3a$. Calculează aria și perimetrul patrulaterului $BMOQ$.



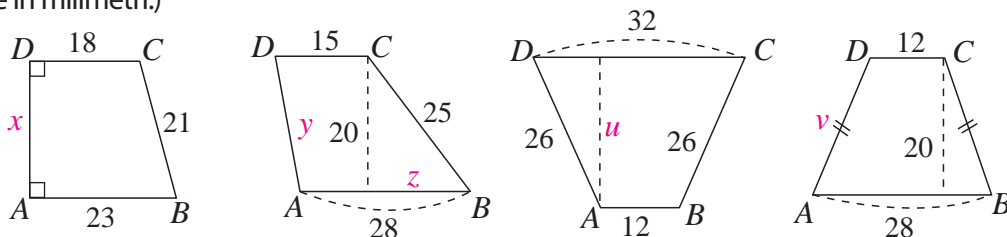
7. Determină lungimea d a rampei de încărcare din imaginea de mai jos.



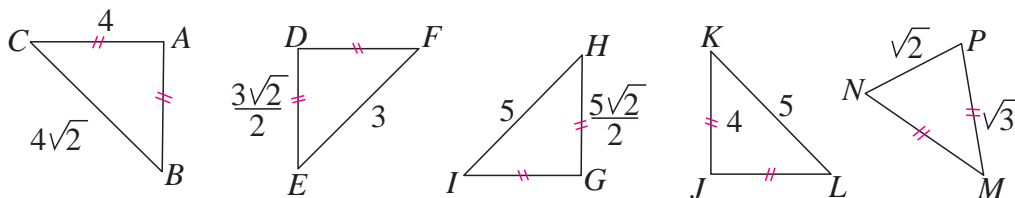
8. Găsește valoarea lui x astfel încât triunghiurile de mai jos să fie dreptunghice isoscele.



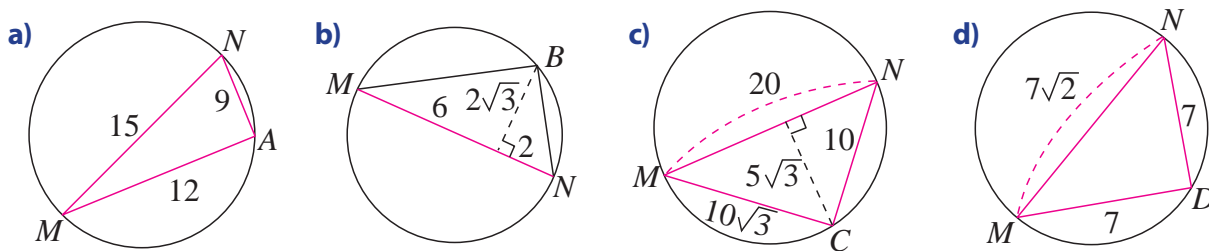
9. Calculează lungimile notate cu litere pentru fiecare dintre trapezele de mai jos. (Lungimile date sunt exprimate în milimetri.)



10. Folosind datele din figuri, numește triunghiurile dreptunghice. Justifică răspunsul.



11. Arată că segmentul MN este diametru în fiecare dintre cercurile de mai jos.



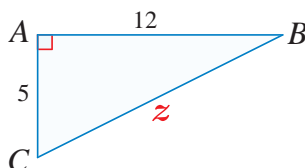
12. Demonstrează că:

- a) Dacă o înălțime a unui triunghi delimitează, în interiorul triunghiului dat, două triunghiuri asemenea, atunci triunghiul inițial este dreptunghic sau isoscel.
 b) Dacă o înălțime a unui triunghi delimitează, în interiorul triunghiului dat, un triunghi asemenea cu acesta, atunci triunghiul inițial este dreptunghic.

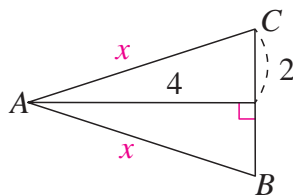
13. Găsește un triunghi dreptunghic astfel încât lungimile laturilor, a înălțimii și ale proiecțiilor catetelor pe ipotenuză să fie toate numere naturale.

Alege și rezolvă în 5 minute!

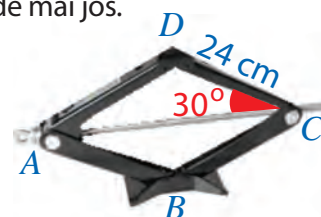
- A** Folosește datele notate pe figură pentru a determina z :



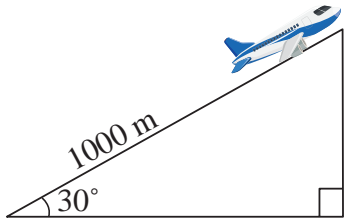
- B** Pentru triunghiurile isoscele de mai jos, calculează lungimile laturilor notate cu x .



- C** Cricul este un dispozitiv pentru ridicarea obiectelor. Un cric are forma unui romb. Calculează lungimile diagonalelor cricului din imaginea de mai jos.

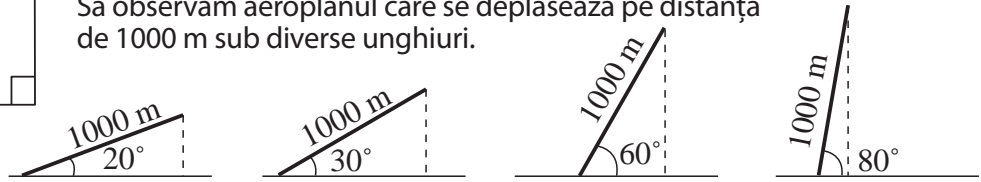


O situație-problemă



Un aeroplan se ridică de la pământ sub un unghi de 30° și se deplasează 1 000 m. La ce înălțime maximă ajunge aeroplanul? Dar dacă aeroplanul se lansează sub un unghi de 25° și parcurge aceeași distanță de 1 000 m?

Să observăm aeroplanul care se deplasează pe distanța de 1000 m sub diverse unghiuri.

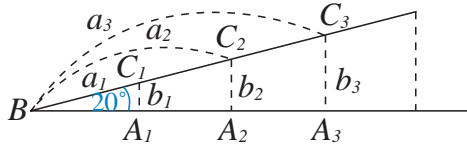


Vrem să știm!

Cum putem folosi unghiurile pentru a determina lungimi?

Scurt demers de cercetare

Ce se întâmplă dacă distanța de lansare a aeroplanului este de 2 ori mai lungă? Dar dacă este de 3 ori mai lungă? Dar de 4 ori mai scurtă?



$$\Delta BA_1C_1 \sim \Delta BA_2C_2 \sim \Delta BA_3C_3$$

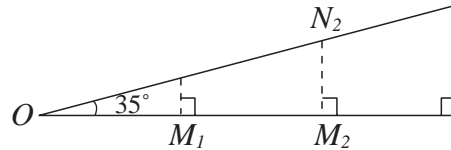
Rezultă: $\frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1}{a_2}$, de unde $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$
 $\frac{b_1}{b_3} = \frac{a_1}{a_3}$, de unde $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_3}{a_3}$

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3}$$

Se formează triunghiuri asemenea!



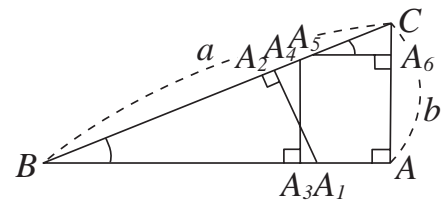
Dacă se consideră un alt unghi, obținem un alt șir de rapoarte egale, diferit de primul!



Înseamnă că există o legătură între măsura unghiului și valoarea raportului dintre o catetă și ipotenuza triunghiului...

... iar valoarea acestui raport nu depinde de triunghiul dreptunghic în care ne situăm, după cum nici măsura unghiului nu depinde de forma triunghiului din care face parte unghiul.

În mod sigur! Iată o figură și mai convingătoare: Triunghiurile dreptunghice din figură sunt asemenea două câte două (conform cazului (U.U.).



$$\text{Rezultă } \frac{b}{a} = \frac{A_1A_2}{BA_1} = \frac{A_3A_4}{BA_4} = \frac{A_6C}{A_5C}$$

Scrive perechile de triunghiuri asemenea pentru a verifica șirurile de rapoarte egale.

Gândim critic și constructiv!

Definiție

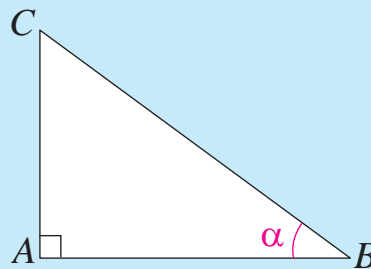
Considerăm un unghi ascuțit de măsură α (alfa) într-un triunghi dreptunghic și denumim următoarele rapoarte de lungimi de segmente:

$$\sin \alpha = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{ipotenuză}} \quad (\text{citim sinus de alfa})$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateta alăturată}}{\text{ipotenuză}} \quad (\text{citim cosinus de alfa})$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{cateta alăturată}} \quad (\text{citim tangentă de alfa})$$

$$\text{ctg } \alpha = \frac{\text{cateta alăturată}}{\text{cateta opusă}} \quad (\text{citim cotangentă de alfa})$$



În triunghiul ABC dreptunghic în A , avem:

$$\sin B = \frac{AC}{BC}, \quad \cos B = \frac{AB}{BC},$$

$$\text{tg } B = \frac{AC}{AB}, \quad \text{ctg } B = \frac{AB}{AC}$$

Observăm, din modul de definire, că sinusul unui unghi ascuțit este un număr pozitiv subunitar, în timp ce tangenta unui unghi ascuțit poate lua orice valoare pozitivă.

Ce poți afirma despre cosinus și cotangentă?

Gândim critic și constructiv!

Să explorăm!

Fie xOy un unghi și perpendicularele marcate așa cum indică figura alăturată.

Observăm că

$$\sin(\widehat{xOy}) = \frac{A_1B_1}{OB_1} = \frac{A_2B_2}{OB_2} = \frac{A_3B_3}{OB_3}.$$

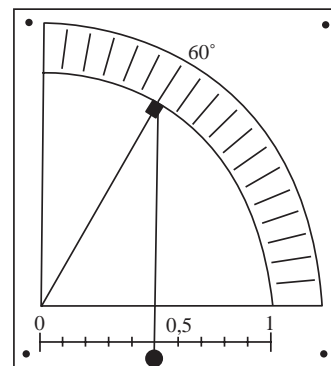
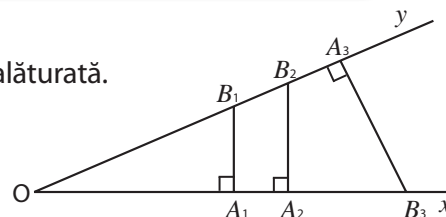
Constatăm că sinusul unui unghi nu depinde de laturile unghiului, sau de triunghiurile în care se află unghiul, ci numai de măsura unghiului.

Sinusul, cosinusul, tangenta, cotangentă sunt **rapoarte trigonometrice**.

Cuvântul trigonometrie este compus din două cuvinte provenite din limba greacă: trigonos – triunghi și metron – măsură. Primul care a folosit rapoartele constante în lucrările sale a fost matematicianul grec Hipparchus, începând din 150 î.Hr.

Folosind programe de calculator realizate pe baza unor formule de calcul, se pot determina aproximări ale valorilor funcțiilor trigonometrice. Chiar voi puteți realiza un instrument care permite o metodă practică de a determina cu aproximație sinusul și cosinusul unui unghi.

Acest instrument constă dintr-un ac indicator care se rotește pe un sfert de disc gradat ca un raportor, de la 0° la 90° .

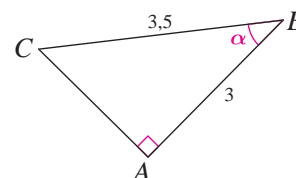
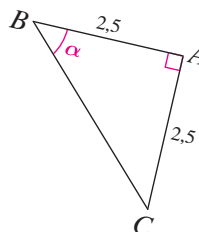


Cum putem explica funcționarea acestui instrument?

Gândim critic și constructiv!

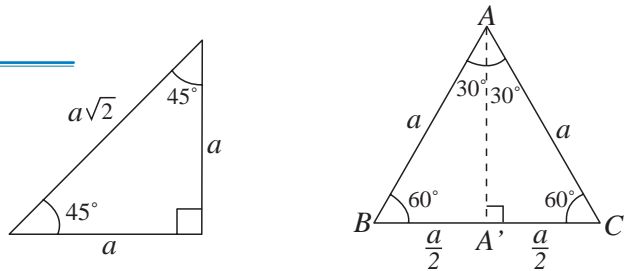
Evaluăm nivelul de bază

Pentru fiecare dintre triunghiurile alăturate, calculează pentru unghiul marcat: $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\text{tg } \alpha$, $\text{ctg } \alpha$.

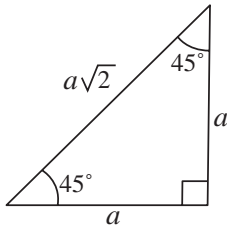


Tabelul valorilor unor funcții trigonometrice

Cu ajutorul unui triunghi dreptunghic isoscel și al unui triunghi echilateral, putem completa un tabel pentru câteva valori ale funcțiilor trigonometrice.



Exemplu de calcul



În triunghiul de mai sus avem:

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1$$



α	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	
ctg		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Folosind metode de acest tip putem completa tabele cu valori trigonometrice aproximative:

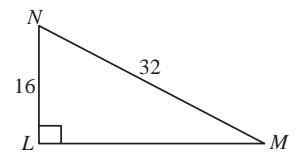
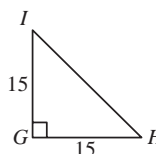
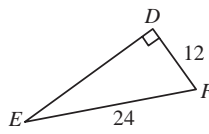
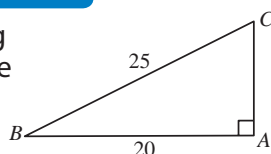
Unghi (°)	sin	tg	Unghi (°)	sin	tg	Unghi (°)	sin	tg	Unghi (°)	sin	tg	Unghi (°)	sin	tg
1	0,017	0,017	16	0,276	0,287	31	0,515	0,601	46	0,719	1,036	61	0,875	1,804
2	0,035	0,035	17	0,292	0,306	32	0,530	0,625	47	0,731	1,072	62	0,883	1,881
3	0,052	0,052	18	0,309	0,325	33	0,545	0,649	48	0,743	1,111	63	0,891	1,963
4	0,070	0,070	19	0,326	0,344	34	0,559	0,675	49	0,755	1,150	64	0,899	2,050
5	0,087	0,087	20	0,342	0,364	35	0,574	0,700	50	0,766	1,192	65	0,906	2,145
6	0,105	0,105	21	0,358	0,384	36	0,588	0,727	51	0,777	1,235	66	0,914	2,246
7	0,122	0,123	22	0,375	0,404	37	0,602	0,754	52	0,788	1,280	67	0,921	2,356
8	0,139	0,141	23	0,391	0,424	38	0,616	0,761	53	0,799	1,327	68	0,927	2,475
9	0,156	0,158	24	0,407	0,445	39	0,629	0,810	54	0,809	1,376	69	0,934	2,605
10	0,174	0,176	25	0,423	0,466	40	0,643	0,839	55	0,819	1,428	70	0,940	2,747
11	0,191	0,194	26	0,438	0,488	41	0,656	0,869	56	0,829	1,483	71	0,946	2,904
12	0,206	0,213	27	0,454	0,510	42	0,669	0,900	57	0,839	1,540	72	0,951	3,078
13	0,225	0,231	28	0,469	0,532	43	0,682	0,933	58	0,848	1,600	73	0,956	3,271
14	0,242	0,249	29	0,485	0,554	44	0,695	0,966	59	0,857	1,664	74	0,961	3,487
15	0,259	0,268	30	0,500	0,577	45	0,707	1,000	60	0,866	1,732	75	0,966	3,732

Determină elementele unui triunghi dreptunghic care are cateta opusă unghiului de 30° egală cu 4 cm.
Cum se schimbă desenul și rezultatele dacă se modifică problema înlocuind unghiul cu măsura de 30° cu un unghi de 60° ?

Gândim critic și constructiv!

Evaluăm nivelul de bază

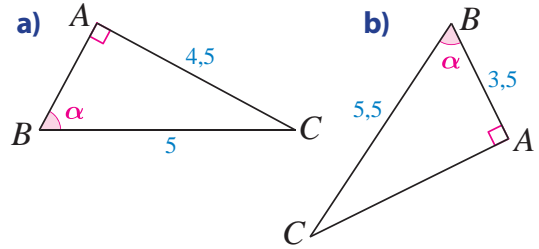
Calculează sin, cos, tg, ctg pentru unghiurile ascuțite ale triunghiurilor din imaginea alăturată.



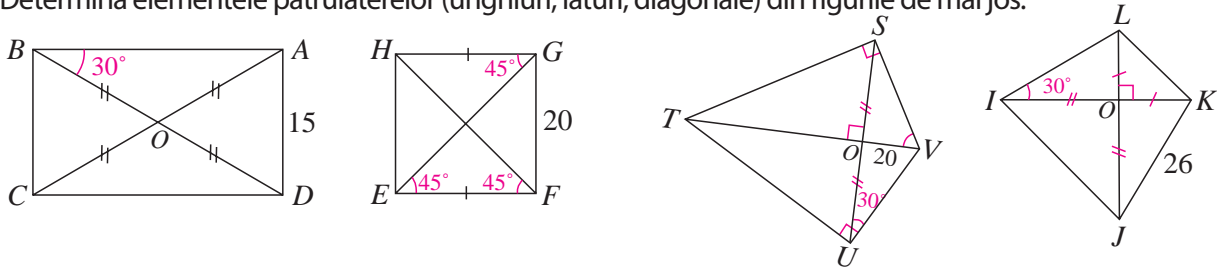
Probleme propuse

1. Află lungimea înălțimii unui triunghi echilateral având latura de 6 cm.
2. Determină lungimea laturii unui triunghi echilateral cu înălțimea de $4\sqrt{3}$ cm.
3. Determină catetele unui triunghi dreptunghic cu un unghi de 30° și ipotenuza de $3\sqrt{2}$ cm.
4. Determină cateta unui triunghi dreptunghic isoscel cu ipotenuza de 20 cm.

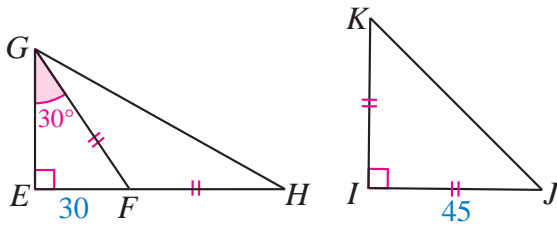
5. Pentru fiecare dintre triunghiurile de mai jos, calculează valorile: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.



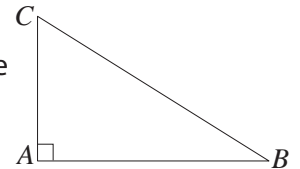
6. Calculează \sin , \cos , tg , ctg pentru unghiurile ascuțite ale triunghiurilor descrise în continuare.
 - a) Triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90^\circ$, $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm;
 - b) Triunghiul DEF cu $\sphericalangle E = 90^\circ$, $DE = 2$ cm, $DF = 4$ cm;
 - c) Triunghiul GHI cu $\sphericalangle H = 90^\circ$, $GH = 2,5$ cm, $HI = 3$ cm.
7. Determină elementele patruleterelor (unghiuri, laturi, diagonale) din figurile de mai jos.



8. Determină lungimile laturilor și măsurile unghiurilor fiecărui triunghi de mai jos.

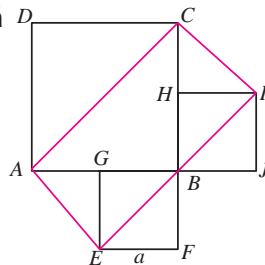


9. Observă trunghiul dreptunghic ABC .
 - a) Demonstrează că $\sin B = \cos C$ și că $\operatorname{tg} B = \operatorname{ctg} C$.
 - b) Dacă unghiul B măsoară 35° , calculează măsura unghiului C . Arată apoi că $\sin 35^\circ = \cos 55^\circ$.
 - c) Utilizează tabelele trigonometrice de la pag. 160 și scrie valorile aproximative pentru: $\cos 27^\circ$; $\cos 73^\circ$; $\operatorname{ctg} 58^\circ$; $\operatorname{ctg} 18^\circ$.

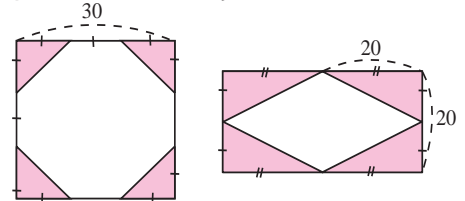


10. $EFBG$ este un pătrat de latură a , iar $AEIC$ este dreptunghi.

- a) Ce fel de patrulater sunt $IHBJ$ și $ABCD$?
- b) Calculează perimetrul dreptunghiului $AEIC$.

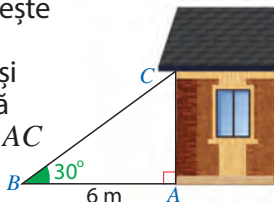


11. Pentru fiecare patrulater de mai jos, calculează perimetrul figurii rămase după înlăturarea colțurilor hașurate.

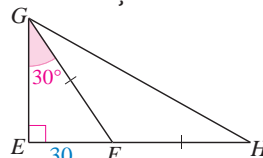


Alege și rezolvă în 5 minute!

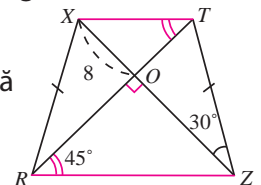
A Folosește datele de pe figură și calculează înălțimea AC a casei.



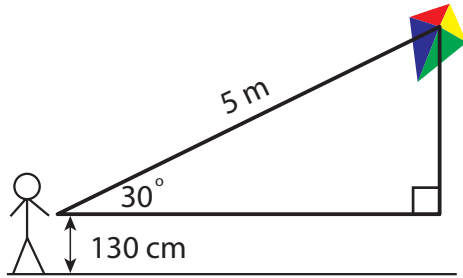
B Pentru figura de mai jos, determină distanța de la F la GH .



C Determină lungimile laturilor și ale diagonalelor patrulaterului $XRZT$ folosind datele din figură (lungimile sunt exprimate în mm.)



O situație-problemă



Tic a înălțat un zmeu cu o sfoară lungă de 5 m. El ar vrea să știe cât de sus a ajuns zmeul.

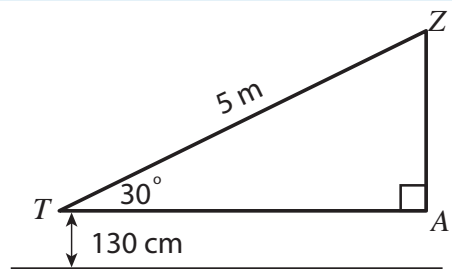


Nu cumva avem prea puține informații ca să putem rezolva problema? ...

Vrem să știm! >>>

Cum determinăm măsurile unghiurilor și lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic căruia îi cunoaștem două elemente, dintre care cel puțin o latură?

Rezolvăm situația problemă



Triunghiul ZTA este dreptunghic în A și are un unghi de 30° . Avem: $\sin 30^\circ = \frac{AZ}{TZ}$.

Obținem $AZ = \frac{TZ}{2} = 2,5(m)$.

Înălțimea la care ajunge zmeul este 3,8 m.

Am înțeles toate etapele! Am verificat și o teoremă deja cunoscută!

Ne amintim ...

Cazurile de congruență ale triunghiurilor dreptunghice

Fiind dat un triunghi dreptunghic, putem construi un triunghi congruent cu acesta dacă știm două elemente dintre cele menționate mai jos.

C.C. 	I.C. 	I.U. 	C.U.
----------	----------	----------	----------

Care este numărul minim de elemente necesar a fi cunoscute pentru a putea determina toate celelalte elemente ale unui triunghi dreptunghic?

Gândim critic și constructiv!

A rezolva un triunghi dreptunghic înseamnă a determina măsurile tuturor elementelor sale. Aceasta se poate face folosind teoremele metrice învățate și rapoartele trigonometrice.

Problemă rezolvată

Un ciclist urcă o pantă lungă de 20 km, apoi coboară 15 km. Cele două direcții de mers sunt perpendiculare, ca în figura alăturată. Care sunt măsurile unghiurilor formate de cele două pante cu orizontala și la ce distanță (pe orizontală) este punctul de plecare de cel de sosire?

Rezolvare:

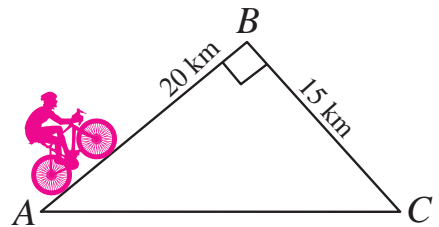
Notăm cu AB distanța la urcare și cu BC distanța la coborâre.

• Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul ABC și avem:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2, \quad AC^2 = 20^2 + 15^2 \quad \text{Așadar } AC = 25 \text{ km.}$$

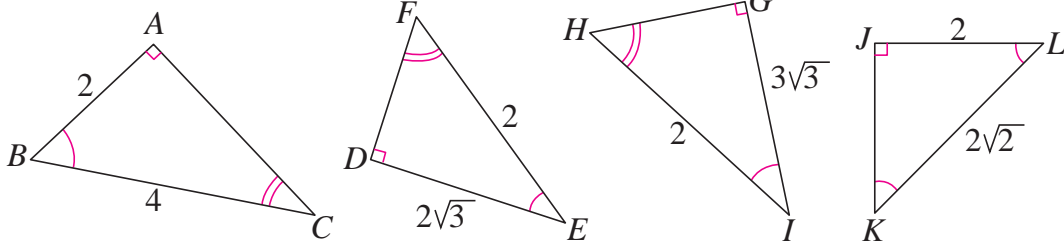
• Pentru a afla măsura unghiului A calculăm $\sin A = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} = 0,6$.

• Din tabelul sinusului obținem cu aproximație $\sphericalangle A = 37^\circ$ și apoi avem $\sphericalangle C = 90^\circ - \sphericalangle A$, adică $\sphericalangle C = 53^\circ$.

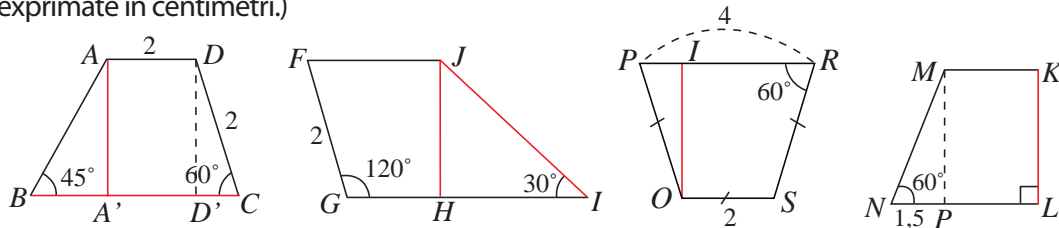


Probleme propuse

1. Determină măsurile unghiurilor fiecărui triunghi.

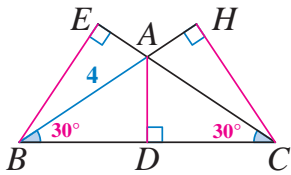


2. Pentru fiecare dintre trapezele de mai jos, calculează lungimile segmentelor desenate cu roșu. (Lungimile sunt exprimate în centimetri.)

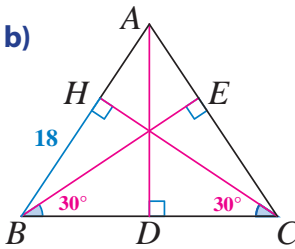


3. Calculează lungimile înălțimilor triunghiului ABC , în fiecare dintre cazurile următoare.

a)

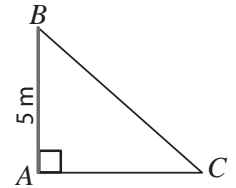


b)



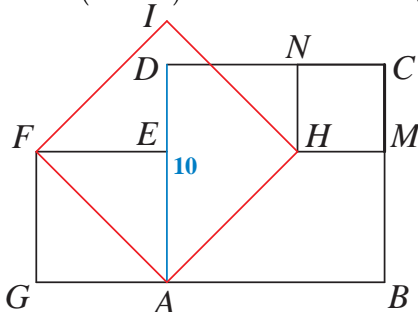
4. În triunghiul dreptunghic ABC știm că $\sphericalangle A = 90^\circ$, $AB = 24$ cm, $BC = 25$ cm. Află: **a)** AC ; **b)** $\sphericalangle B$; **c)** înălțimea AD , $D \in BC$.

5. Un stâlp înalt de 5m este sprijinit cu o bară înclinată ca în figura alăturată. Știind că $\sin(\sphericalangle C) = \frac{5}{7}$, află lungimea barei BC și distanța AC .



6. Știind că în figura de mai jos $A EFG$, $ABCD$, $A F I H$ și $C M H N$ sunt pătrate, determină perimetrul pătratului $A F I H$, dacă:

- a)** $CM = 5(2 - \sqrt{2})$; **b)** $CM = 5(2 + \sqrt{2})$.



7. În triunghiul dreptunghic ABC , $\sphericalangle A = 90^\circ$, avem $AC = 6$ cm și $\sphericalangle B = 30^\circ$. Află: **a)** AB ; **b)** BC ; **c)** $\sphericalangle C$; **d)** lungimea înălțimii din A .

8. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în B . Se ridică în A perpendiculara pe AC care se intersectează cu BC în D . Dacă $AB = 0,3$ cm și $AD = 0,5$ cm, află celelalte elemente ale triunghiului CAD .

9. O țintă aeriană este fixată la înălțimea de 5 m față de sol. Turela unui tanc face cu orizontala un unghi al cărui cosinus este egal cu $\frac{12}{13}$. Află distanța de la tanc la țintă.

Alege și rezolvă în 5 minute!

A

Triunghiul MNP dreptunghic în N are ipotenuza de 10 cm și un unghi de 30° . Află celelalte elemente ale triunghiului.

B

În triunghiul DEF dreptunghic în E , $DE = 6$ cm și $\sin \sphericalangle D = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Află toate elementele triunghiului.

C

În triunghiul dreptunghic ABC , $\sphericalangle A = 90^\circ$, cunoaștem $BC = \sqrt{6}$ și $\operatorname{tg}(\sphericalangle B) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Determină AC .

O situație-problemă



Ana are un joc cu piese magnetice din care a montat figura din imagine. Ea vrea s-o ambaleze într-o cutie-cadou de formă cubică. Pentru aceasta, se întreabă care ar putea fi lungimea minimă a laturii pătratului de la baza cutiei.



Cu barele roșii, Ana a realizat un hexagon cu laturile de lungimi egale și unghiurile congruente.

Deci, un hexagon regulat! Laturile sunt de 10 cm. Ar trebui să aflăm distanța dintre două laturi „opuse”.



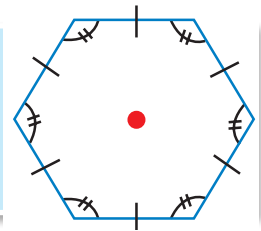
Vrem să știm!

Cum putem determina elementele unor poligoane regulate frecvent folosite?

Definiție

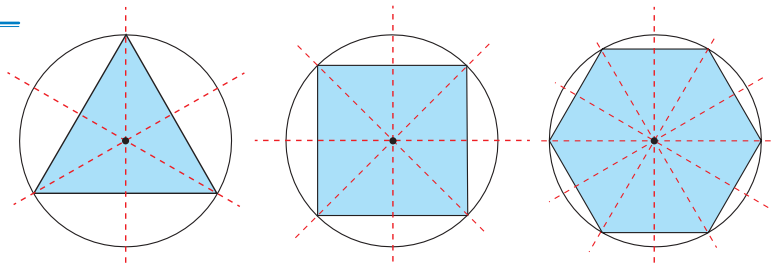
Un poligon se numește **poligon regulat** dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:

- este convex;
- toate laturile sale sunt congruente;
- toate unghiurile sale sunt congruente.

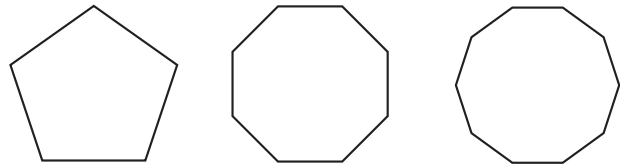


Să explorăm!

Liza a observat că un triunghi echilateral, un pătrat și un hexagon regulat pot fi înscrise în cerc. În fiecare dintre aceste cazuri, prin centrul cercului circumscris trec toate axele de simetrie ale poligoanelor considerate.



Observă poligoanele regulate desenate mai jos. Ce crezi, se păstrează proprietatea observată de Liza și în cazul acestor poligoane?

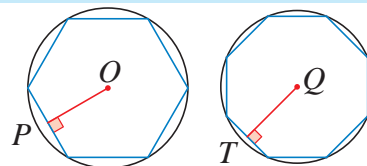


Definiție

Se numește **centrul unui poligon regulat** centrul cercului circumscris poligonului. Centrul unui poligon regulat este intersecția tuturor axelor de simetrie ale poligonului.

Se numește **apotemă a unui poligon regulat** perpendiculara dusă din centrul poligonului pe una dintre laturi. Uneori, prin apotemă înțelegem și lungimea acestui segment.

Exemplu:
 OP și QT sunt apoteme în poligoanele regulate alăturate.



Să analizăm!

Vrem să determinăm relații între raza cercului circumscris, latura, apotema și aria unui poligon regulat. Notăm cu R raza cercului și cu l_n și a_n latura, respectiv apotema unui poligon regulat cu n laturi.

Să analizăm!

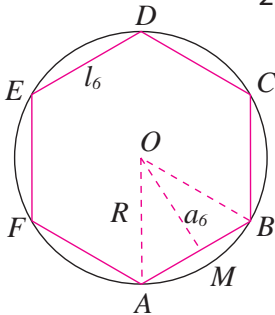
Pătratul

- Considerăm pătratul AB . m teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic AOB și avem:

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 = 2R^2. \text{ Deci } AB = R\sqrt{2}, \text{ adică } l_4 = R\sqrt{2}.$$

- Aria pătratului $ABCD$ este $AB^2 = 2R^2$.
- Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic AOP .

$$\text{Obținem } OP = \frac{R\sqrt{2}}{2}, \text{ adică } a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

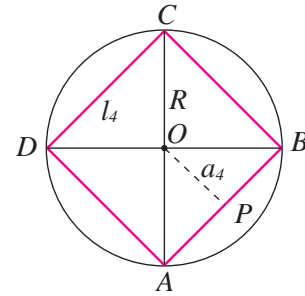


Hexagonul regulat

- Latura hexagonului regulat are lungimea egală cu raza cercului circumscris, adică $l_6 = R$.
- O apotemă a hexagonului regulat $ABCDEF$ este înălțimea triunghiului echilateral AOB .

$$OM = \frac{R\sqrt{3}}{2}, \text{ adică } a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

- Aria hexagonului $ABCDEF$ este $6 \cdot A_{AOB} = 6 \cdot \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$.



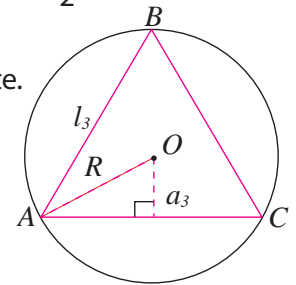
Triunghiul echilateral

- Centrul cercului circumscris triunghiului echilateral ABC este centrul de greutate.

$$\text{Avem: } l_3 = R\sqrt{3}.$$

- Apotema triunghiului echilateral ABC este $OD = \frac{1}{2} \cdot OA$, adică $a_3 = \frac{R}{2}$

- Aria triunghiului ABC este $\frac{l_3^2\sqrt{3}}{4}$, adică $A_{ABC} = \frac{(R\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.



Gândim critic și constructiv!

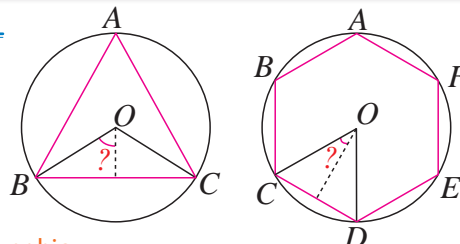
Rezultatele obținute mai sus sunt scrise sintetic în tabelul următor.

Elemente ale unor poligoane regulate în funcție de raza cercului circumscris			
	Triunghi echilateral	Pătrat	Hexagon regulat
Lungimea laturii	$l_3 = R\sqrt{3}$	$l_4 = R\sqrt{2}$	$l_6 = R$
Lungimea apotemei	$a_3 = \frac{R}{2}$	$a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$	$a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$
Aria	$S_3 = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$	$S_4 = 2R^2$	$S_6 = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$

Observă, analizează și compară: ce se întâmplă cu lungimea apotemei atunci când numărul de laturi ale poligonului crește? Dar cu aria poligonului? Explorează și pentru alte poligoane.

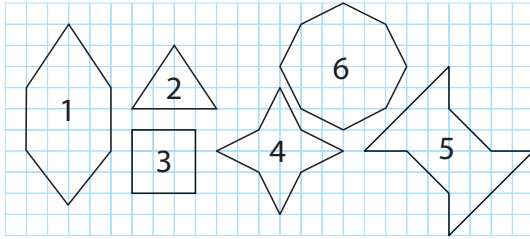
Evaluăm nivelul de bază!

Știind că raza cercurilor este de 12 cm, determină lungimile laturilor și apotemelor poligoanelor regulate alăturate.

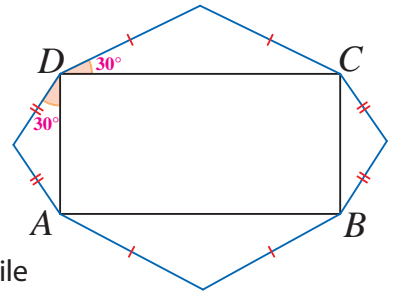


Probleme propuse

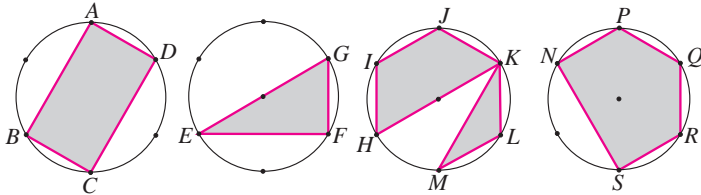
1. Precizează care dintre figuri sunt poligoane regulate și care nu sunt. Justifică.



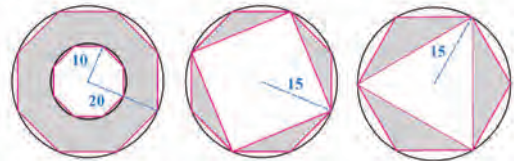
2. Determină perimetrul poligonului cu laturile marcate cu roșu în figura alăturată, știind că laturile dreptunghiului $ABCD$ au lungimile de 30 cm și 15 cm.



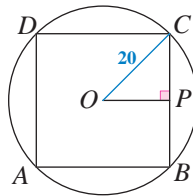
3. Calculează perimetrele și ariile poligoanelor hașurate în figurile alăturate, știind că arcele marcate pe fiecare cerc sunt congruente, iar raza cercurilor este 16.



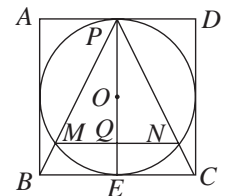
4. Calculează ariile figurilor hașurate, știind că fiecare poligon cu vârfurile pe cerc este regulat.



5. Patrulaterul $ABCD$ este înscris în cercul de centru O și rază 20 cm și circumscris unui cerc concentric cu primul. Calculează perimetrul acestui patrulater.



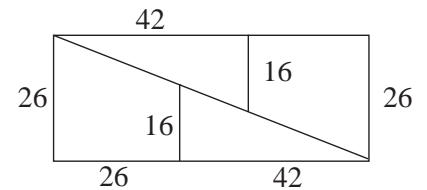
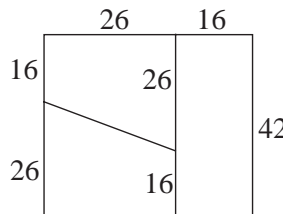
6. Cercul de centru O și rază 3 este înscris în pătratul $ABCD$; P este un punct de tangență, iar segmentele PB și PC intersectează cercul în M , respectiv N . Determină lungimea segmentului MN .



7. Un indicator rutier s-a obținut dintr-o bucată de tablă pătrată $ABCD$, cu latura 1 m, trasând un cerc cu centrul în centrul pătratului, cerc care împarte fiecare latură a pătratului în trei părți egale. a) Calculează raza cercului. b) Calculează aria indicatorului.

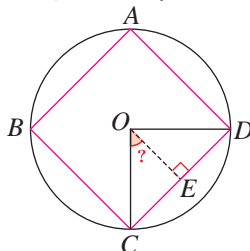


8. Pătratul din figura alăturată are aria de $1764 = 42 \cdot 42$ (cm)². El este descompus, apoi recompus în dreptunghiul alăturat. Aria dreptunghiului este $1768 = 26 \cdot 68$ (cm)². Unde este greșeala?

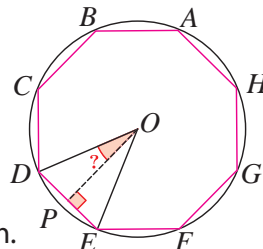


Alege și rezolvă în 5 minute!

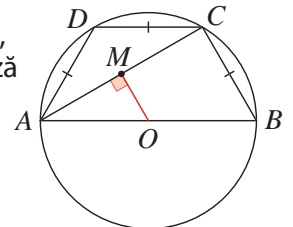
- A** Determină apotema și unghiul marcat în pătratul înscris în cercul de rază $OD = 6$ cm.



- B** Determină apotema și unghiul marcat în octogonul regulat înscris în cercul de rază $OD = 10$ cm.

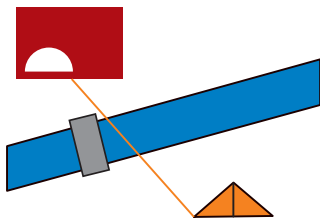


- C** Fiind dat trapezul înscris în cercul de rază $OB = 4$ cm, din figura alăturată, calculează OM .



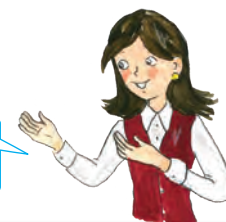
O situație-problemă

În vacanță, Liza ar fi vrut să știe distanța (în linie dreaptă) de la cortul său până la peșteră. Din păcate, între cort și peșteră nu există un drum direct – ar trebui ocolit pe la pod, pentru a trece râul.



Eu știu că distanța dintre două puncte se poate măsura!

Doar dacă putem parcurge în linie dreaptă drumul respectiv!



Vrem să știm!

Cum putem folosi relații metrice sau elemente de trigonometrie în situații practice?

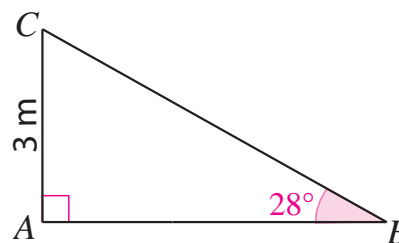
Ne amintim ...

În triunghiul dreptunghic, există câteva rapoarte importante, care fac legătura între lungimile laturilor triunghiului și măsurile unghiurilor acestora. Pentru un unghi dat, valorile acestor rapoarte pot fi găsite în **tabele trigonometrice**.

De exemplu, pentru triunghiul dreptunghic din imagine, putem folosi tabelele trigonometrice de la pagina 160 pentru a aproxima lungimile laturilor AB și BC :

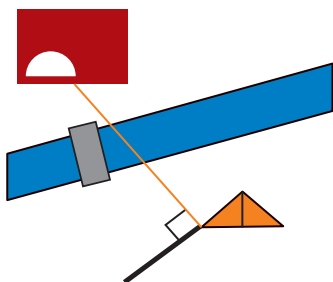
$$\frac{AC}{BC} = \sin B; \frac{3}{BC} \approx 0,469, \text{ deci } BC \approx \frac{3}{0,469} \approx 6,40 \text{ m}$$

$$\frac{AC}{AB} = \operatorname{tg} B; \frac{3}{AB} \approx 0,532, \text{ deci } AB \approx \frac{3}{0,532} \approx 5,64 \text{ m}$$

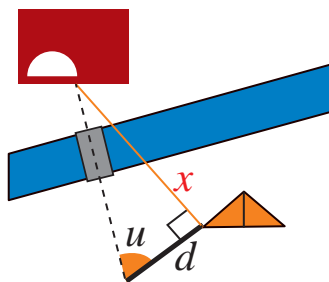


Rezolvăm situația problemă!

Liza ar putea proceda astfel:



1. Trasează o perpendiculară pe direcția de la cort la peșteră



2. Măsoară distanța d și unghiul u

3. Calculează, folosind tabelul de valori ale tangentei:

$$\operatorname{tg}(u) = \frac{x}{d}$$

$$x = d \cdot \operatorname{tg}(u)$$



De exemplu, pentru $d = 50 \text{ m}$ și $u = 70^\circ$, se obține:

$$x \approx 137 \text{ m}$$

Evaluăm nivelul de bază!

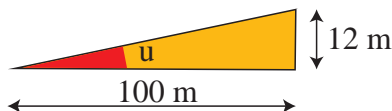
1. Caută într-un tabel de valori trigonometrice, sau folosește un calculator științific, pentru a determina următoarele valori trigonometrice:
 $\operatorname{tg}70^\circ$; $\operatorname{tg}20^\circ$; $\sin70^\circ$; $\sin20^\circ$; $\cos70^\circ$; $\cos20^\circ$.
2. Pentru situația-problemă de mai sus, calculează distanța necunoscută notată cu x , dacă $d = 100 \text{ m}$ și $u = 70^\circ$. Ce observi?

Extindem ...



În călătoriile făcute cu familia, Geo a observat semnul rutier „urcare cu înclinare mare” din imagine. El a citit că procentul înscris pe acest semn precizează cu cât crește diferența de nivel la fiecare sută de metri parcursă.

Pentru a înțelege mai bine semnificația semnului, Geo a realizat schema alăturată.

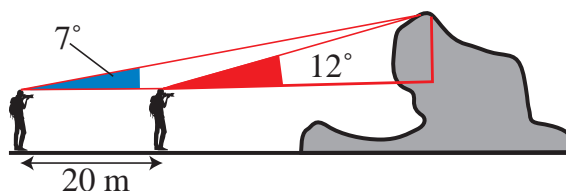


Folosind tabelul pentru valorile trigonometrice, Geo a putut să calculeze astfel înclinația drumului, adică măsura unghiului notat cu u :

$$\operatorname{tg}(u) = \frac{12}{100} = 0,12 \Rightarrow u \approx 7^\circ$$

Aplicăm!

În excursia din Bucegi, Mati a văzut și Sfinxul – acel bloc de piatră cu aspect de om. Din cauza zonei de protecție din jurul Sfinxului, Mati nu s-a putut apropia prea mult; însă, el a putut să facă fotografii din două poziții, aflate la distanță de aproximativ 20 de metri una de alta, ca în schema de mai jos.



Aparatul de fotografiat al lui Mati i-a indicat, pentru fiecare dintre aceste fotografii, unghiul făcut de vârful obiectivului cu orizontala: acestea măsoară 7° , respectiv 12° .

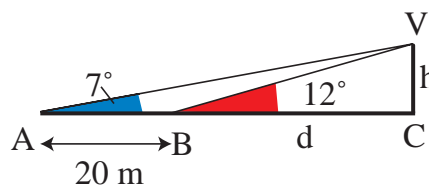
Pe baza datelor de care dispunea, Mati a putut calcula înălțimea Sfinxului. Iată cum a procedat:

În triunghiul dreptunghic VBC , respectiv în triunghiul dreptunghic VAC avem:

$$\operatorname{ctg}12^\circ = \frac{d}{h} \Rightarrow \frac{d}{h} \approx 4,705$$

$$\operatorname{ctg}7^\circ = \frac{20+d}{h} \Rightarrow \frac{20+d}{h} \approx 8,144$$

Deducem că $\frac{20}{h} \approx 3,440$, deci $h \approx 5,8$ m.



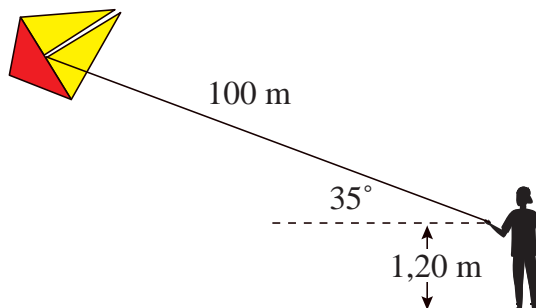
Adăugând înălțimea lui Mati (1,60 m), obținem că înălțimea Sfinxului este de aproximativ 7,4 m.

Continuă calculele de mai sus și află de la ce distanță față de cel mai înalt punct al Sfinxului a realizat Mati cele două fotografii.

Gândim critic și constructiv!

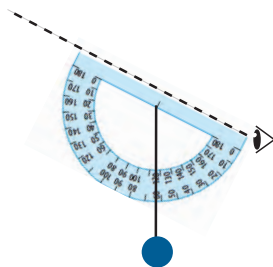
Evaluăm nivelul de bază!

- 1) Folosește datele din figură pentru a calcula înălțimea aproximativă la care se află zmeul.
- 2) Ce unghi ar trebui să formeze ața zmeului cu orizontala, pentru ca acesta să se afle la 70 m înălțime față de sol?

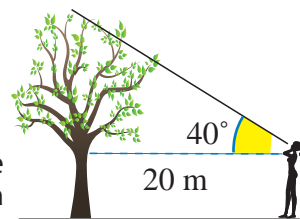


Probleme propuse

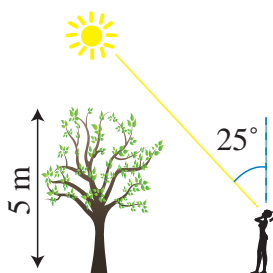
1. Pentru a putea măsura unghiuri pe teren, Ana a atașat de un raportor un fir cu plumb, care indică verticala, ca în imagine. Acum, firul cu plumb trece prin dreptul gradatei ce indică 62° . Ce unghi face direcția vizată cu orizontala?



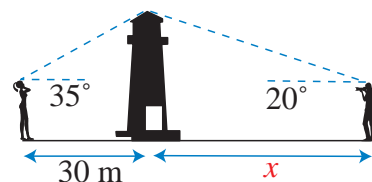
2. Să presupunem că, pentru a calcula înălțimea copacului, ai obținut măsurile trecute pe figura alăturată.
- Utilizează tabele trigonometrice pentru a aproxima $\sin 40^\circ$ și $\operatorname{tg} 40^\circ$.
 - Folosește datele de pe figură pentru a calcula înălțimea copacului.



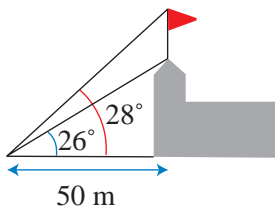
3. La ora 10, razele soarelui fac cu verticala locului un unghi cu măsura de 25° . Ce lungime are umbra copacului din imaginea alăturată? (Rotunjește rezultatul la un număr întreg de centimetri.)



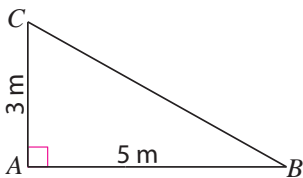
4. Ema și Geo au fotografiat amândoi farul. Folosește datele din imagine pentru a afla la ce distanță (aproximativ) față de far se afla Geo în momentul fotografiei.



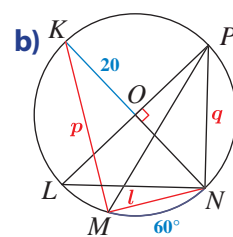
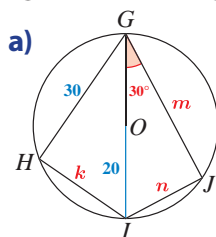
5. Pe sediul primăriei din localitatea lui Geo a fost înălțat un steag. Un observator aflat la 50 m de primărie vede clădirea sub un unghi de 26° față de orizontală, iar vârful steagului - sub un unghi de 28° , ca în imaginea alăturată. Ce înălțime are steagul?



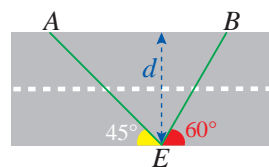
6. Aproximează (la un număr întreg de grade) măsurile unghiurilor ascuțite ale triunghiului dreptunghic ABC din imagine.



7. Determină lungimile notate cu litere pentru segmentele din figura următoare.



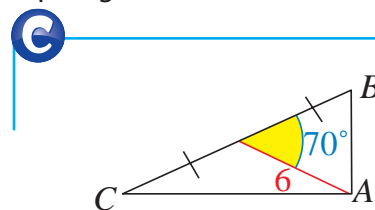
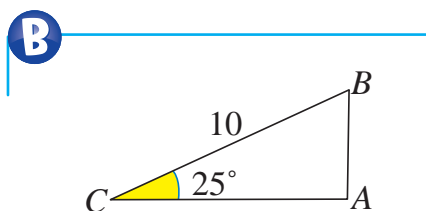
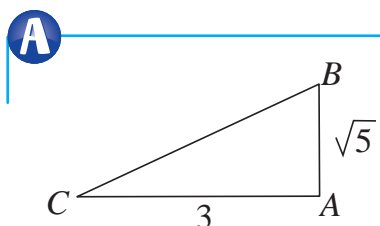
8. Dacă Emil, aflat în E , ar traversa strada pe traseul EA , ar parcurge cu 6 m mai mult decât pe traseul EB . Calculează lățimea d a străzii.



9. În triunghiul dreptunghic ABC , $\sphericalangle A = 90^\circ$, $AD \perp BC$, $D \in BC$. Construim mediana AO , $O \in BC$. Știind că $AD = 4$ cm și $OD = 3$ cm, calculează: a) AB, AC, BD, DC ; b) distanța de la B la segmentul AO .

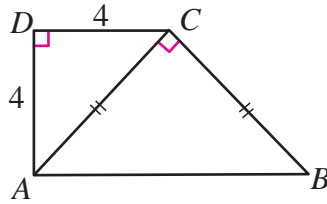
Alege și rezolvă în 5 minute!

Folosește datele din figura aleasă și determină perimetrul triunghiului dreptunghic ABC .



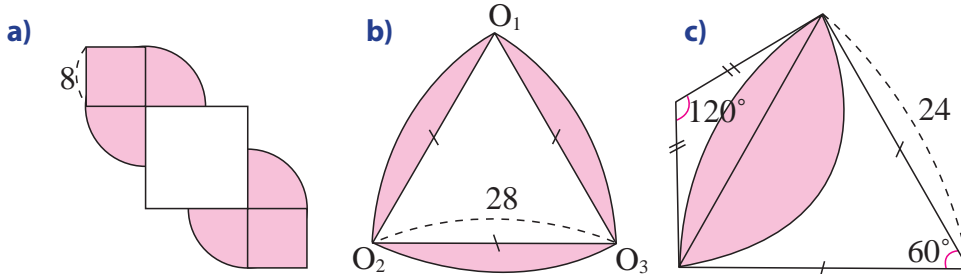
Recapitulăm prin probleme

1. Determină lungimile laturilor patrulaterului $ABCD$ din figura alăturată.

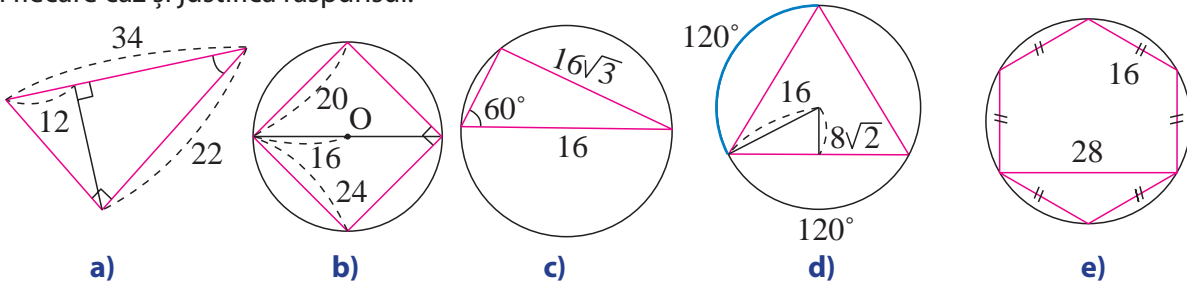


2. Care dintre tripletele următoare de numere reprezintă lungimile laturilor unor triunghiuri? Care dintre triunghiuri sunt dreptunghice? De ce?
- a) 6, 8, 10; b) 20, 48, 52;
c) 300, 400, 500; d) 6, 30, 34.

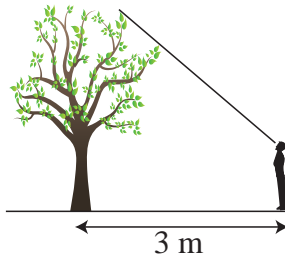
3. Calculează ariile suprafețelor colorate din figurile următoare.



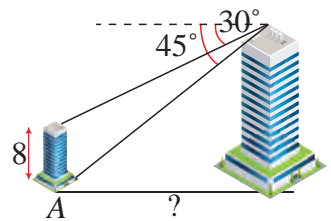
4. Fiecare dintre desenele figurilor următoare conține afirmații contradictorii. Depistează contradicția în fiecare caz și justifică răspunsul.



5. Unghiul sub care vede Dan înălțimea coroanei copacului este de 60° . Știind că înălțimea lui Dan este de 140 cm, și distanța până la copac este de 3 m, află înălțimea copacului. Rotunjește rezultatul prin adaos la sutimi.



6. De pe terasa mall-ului înalt, punctul cel mai de jos al blocului A se vede sub un unghi de 45° , iar punctul cel mai de sus se vede sub un unghi de 30° . Știind că blocul A are înălțimea de 8 m, cât de înalt este mall-ul și la ce distanță de mall se află blocul?

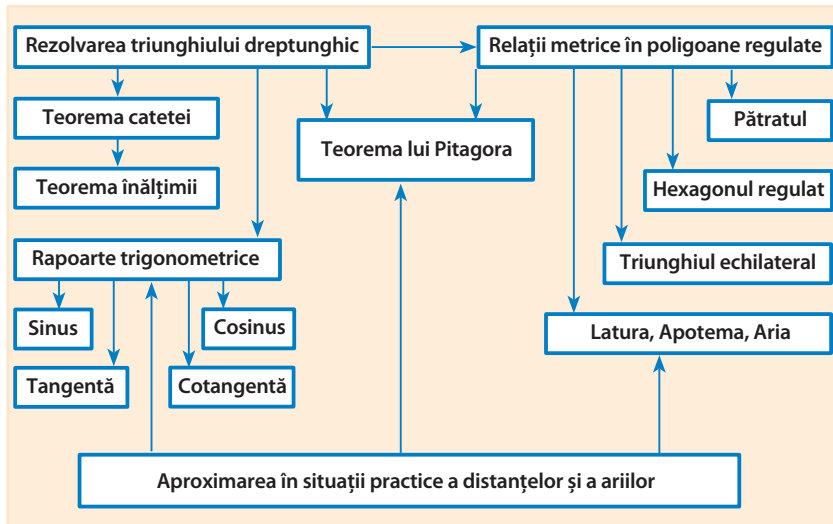


7. Un triunghi are un unghi de 30° , iar laturile care formează acest unghi au lungimile de 12 cm și 14 cm. Calculează aria triunghiului.
8. Arată că, dacă într-un patrulater convex $ABCD$ ariile triunghiurilor ABC, ACD, ABD, BCD sunt egale, atunci patrulaterul este paralelogram.

9. Fie ABC un triunghi și B', C' proiecțiile vârfurilor B și C pe laturile respectiv opuse.
- a) Arată că $BB' = AB \sin A$; $CC' = BC \sin B$.
b) Scrie și justifică alte două relații, analoge celor de la a).
c) Arată că $S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2}$.

Ce am învățat?

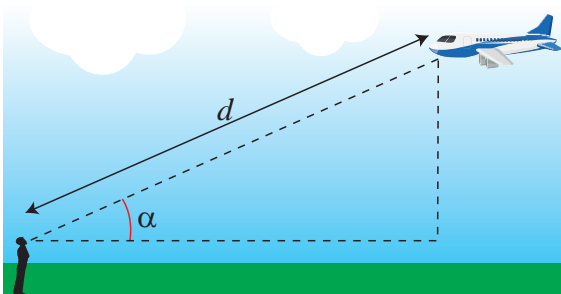
Rezolv teste pentru a verifica dacă pot:



- să aplic teorema lui Pitagora pentru a determina elemente ale unui triunghi dreptunghic;
- să determin lungimi de segmente, măsuri de unghiuri, perimetre, arii în configurații geometrice;
- să utilizez proprietățile patrulaterelor pentru a rezolva probleme;
- să determin elemente ale unor poligoane regulate înscrise într-un cerc;
- să utilizez valori pentru sinusul, cosinusul, sau tangenta sau cotangenta unor unghiuri pentru a determina lungimi de segmente într-un triunghi dreptunghic.

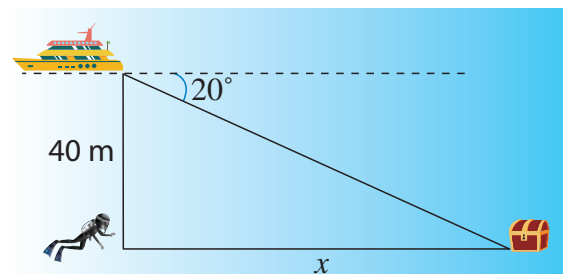
TESTUL 1

1. Un triunghi dreptunghic are ipotenuza de 41 mm și o catetă de 40 mm. Află lungimea celeilalte catete.
2. Un trapez isoscel are bazele de 12 cm, respectiv 32 cm și laturile congruente de 26 cm. Află lungimea înălțimii trapezului.
3. Distanța de la un punct P de pe un cerc la diametrul AB al cercului cu raza de 4 cm este de $2\sqrt{3}$ cm. Află măsurile unghiurilor și laturilor triunghiului ABP .
4. Calculează latura și apotema triunghiului echilateral înscris în cercul tangent interior unui pătrat cu latura de 6 cm.
5. Un observator vede un avion care zboară la o înălțime de 6 000 m sub un unghi de 30° . La ce distanță de observator se află avionul?



TESTUL 2

1. Un triunghi dreptunghic are ipotenuza de 61 mm și o catetă de 40 mm. Află lungimea celeilalte catete.
2. Un trapez isoscel are bazele de 12 cm, respectiv 28 cm și înălțimea de 20 cm. Află lungimile laturilor neparalele.
3. Cercul de rază $3\sqrt{3}$ cm este circumscris triunghiului echilateral ABC . Construim $DC \perp AC$, unde D este pe cerc. Află aria și perimetrul patrulaterului $ACDB$.
4. Calculează lungimea laturii și apotemei unui pătrat înscris în cercul tangent interior unui triunghi echilateral cu latura de $5\sqrt{3}$ cm.
5. Aparatura de bord a unei nave indică un cuțar cu comori sub un unghi de 20° . Un scafandru coboară 40 m sub nivelul mării. La ce distanță se află el de comoară?





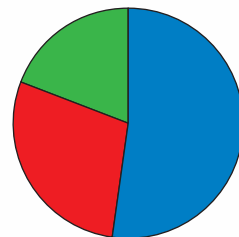
Un prânz sănătos

O dietă echilibrată presupune ca aportul zilnic de calorii să provină:

- între 45% și 65%, din glucide;
- între 20% și 35%, din grăsimi;
- între 10% și 35%, din proteine.
- 1 g de proteine aduce 4kcal
- 1 g de glucide aduce 4 kcal
- 1 g de lipide aduce 9 kcal

Pentru un adolescent, aportul energetic este de 2 800 kcal pe zi, iar masa de prânz trebuie să acopere între 30% și 35% din total.

Dieta echilibrată



- Glucide
- Grăsimi
- Proteine

Plan de lucru

- ✓ **Materiale necesare:** coli de hârtie, creioane colorate.
- ✓ **Scop:** Veți propune un meniu de prânz echilibrat, folosind, eventual, informațiile din tabelul alăturat sau alte informații despre nutrienți, pe care le puteți găsi pe Internet, pe rețetele alimentelor sau la bibliotecă. Veți realiza diagrama circulară a nutrienților din meniul propus.

Realizarea proiectului

Lucrați în echipe de câte trei, patru sau cinci colegi!

- ✓ Propuneți un meniu de prânz.
- ✓ Calculați aportul caloric corespunzător meniului echipei voastre și realizați diagrama circulară a nutrienților din meniul propus de voi.
- ✓ Aduceți modificări meniului până când se încadrează în limitele admise. Consemnați încercările efectuate, alimentele eliminate și pe cele adăugate până să ajungeți la varianta finală.
- ✓ Documentați-vă asupra aportului de kilocalorii al diferitelor alimente, de pe etichetele acestora.
- ✓ Reuniți materialele realizate sub forma unui poster.

Pentru început:

- ✓ Discutați cu colegii despre ce ați mâncat la prânz.
- ✓ Folosind tabelul alăturat, calculați aportul caloric corespunzător aceluși meniu, apoi verificați dacă se încadrează în limitele procentuale pentru o dietă echilibrată.

Conținutul alimentelor

Denumire aliment, cant. 100 g	Apă %	Proteine (g %)	Grăsimi (g %)	Glucide (g %)	kcal
Brânză telemea	57	17	17,2	1	243
Brânză topită	55	20	20,3	1	271
laurt	90	3,2	3,2	3	55
Carne de găină	70	19	9,5	-	167
Carne de porc	49	15	35	-	388
Carne de vacă	74	22	35	-	401
Crap	77	18,9	2,8	-	104
Cartofi noi	80,5	1,7	0,2	17,4	80
Castraveți	94,3	1,3	0,2	2,9	19
Ciuperci	88,4	5	0,5	2,5	35
Dovlecei	93,7	0,9	0,1	3,2	18
Fasole verde	89,4	2	0,2	5,7	33
Pătlăgele roșii	93,9	1,1	0,3	4,3	25
Pătlăgele vinete	91,6	1,3	0,2	4,8	27
Spanac	90,1	3,5	0,3	2	25
Banane	75	1,3	0,6	13,4	66
Caise	85	1,1	0,1	12,9	58
Căpșune	90	0,8	0,6	8,2	43
Cireșe	75	1,1	0,3	18,3	82
Mandarine	88	0,8	0,1	8,7	40
Mere	82	0,3	0,4	16,9	74
Pere	82	0,6	0,6	16	73
Biscuiți	6	8,2	9,5	74	337
Pâine albă	32,1	10,3	2	54	282
Ciocolată cu lapte	1,2	6,9	29,9	49,8	603
Marmeladă	23,3	0,46	-	72,5	289
Miere de albine	18	0,4	-	81,3	335

Interacțiune

În echipa voastră:

- ✓ Discutați etapele proiectului și împărțiți sarcinile în cadrul echipei.
- ✓ Fiecare rezolvă propria sarcină, dar colaborează și cu ceilalți pentru a obține la final un produs foarte bun al întregii echipe.

În clasă:

- ✓ Discutați și stabiliți forma finală a posterului pe care aplicați toate materialele realizate.

Prezentare

Lucrați cu toată clasa! Expuneți posterele realizate.

- ✓ Fiecare echipă va evalua posterele celorlalte echipe.
 - Alegeți prin vot posterul care v-a plăcut cel mai mult.
 - Nicio echipă nu votează propriul poster.
- ✓ Stabiliți clasamentul final, totalizând punctele propuse de fiecare echipă.

Rezolvând exercițiile următoare, îți vei aminti noțiuni și rezultate necesare pentru parcurgerea acestei Unități de învățare. Fiecare problemă propusă valorează 1 punct. Se acordă 1 punct din oficiu.

I. Scrie pe foaia de rezolvare cuvintele sau rezultatele care, înscrise în spațiile punctate, formează enunțuri adevărate.

Mulțimi și operații cu mulțimi

1. Numărul de elemente ale mulțimii $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x < 2\}$ este ...

Operații cu mulțimi

2. Dacă $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 4, 6\}$ și $C = \{2, 4, 5, 8, 9\}$, atunci $(A \cup B) \cap C = \dots$

Mărimi direct proporționale

3. Pentru 3 pâini sunt necesare 1380 g făină. Cantitatea de făină necesară pentru 5 pâini de același fel este de ... g.

II. Scrie pe foaia de rezolvare litera corespunzătoare răspunsului corect pentru următoarele exerciții.

Procente

4. Dacă 20% dintr-un număr este egal cu 12, atunci numărul este:

- A. 240; B. 24; C. 60; D. 600.

Media aritmetică și media ponderată

5. Temperaturile înregistrate într-un oraș în trei zile sunt: 15° , 17° și 10° . Temperatura medie a celor trei zile este de:

- A. 12° ; B. 13° ; C. 16° ; D. 14° .

Media ponderată

6. Un sportiv a reușit două sărituri de 1,5 m, trei sărituri de 1,6 m și cinci sărituri de 1,7 m. Lungimea medie a săriturilor sportivului este:

- A. 1,6 m; B. 1,63 m; C. 1,65 m; D. 1,55 m.

III. Scrie pe foaia de rezolvare soluțiile complete ale exercițiilor următoare.

Reprezentarea pe axa numerelor

7. Reprezintă pe o axă numerele reale: 3; 0; -2; $\frac{1}{2}$; -0,75; 4,5; $\sqrt{2}$.

Teorema lui Pitagora

8. Un triunghi dreptunghic are catetele de 6 cm și 8 cm. Cât sunt lungimea ipotenuzei și a înălțimii corespunzătoare acesteia?

Organizarea datelor

9. Elevii unei clase au obținut la un test la matematică 2 note de 4, 4 note de 5, 4 note de 6, 8 note de 7, 7 note de 8, 3 note de 9 și 2 note de 10. Organizează aceste date într-un tabel și reprezintă-le printr-un grafic cu segmente.

Dacă ai obținut mai puțin de jumătate din punctaj la acest test, este util să revezi definițiile și proprietățile verificate mai sus, pentru a înțelege mai bine ceea ce urmează.

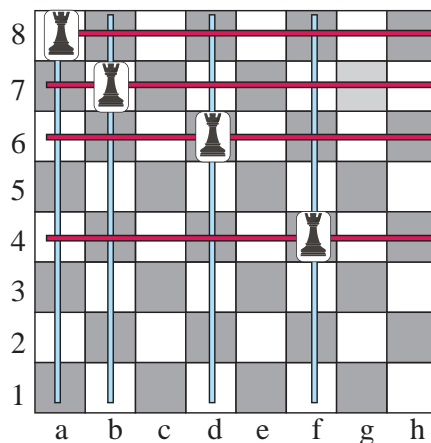
O situație-problemă

În jocul de șah, poziția unei piese pe tablă este descrisă prin indicarea coloanei și a liniei în care se află aceasta. De exemplu, Ta8 înseamnă că în căsuța din coloana a și linia 8 se află un turn.



În configurația din figură avem: Ta8, Tb7, Td6, Tf4. Poți să mai adaugi un turn astfel încât să nu atace un alt turn?

Pot să adaug mai multe!
Ar trebui să calculez toate combinațiile de poziții posibile...



Vrem să știm!

Cum calculăm produsul cartezian a două mulțimi?

Ne amintim ...

Un exemplu de mulțime este $A = \{a; b; c; d; f\}$. Ea are mai multe submulțimi cu două elemente: $\{a; b\}$, $\{a; c\}$, $\{a; d\}$... Ordinea elementelor în mulțime nu contează.

Extindem ...

Dacă vrem ca ordinea să conteze, folosim submulțimi ordonate cu două elemente, adică perechi. Scriem $(a; b)$ și citim „perechea a, b ”.

Definiție

Fiind date două mulțimi nevide A și B , prin **produsul lor cartezian** înțelegem mulțimea $A \times B = \{(a; b) \mid a \in A, b \in B\}$.

De exemplu, dacă $A = \{1; 2\}$ și $B = \{6; 7; 8\}$, atunci $A \times B = \{(1; 6); (1; 7); (1; 8); (2; 6); (2; 7); (2; 8)\}$
 $B \times A = \{(6; 1); (6; 2); (7; 1); (7; 2); (8; 1); (8; 2)\}$.



Am observat că produsul cartezian nu este în general comutativ!

Avem: $\text{card}(A) = 2$ și $\text{card}(B) = 3$, iar $\text{card}(A \times B) = \text{card}(B \times A) = 2 \cdot 3 = 6$.



Problemă rezolvată

Determină mulțimile $A \times B$ și $B \times A$ și cardinalul fiecăreia, știind că $A = \{1; 2\}$, $B = \{5; 6; 7\}$.
Au elemente comune mulțimile $A \times B$ și $B \times A$?

Rezolvare:

Avem $A \times B = \{(1; 5), (1; 6), (1; 7), (2; 5), (2; 6), (2; 7)\}$.

$B \times A = \{(5; 1), (5; 2), (6; 1), (6; 2), (7; 1), (7; 2)\}$. Ambele mulțimi au 6 elemente. Observăm că nu există nicio pereche de numere comună celor două produse carteziane.

Exprimare orală

Observă legătura dintre cardinalele a două mulțimi și cardinalul produsului cartezian al acestora. Enunță regula de calcul a cardinalului produsului cartezian a două mulțimi.

Evaluăm nivelul de bază



- 1) Scrie produsul cartezian al mulțimilor $A = \{0; 1\}$ și $B = \{-1; 4\}$.
- 2) Mulțimea M are 4 elemente, iar mulțimea N are 7 elemente. Câte elemente are $M \times N$?

Probleme propuse



1. Fie $A = \{1; 3\}$ și $B = \{2\}$.
Scrie elementele mulțimilor $A \times B$ și $B \times A$.
Determină cardinalul acestora.
2. Fie $A = \{0; 2; 4\}$.
Scrie elementele mulțimii $A \times A$ și determină cardinalul acestei mulțimi.



4. Dacă I este mulțimea cifrelor impare, iar P este mulțimea numerelor prime, cuprinse între 4 și 12, scrie elementele mulțimii $I \times P$ și află cardinalul acestei mulțimi.
5. Fie mulțimile $A = \{1; 2; 3\}$ și $B = \{x; y; z\}$.
Determină elementele mulțimilor $A \times B$ și $B \times A$, apoi află valorile lui x , y și z astfel încât $A \times B = B \times A$. Sunt aceste valori unice?



9. Stabilește dacă există două mulțimi A și B astfel încât $A \times B = \{(1; 2), (3; 4), (5; 6), (7; 8)\}$.
10. Într-o clasă sunt 14 băieți și 11 fete, care dansează în perechi la o aniversare. Știind că toți băieții au dansat cu toate fetele, calculează câte perechi s-au format.



13. Sistemul hexazecimal este folosit în informatică. Este un sistem de numerație în baza 16, care utilizează 16 cifre: 0, 1, 2, ..., 9, A, B, C, D, E, F. Câte numere de trei cifre se pot scrie în acest sistem?
14. O companie aeriană propune călătorilor, în timpul zborului, următoarele variante de meniu: sandwichi, croasant sau placintă, la alegere cu ceai, cafea, apă sau suc de mere. Descrie toate tipurile de meniu oferite, folosind produsul cartezian a două mulțimi.
15. Liza locuiește într-un bloc cu 3 scări (denumite A, B, C) și 4 etaje plus parter. Liza locuiește la scara C, etajul 2; ea comunică prietenilor această informație, scriind (C; 2). Descrie toate situațiile posibile ale adreselor locatarilor din blocul Lizei, folosind un produs cartezian.

3. Fie $A = \{-3; 2; 7\}$ și $B = \{a; b\}$.
Stabilește dacă:
 $(-3; a) \in A \times B$, $(7; b) \in A \times B$,
 $(a; 7) \in A \times B$, $(b; 2) \in B \times A$,
 $(7; b) \in B \times A$, $(b; a) \in B \times A$,
 $(b; a) \in B \times B$. $(-3; -3) \in A \times A$,

6. Determină mulțimile A și B dacă:
a) $A \times B = \{(1; 2), (1; 4), (3; 2), (3; 4)\}$;
b) $A \times B = \{(-1; 3), (-1; 6), (\sqrt{5}; 3), (\sqrt{5}; 6)\}$.
7. Avem $\text{card } A = 3$ și $\text{card } A \times B = 12$.
Calculează $\text{card } B$.
8. Avem $\text{card } (B \times A) = 15$ și $\text{card } (A) = 5$.
Calculează $\text{card } (B)$.



11. Mulțimea A are 5 elemente. Stabilește dacă există o mulțime nevidă B astfel încât $A \times B$ să aibă 12 elemente.
12. Dacă $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 2\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 : n\}$, determină elementele mulțimilor A , B , $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$ și $B \times B$ și cardinalul acestora.

16. Jocul "Bătălia navală" folosește table de joc de forma de mai jos.

Pe propria tablă, fiecare jucător colorează câte un "vapor" de forma:

--	--	--

Pe rând, fiecare jucător "lansează o bombă", adică indică un pătrățel de pe tabla adversarului; dacă acel pătrățel este ocupat de navă, jucătorul poate lansa o nouă "bombă", atacând pătrățelele vecine.

Geo a lovit, la C6, nava lui Tic; cum ar fi eficient să continue?

E										
D										
C										
B										
A										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Alege și rezolvă în 5 minute!



Fie $A = \{1\}$ și $B = \{2, 3\}$.
Determină $A \times B$.



Pentru a face prezentări la un simpozion, se fac echipe formate dintr-un elev și un profesor. Știind că în școală sunt 63 de elevi și 14 profesori, calculează în câte moduri se poate forma o echipă de reprezentanți.



Dacă $A \times B$ are 97 de elemente, stabilește câte elemente poate avea mulțimea A .

O situație-problemă



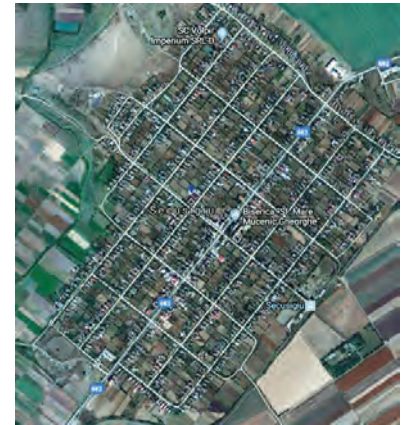
Știi că în județul Arad, există localitatea Secusigiu, în care străzile sunt perpendiculare?



Ar fi frumos să fie paralele cu meridianele și cu paralelele!



Și dacă spun că stau la B4 în Secusigiu, asta înseamnă strada B la numărul 4?



Vrem să știm!

Cum reprezentăm perechile de numere reale?

Ne amintim ...

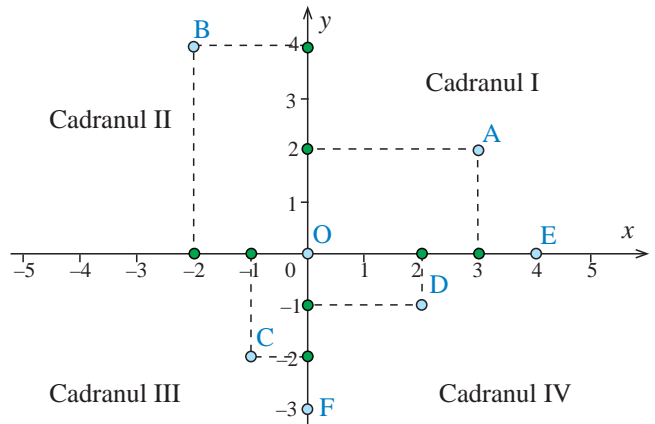
Pentru reprezentarea numerelor reale folosim axa reală, adică o dreaptă pe care s-au fixat: o origine, un sens și o unitate de măsură.

Explorăm ...

Considerăm două axe reale perpendiculare, astfel încât să aibă originea comună în punctul O . Notăm axele Ox și Oy . De obicei, sensul pozitiv al axelor este spre dreapta, respectiv în sus.

Axele de coordonate împart planul în patru zone numite **cadrane**:

Cadrantul II $x < 0, y > 0$	Cadrantul I $x > 0, y > 0$
Cadrantul III $x < 0, y < 0$	Cadrantul IV $x > 0, y < 0$



Dacă folosim aceeași unitate de măsură pe ambele axe, obținem un **sistem de axe ortogonale** sau sistem de coordonate xOy în plan sau reper cartezian xOy ;

axa Ox se numește axa **absciselor**, iar axa Oy se numește axa **ordonatelor**.

Orice punct din plan se proiectează pe cele două axe, obținându-se două numere reale numite **coordonatele punctului**, astfel: pe Ox **abscisa** punctului și pe Oy **ordonata** acestuia.

Prin urmare:

- unui punct oarecare M din plan îi corespunde perechea de numere reale (x_M, y_M) . Scriem $M(x_M, y_M)$, unde x_M este abscisa punctului M , iar y_M ordonata sa.
- oricărei perechi $(a; b)$ de numere reale îi corespunde un unic punct $M(a; b)$, de abscisă a și ordonată b .

În imaginea de mai sus: punctul A are abscisa 3 și ordonata 2, punctul B are abscisa -2 și ordonata 4, punctul C are abscisa -1 și ordonata -2, iar punctul D are abscisa 2 și ordonata -1.

Punctul E se află pe axa Ox și are coordonatele $E(4; 0)$.

În general, dacă $N \in Ox \Rightarrow N(x_N; 0)$.

Punctul F se află pe axa Oy și are coordonatele $F(0; -3)$.

În general, dacă $P \in Oy \Rightarrow P(0; y_P)$.

Evaluăm nivelul de bază

Reprezintă într-un sistem de axe ortogonale punctele: $A(1; 2)$, $B(-2; 3)$, $C(-1; 4)$, $D(0; -2)$ și $E(3; 0)$.

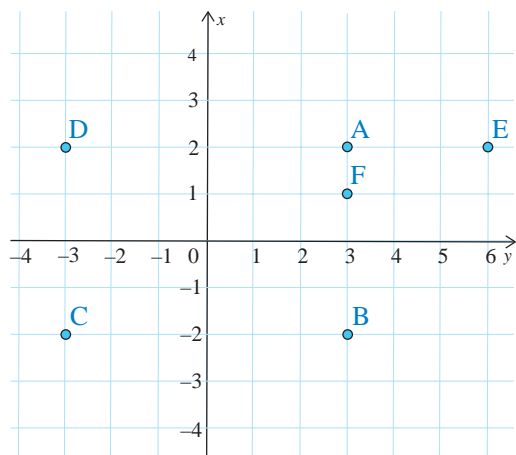
Problemă rezolvată

Într-un sistem de axe ortogonale se consideră punctul $A(3; 2)$. Determină coordonatele și reprezintă următoarele puncte:

- B – simetricul lui A în raport cu axa Ox ;
- C – simetricul lui A în raport cu originea;
- D – simetricul lui A în raport cu axa Oy ;
- E – punctul cu abscisa de două ori mai mare decât abscisa lui A și ordonata egală cu ordonata lui A ;
- F – punctul cu abscisa egală cu abscisa punctului A și ordonata egală cu jumătate din ordonata lui A .

Rezolvare:

Avem: $B(3; -2)$; $C(-3; -2)$; $D(-3; 2)$; $E(6; 2)$ și $F(3; 1)$.



Exprimare orală

Cum s-au obținut coordonatele punctelor B , C și D în problema de mai sus?

Probleme propuse



- Reprezintă într-un sistem ortogonal următoarele puncte: $A(2; 4)$, $B(-3; 3)$, $C(-2; -4)$, $D(5; -2)$, $E(3; 0)$, $F(-1; 0)$, $G(0; 4)$, $H(0; -3)$.



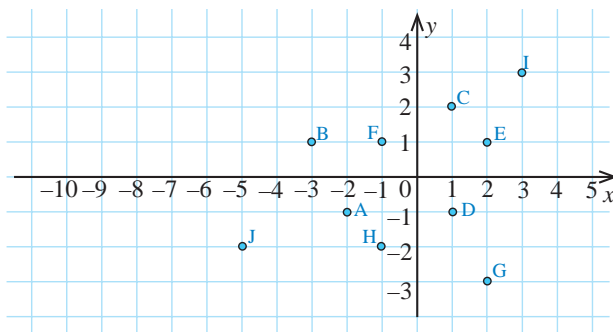
Identifică pentru fiecare dintre aceste puncte abscisa și ordonata.

- Reprezintă într-un sistem de axe ortogonale punctele următoare și precizează în ce cadran se află:

$$A\left(1; \frac{1}{2}\right), B\left(-\frac{5}{4}; \frac{1}{4}\right), C\left(\frac{7}{2}; -2\right), D\left(0; -\frac{1}{4}\right).$$



- Se consideră punctele reprezentate în sistemul de axe ortogonale din figura alăturată.
 - Scrive coordonatele punctelor reprezentate.
 - Precizează cadranul în care se află fiecare punct.
 - Determină coordonatele punctului M , mijlocul segmentului BF .
 - Determină coordonatele punctului N , mijlocul segmentului AE .
 - Precizează poziția dreptei BF în raport cu axa Ox , argumentând răspunsul.

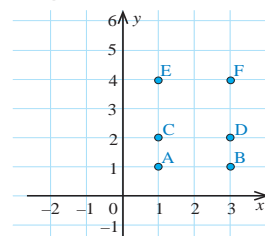


- Stabilește care dintre următoarele puncte $A(5; 4)$, $B(-5; -4)$, $C(5; -4)$, $D(-5; 4)$ sunt:
 - simetrice în raport cu Ox ;
 - simetrice în raport cu Oy ;
 - simetrice în raport cu O .

- Fie $A(2; 2)$. Reprezintă punctul și determină coordonatele simetricilor lui A în raport cu Ox , Oy și respectiv cu O . Stabilește natura patruleterului determinat de cele patru puncte.

- Fie $A = \{1; 2; 3\}$ și $B = \{4; 5\}$. Reprezintă într-un sistem de axe ortogonale produsul cartezian al mulțimilor A și B .

- În imaginea alăturată este reprezentat produsul cartezian $M \times N$. Determină M și N .



- Demonstrează că, pentru orice numere reale x și y , punctele O , M și N sunt coliniare, unde O este originea reperului cartezian, iar $M(x, x)$ și $N(y, y)$.

Alege și rezolvă în 5 minute!

A

Reprezintă într-un sistem de coordonate xOy punctele

$$A(1; -1) \text{ și } B\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

B

Reprezintă punctele $A(1; 1)$ și $B(5; 3)$. Determină coordonatele punctului M , mijlocul segmentului AB .

C

Fie punctele $A(1; 1)$ și $B(5; 3)$. Reprezintă segmentul AB și simetricul segmentului AB în raport cu axa Ox .

O situație-problemă

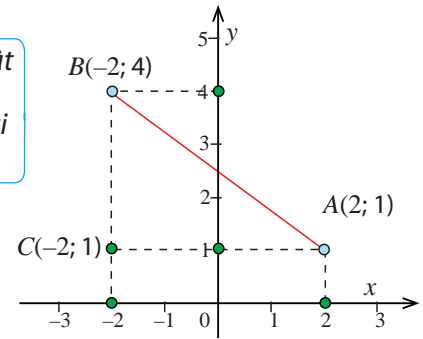


În jocul meu electronic trebuie să calculez distanța dintre două puncte A și B, pe care le-am marcat în figură. Cum oare ar trebui să procedez?



Ia un punct C astfel încât să formezi un triunghi dreptunghic! Apoi aplici teorema lui Pitagora!

E bună ideea!



Vrem să știm!

Cum calculăm distanța dintre două puncte din plan dacă știm coordonatele lor?

Ne amintim ...

Pe axa numerelor reale, distanța dintre două puncte este egală cu modulul diferenței coordonatelor.

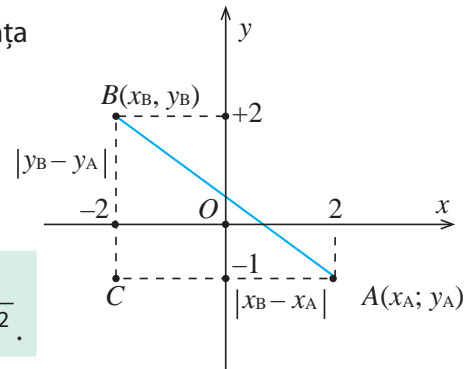
Demonstrăm!

În imaginea alăturată, punctele A și C au aceeași ordonată, deci distanța dintre ele se poate calcula pe axa absciselor ca fiind $|-2 - 2| = 4$.

Distanța dintre B și C se poate calcula pe axa ordonatelor, pentru că punctele au aceeași abscisă: $|-1 - 2| = |-3| = 3$.

Atunci, aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul ABC, obținem:

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 = 4^2 + 3^2 = 25, \text{ deci } AB = 5.$$



Teoremă

Fiind date punctele $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$,

distanța dintre A și B este $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Demonstrație:

Fie punctul $C(x_B, y_A)$; în triunghiul ABC, dreptunghic în C, lungimile catetelor sunt $AC = |x_B - x_A|$, respectiv $BC = |y_B - y_A|$.

Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul ABC, obținem:

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2, \text{ deci } AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Problemă rezolvată

Se consideră punctele $A(0; 5)$, $B(2; -1)$ și $C(8; 1)$.

- Reprezintă punctele într-un sistem de axe ortogonale.
- Arată că triunghiul ABC este isoscel.
- Determină coordonatele mijlocului segmentului AC.

Rezolvare:

b) Avem $AB = \sqrt{(2-0)^2 + (-1-5)^2} = 2\sqrt{10}$ și $BC = \sqrt{(8-2)^2 + (1-(-1))^2} = 2\sqrt{10}$

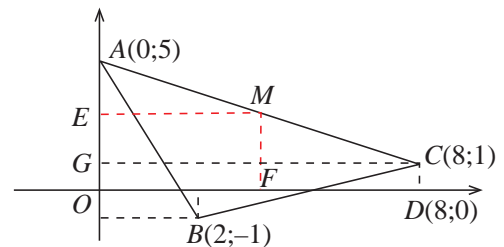
Rezultă că $AB \equiv BC$, deci triunghiul ABC este isoscel.

- c) Fie M mijlocul segmentului AC, E proiecția sa pe axa Oy și F proiecția sa pe axa Ox.

ME este linie mijlocie în $\triangle AGC$ (G este proiecția lui C pe Oy) $\Rightarrow ME = \frac{CG}{2} = 4$.

MF este linie mijlocie în trapezul ACDO (D este proiecția lui C pe Ox) $\Rightarrow MF = \frac{CD + AO}{2} = \frac{1+5}{2} = 3$.

Deci $M(4; 3)$



Exprimare orală

Definește linia mijlocie și enunță proprietatea folosită în problema rezolvată.

Putem extinde rezultatele de la punctul **c)** astfel:

Dacă M este mijlocul segmentului AB , cu $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$, atunci

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

Propune un exercițiu prin care verifici acest fapt.

Evaluăm nivelul de bază

- ① Calculează distanța dintre punctele $A(2; 5)$ și $B(-1; 5)$.
- ② Gândește-te și răspunde fără a face reprezentarea, apoi verifică prin desen răspunsul dat. Este punctul $M(1; 3)$ poziționat mai sus decât punctul $P(4; 4)$ în același sistem de axe ortogonale?

Probleme propuse

1. Fie punctele: $A(2; 0)$, $B(5; 0)$ și $C(-1; 0)$.
Reprezintă punctele într-un sistem de coordonate xOy și calculează lungimile segmentelor AB , BC și AC .
2. Fie punctele: $M(0; 4)$, $N(0; -3)$ și $P(0; -2)$.
Reprezintă punctele într-un sistem de coordonate xOy și calculează lungimile segmentelor MN , NP și MP .
3. Fie punctele: $A(2; -1)$, $B(-2; -2)$ și $C(-3; 2)$.
a) Reprezintă punctele într-un sistem de coordonate xOy .
b) Află lungimile laturilor triunghiului ABC .
c) Stabilește natura triunghiului ABC .
d) Calculează perimetrul și aria triunghiului.
4. Fie punctele: $M(4; 0)$, $N(0; 5)$ și $P(4; 5)$.
a) Reprezintă punctele într-un sistem ortogonal.
b) Arată că triunghiul MNP este dreptunghic.
c) Calculează aria triunghiului MNP .
d) Calculează perimetrul triunghiului MNP .
5. Fie punctele: $D(3; 0)$, $E(0; 3)$ și $F(6; 6)$.
a) Reprezintă punctele într-un sistem de coordonate xOy .
b) Calculează lungimile laturilor și perimetrul triunghiului DEF .
c) Stabilește natura triunghiului DEF .
d) Ce tip de patrulater este $OEFG$, cu $G(6; 0)$?
e) Calculează aria patrulaterului $OEFG$.
f) Determină aria triunghiului DEF .
6. Fie punctele: $A(-2; 3)$, $B(2; 3)$, $C(4; 0)$, $D(2; -3)$, $E(-2; -3)$, $F(-4; 0)$.
a) Reprezintă punctele într-un sistem ortogonal.
b) Calculează perimetrul poligonului $ABCDEF$.
c) Determină lungimea segmentului care unește mijloacele laturilor AF și CD .
d) Compară ariile patrulaterelor $ABCF$, $CDEF$, $ABDE$ și $BCEF$.
e) Calculează raportul dintre aria poligonului $ABCDEF$ și aria triunghiului ABF .
7. Fie $A(1; 2)$. Determină coordonatele simetricului lui A în raport cu punctul $P(-1; 3)$.
8. Se consideră punctele: $A(1; 1)$, $B(4; 2)$, $D(2; 4)$. a) Determină coordonatele punctului C , știind că $ABCD$ este paralelogram. b) Calculează aria paralelogramului $ABCD$.



Alege și rezolvă în 5 minute!

A Calculează distanța dintre punctele $A(1; -1)$ și $B(1; 3)$.

B Stabilește natura triunghiului ABC , dacă $A(2; 1)$, $B(6; 3)$ și $C(0; 5)$.

C Determină numerele reale x , dacă distanța dintre punctele $A(1; -1)$ și $B(x+1; x-1)$ este $2\sqrt{3}$.

O situație-problemă

Liza a consultat pe Internet un site, specializat în prognoza meteo pentru a afla care este temperatura în Bucegi, la Babele. Pe site ea a găsit informațiile de mai jos.

Ora	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Temperatura (°C)	5	4	3	3	4	4	4	4	5	5	6	7	7	8	8	8	9	9	10	9	8	7	7	6	5

Cum a evoluat temperatura pe parcursul zilei?

Vrem să știm!

Cum putem reprezenta grafic aceste date, astfel încât să le putem interpreta ușor?

Să explorăm!

Unele temperaturi se repetă.



Temperatura 5°C apare de 4 ori în 24 de ore: la orele 0, 8, 9 și 24.

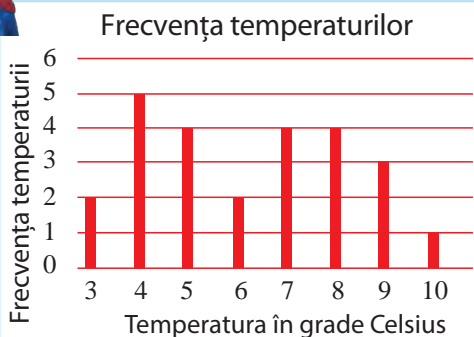
Deci frecvența temperaturii 5°C este 4. Ar fi mai simplu dacă le scriem într-un tabel.



Temperatura	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecvența	2	5	4	2	4	4	3	1

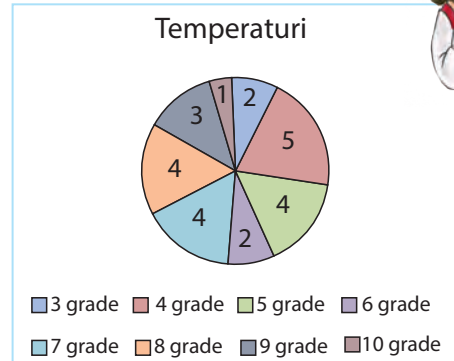


Poate ar fi mai clar dacă am reprezenta frecvențele temperaturilor folosind un grafic cu bare.



La graficele cu bare, înălțimea barelor este direct proporțională cu mărimea măsurată.

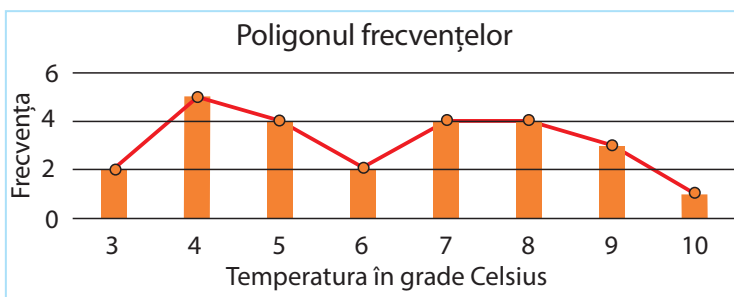
Dar putem să folosim și o diagramă circulară!



La diagramele circulare, măsura unghiului la centru al porțiunii din disc corespunzătoare unei mărimi este direct proporțională cu mărimea măsurată.



Apoi construim poligonul frecvențelor, unind mijloacele capetelor barelor din diagramă.



Totuși, niciuna dintre reprezentări nu mă ajută să-mi dau seama cum evoluează temperatura în timp!



Extindem ...

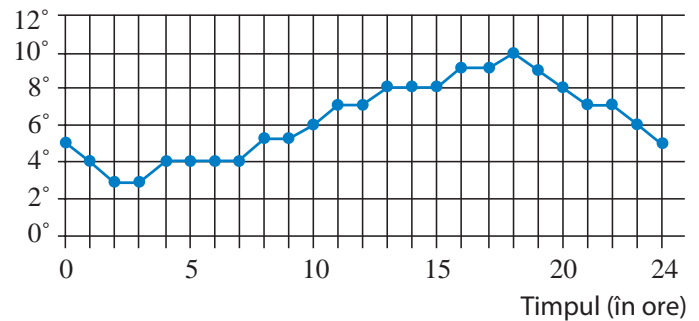


Evoluția temperaturii în timp poate fi reprezentată într-un sistem de axe ortogonale prin punctele care au abscisa egală cu ora și ordonata egală cu valoarea temperaturii la acea oră.

Spunem că am reprezentat temperatura **în funcție** de timp.

Când se reprezintă grafic dependența unei mărimi în funcție de alta, de obicei, se reprezintă mărimea independentă (în cazul de față, timpul) pe orizontală și mărimea dependentă de aceasta (în cazul de față, temperatura) pe verticală.

Temperatura



Exprimare orală

Care este temperatura maximă pe parcursul zilei? La ce oră se atinge această temperatură? Cum evoluează temperatura pe parcursul zilei? Discută despre acestea cu un coleg/colegă, folosindu-te de grafic.

Problemă rezolvată

Ionel are un depozit de materiale de construcții. El pregătește pentru clienții săi saci de nisip de diferite mase.

Într-o zi, a pregătit următoarele comenzi: 12 kg; 15 kg; 25 kg; 12 kg; 12 kg; 25 kg; 12 kg; 25 kg; 15 kg; 15 kg; 15 kg; 25 kg; 12 kg; 25 kg; 15 kg; 12 kg; 12 kg; 15 kg.

a) Copiază pe caietul tău tabelul alăturat, completează-l și află câți saci a încărcat în total.

Masă sac de nisip (în kg)	12	15	25
Număr de comenzi			

b) Realizează un grafic cu bare care să ilustreze numărul de saci de nisip vânduți din fiecare fel.

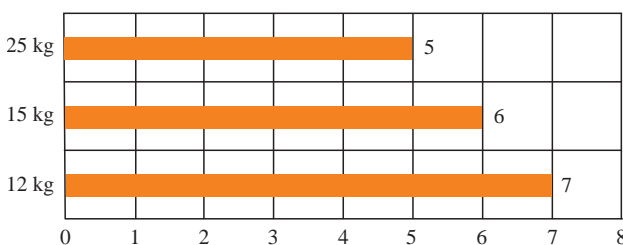
c) Realizează o diagramă circulară care să ilustreze numărul de saci de nisip de fiecare fel vânduți.

Rezolvare:

Masă sac de nisip (în kg)	12	15	25
Număr de comenzi	7	6	5

$$7 + 6 + 5 = 18 \text{ (saci)}$$

b) Grafic comenzi saci cu nisip



c) Pentru a reprezenta numărul de saci de nisip printr-o diagramă circulară, aplicăm regula de trei simplă și determinăm unghiul la centru al porțiunilor corespunzătoare din disc.

Pentru sacii de 12 kg avem:

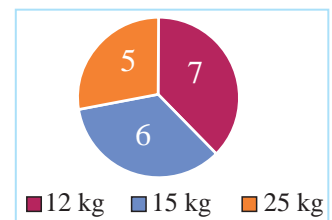
$$\begin{aligned} 18 \text{ saci} &\dots\dots\dots 360^\circ \\ 7 \text{ saci} &\dots\dots\dots x \end{aligned} \Rightarrow x = \frac{7 \cdot 360^\circ}{18} = 140^\circ$$

Similar, pentru sacii de 15 kg obținem

$$y = \frac{6 \cdot 360^\circ}{18} = 120^\circ, \text{ iar pentru cei de 25 kg avem}$$

$$z = \frac{5 \cdot 360^\circ}{18} = 100^\circ.$$

Se obține diagrama circulară alăturată.



Evaluăm nivelul de bază

În tabelul de mai jos este prezentat cursul euro-leu din perioada 9-17 mai 2017.

Data	09.05	10.05	11.05	12.05	13.05	14.05	15.05	16.05	17.05
€	4,5507	4,5481	4,5505	4,5443	4,5443	4,5443	4,5499	4,5476	4,5539

- În ce dată euro a avut cea mai mare valoare?
- Care a fost cursul mediu al euro în această perioadă?

Probleme propuse



1. În tabelul de mai jos, se află informații referitoare la producția principalelor produse agricole din România, pe cap de locuitor, conform *Anuarului Statistic al României*. Urmărește tabelul și răspunde:

Produs agricol	Unitate de măsură	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Grâu	kg	145,8	349,6	255,4	287	354	264,1	365,1
Secară	kg	1	1,5	1,6	1,7	1,6	0,9	1,2
Porumb	kg	185,4	382,2	391,5	446,6	581,6	296,8	565,7
Sfeclă de zahăr	kg	35,9	34,4	40,1	41,4	32,8	35,9	51,5
Lapte	l	292,3	287,3	276,8	242,7	248,5	241	243,8
Ouă	buc.	312	326	305	306	314	319	320

- În ce an s-a produs cea mai mare cantitate de secară?
- În ce an producția de lapte a atins valoarea minimă?
- Care este produsul agricol pentru care s-au obținut cele mai multe kg în anul 2011?



2. La ferma sa, Marin crește găște, porci și iepuri. El zice: „Am 4 găscani și 7 scoafe. Am tot atâția iepuri, câte iepuroaice: câte 18 din fiecare. Cu totul am 80 de animale, dintre care 52 de femele.”

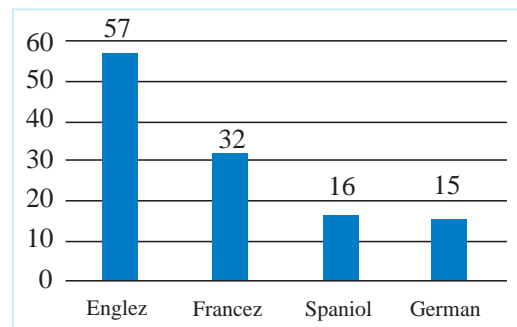
a) Completează tabelul de mai jos.

	Masculi	Femele	Total
Găște			
Porci			
Iepuri			
Total			

Folosindu-te de informațiile din tabel, răspunde la următoarele întrebări:

- La fermă sunt mai mulți masculi sau mai multe femele?
- Care animale sunt cele mai numeroase?

3. Maria și-a întrebat colegii de școală care este limba lor străină preferată. Graficul de mai jos prezintă rezultatele investigației făcute de ea.



- Câți elevi a întrebat Maria?
- Care este limba străină cea mai preferată?
- Realizează un tabel în care să completezi informațiile strânse de Maria.
- Realizează o diagramă circulară ca să ilustrezi preferințele colegilor Mariei.

- 4.** Numărul de aur φ este un număr întâlnit în matematică, arhitectură, biologie și în alte domenii. Primele 50 de zecimale ale lui φ sunt:
 $\varphi = 1,61803\ 39887\ 49894\ 84820\ 45868\ 34365\ 63811\ 77203\ 09179\ 80576.$

- a)** Alcătuieste un tabel care să prezinte frecvența fiecărei cifre între primele 50 de zecimale ale lui φ .
b) Reprezintă frecvențele cifrelor cu ajutorul unui grafic cu bare.

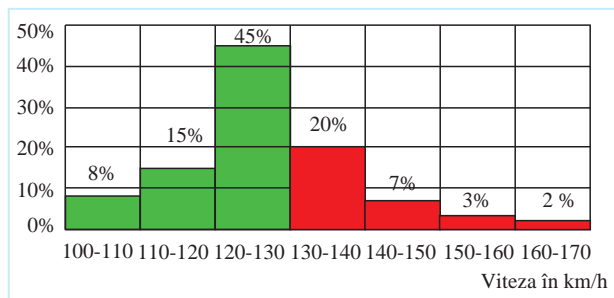
- 5.** R407C este un gaz utilizat în special ca fluid de răcire. Pentru acest gaz se cunoaște corespondența din tabelul de mai jos.

Temperatura (în °C)	-20	-14	-10	-4	0	4	10	16	30
Presiunea (în bari)	1,79	2,5	3,05	3,98	4,68	5,46	6,77	8,27	9,38

Reprezintă grafic presiunea în funcție de temperatură.

- 6.** În graficul de mai jos este reprezentată frecvența în procente a vitezelor înregistrate pe *Autostrada Soarelui* într-o zi cu trafic ridicat.

- a)** De ce se folosesc două culori?
b) Care este procentul autovehiculelor care au circulat cu viteze cuprinse între 110 km/h și 120 km/h?
c) Care este procentul autovehiculelor care au depășit viteza regulamentară?
d) Desenează poligonul frecvențelor.



- 7.** Tic a primit cadou de la bunicii săi o bicicletă, pe care este montat un sistem de localizare prin GPS care înregistrează distanța la care se află bicicleta de casa lui Tic. În tabelul de mai jos, avem informațiile furnizate de GPS într-o zi.

Ora	8	10	12	14	16	18	20
Distanța (km)	0	2	3	1,5	3,5	1	0

- a)** Copiază tabelul alăturat și completează-l cu săgeți, după model, pentru a asocia fiecărei ore distanța la care se afla Tic față de casă, în acea zi.

Ora	Distanța (km)
8	0
10	1
12	1,5
14	2
16	2,5
18	3
20	3,5

- b)** Realizează un grafic în care să reprezinți tabelul alăturat, care indică distanța parcursă de Tic, într-o altă zi.

Alege și rezolvă în 5 minute!

Mai multe persoane au răspuns la întrebarea „Cât durează masa dvs. de prânz?”. Răspunsurile sunt înregistrate în tabelul de mai jos:

Timpul (în min)	10	15	25
Număr de persoane	2	15	19

- A** Câte minute petrec la masa de prânz majoritatea persoanelor respondente?

- B** Reprezintă datele din tabel utilizând un grafic cu bare.

- C** Reprezintă datele din tabel utilizând o diagramă circulară.



- Se consideră mulțimile $A = \{-2; 0; 1; 3\}$ și $B = \{-2; 5\}$. Determină mulțimile $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$ și $B \times B$ și cardinalul acestora.
- a) Reprezintă într-un sistem de axe ortogonale punctele: $A(2; 4)$, $B(-3; 1)$, $C(-4; -2)$, $D(1; -2)$, $E(0; -1)$, $F(3; 0)$.
b) Calculează lungimile segmentelor AC , BF și DE .



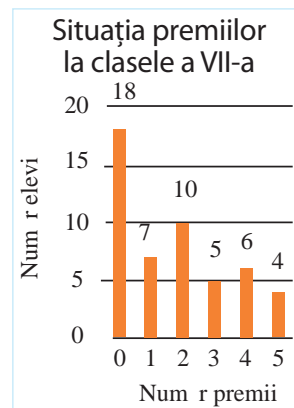
- Determină elementele mulțimii B știind că: $A = \{0; 3; 6\}$ și $A \times B = \{(0; 1), (0; 2), (3; 1), (3; 2), (6; 1), (6; 2)\}$.
- a) Mulțimea A are 5 elemente, iar $A \times B$ are 20 de elemente. Câte elemente are mulțimea B ?
b) $\text{card}(A \times A) = 16$. Câte elemente are mulțimea A ?
c) Există mulțimi A astfel încât $\text{card}(A \times A) = 24$?
- Elevii unei clase sunt mășurați și se constată că: 4 elevi au înălțimea între 140 cm și 150 cm, 7 elevi între 150 cm și 160 cm, 12 elevi între 160 cm și 170 cm și 9 elevi între 170 cm și 180 cm. Alcătuieste graficul cu dreptunghiuri care să reprezinte aceste date și trasează poligonul frecvențelor corespunzător.



- Scrive elementele mulțimilor $A \times B$ și $B \times A$, dacă $A = \{k \in \mathbb{Z} \mid 4 \leq k^2 \leq 10\}$ și $B = \{\sqrt{n} \mid n \in \mathbb{N}, n \leq 2\}$.
Reprezintă apoi, în același sistem de axe de coordonate xOy , cu verde punctele corespunzătoare perechilor din $A \times B$ și cu roșu punctele corespunzătoare perechilor din $B \times A$.



- Pe graficul alăturat este reprezentată situația premiilor obținute de elevii claselor a șaptea dintr-o școală la olimpiade și concursuri, într-un an școlar.
a) Alcătuieste un tabel în care să înregistrezi datele din graficul dat.
b) Adaugă o linie la tabelul alcătuit anterior, în care să înregistrezi frecvențele exprimate în procente.
c) Reprezintă frecvențele de mai sus printr-o diagramă circulară.



- În tabelul de mai jos sunt înregistrate cantitățile de apă, măsurate în metri cubi, consumate de o familie, în decurs de patru luni.

luna	mai	iunie	iulie	august
m^3 apă	10,9	11,25	12,4	8,75



- Ce lună are cel mai mare consum de apă?
- Dar cel mai mic?
- Câtă apă a consumat familia în total, în cele patru luni?

- Reprezintă punctele $A(1; 1)$, $B(2; 2)$ și $C(1; 3)$ într-un sistem de axe ortogonale și arată că $AB \equiv BC$.

- În decurs de 10 zile, Ana măsoară și își notează timpul în care parcurge distanța de acasă până la școală, măsurat în minute, astfel: 12, 11, 10, 14, 13, 13, 12, 13, 15, 13.

- Completează tabelul următor, utilizând valorile notate de Ana.

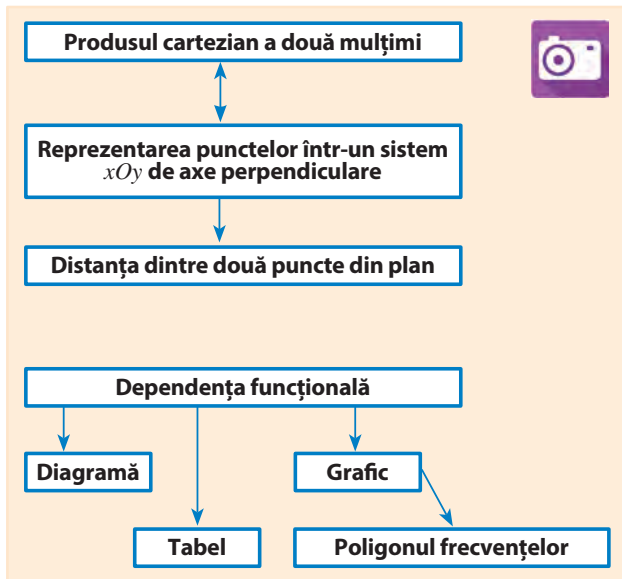
Minute	10	11	12	13	14	15
Numărul de zile						

- Calculează durata medie a drumului parcurs de Ana până la școală.
- Alcătuieste un grafic cu bare corespunzător tabelului de la punctul a).

- Fie punctele: $A(1; 0)$, $B(0; 3)$ și $C(-2; 1)$.

- Reprezintă punctele într-un sistem de axe ortogonale.
- Calculează lungimile laturilor triunghiului ABC și stabilește natura acestui triunghi.
- Calculează lungimea înălțimii din A a triunghiului ABC .
- Calculează aria triunghiului ABC .

Ce am învățat?



Rezolv testele pentru a verifica dacă pot:

- să reprezint produsul cartezian a două mulțimi numerice finite;
- să aplic egalitatea dintre cardinalul produsului cartezian a două mulțimi finite și produsul cardinalilor celor două mulțimi;
- să reprezint într-un sistem de axe ortogonale puncte având coordonatele numere reale;
- să exprim distanța dintre două puncte în plan ca lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic într-un sistem de coordonate xOy ;
- să rezolv probleme simple de geometrie pornind de la reprezentarea punctelor într-un sistem de coordonate xOy ;
- să interpretez informații extrase dintr-o listă;
- să reprezint date într-un tabel;
- să reprezint date prin grafice;
- să prelucrez statistic date reprezentate într-un tabel (calculul mediei sau trasarea poligonului frecvențelor).

TESTUL 1

- a)** $A = \{0, 5; 1\}$. Scrie elementele mulțimii $A \times A$.
b) Știind că mulțimea B are 5 elemente, iar $\text{card}(B \times M) = 30$, determină $\text{card}(M)$.
- Se consideră punctele $A(-2; 2)$, $B(1; 1)$ și $C(-1; -1)$.
a) Reprezintă punctele A , B și C într-un sistem ortogonal de axe.
b) Calculează perimetrul triunghiului ABC .
c) Determină distanța de la punctul A la dreapta BC .
- Rezultatele unor elevi la un concurs sunt: 3 elevi au obținut 10 puncte, 5 elevi au obținut 11 puncte, 4 elevi \rightarrow 12 puncte, 8 elevi \rightarrow 13 puncte, 9 elevi \rightarrow 16 puncte, 3 elevi \rightarrow 17 puncte, 6 elevi \rightarrow 18 puncte și 2 elevi \rightarrow 20 puncte.
a) Câți elevi au participat la concurs?
b) Alcătuieste un tabel cu rezultatele obținute.
c) Construiește un grafic cu bare care să reprezinte repartizarea numărului de elevi după punctajele obținute la concurs.
d) Calculează punctajul mediu obținut de elevi.

TESTUL 2

- a)** Scrie elementele mulțimii $A \times B$, dacă $A = \{-1; 0; 2\}$ și $B = \{1; 3\}$.
b) Din cinci fete și trei băieți vrem să alcătuiem o echipă formată cu o fată și un băiat. Câte posibilități sunt în total pentru alcătuirea echipei?
- Se consideră punctele: $D(-1; 2)$, $E(-1; -2)$ și $F(3; -2)$.
a) Reprezintă punctele D , E și F într-un sistem ortogonal de axe.
b) Calculează lungimea segmentului determinat de mijloacele laturilor DE și EF .
c) Determină aria triunghiului DEF .
- Într-volum, sunt 8 povestiri care au între 5 și 10 pagini, 10 între 11 și 15 pagini, 8 între 16 și 20 de pagini, 4 între 21 și 25 de pagini și 2 povestiri între 26 și 30 de pagini.
a) Câte povestiri au maxim 20 de pagini?
b) Alcătuieste un tabel cu repartizarea numărului de povestiri în funcție de numărul de pagini.
c) Construiește un grafic cu dreptunghiuri care să reprezinte repartizarea povestirilor după numărul de pagini.
d) Trasează poligonul frecvențelor corespunzător graficului realizat.



Exerciții și probleme recapitulative



1. Care dintre numerele: 0; 5; $\frac{1}{4}$; -4; 0,25; 81;

$\frac{169}{196}$; 1,44; -32; 8; 100 sunt pătrate ale unor numere raționale?

2. Determină numerele întregi x și y pentru care are loc egalitatea $\{16, x^2, 49\} = \{y^2, 49, 144\}$.

3. Calculează: **a)** $\sqrt{4}$, $\sqrt{0}$, $\sqrt{49}$, $\sqrt{64}$; **b)** $\sqrt{121}$, $\sqrt{225}$, $\sqrt{676}$, $\sqrt{900}$; **c)** $\sqrt{1225}$, $\sqrt{6561}$, $\sqrt{121104}$;
d) $\sqrt{9,61}$, $\sqrt{0,1125}$, $\sqrt{156,25}$;

e) $\sqrt{\frac{9}{16}}$, $\sqrt{\frac{625}{324}}$, $\sqrt{\frac{25}{2401}}$, $\sqrt{\frac{144}{3025}}$;

f) $\sqrt{0,(44)}$, $\sqrt{1\frac{9}{16}}$, $\sqrt{1\frac{25}{144}}$.

4. Calculează: $\sqrt{10^2}$, $\sqrt{(-3)^2}$, $\sqrt{3^8}$, $\sqrt{(-5)^{10}}$.

5. Efectuează: **a)** $\sqrt{4^2 \cdot 3^2}$; **b)** $\sqrt{4^2 + 3^2}$;

c) $\sqrt{5^2 - 4^2}$; **d)** $\sqrt{\frac{3^2 \cdot 7^2}{2^2}}$; **e)** $\sqrt{\frac{3^2 + 4^2}{8^2 + 6^2}}$.

6. Calculează: **a)** $\sqrt{900} : (\sqrt{225} - \sqrt{144} + \sqrt{256})$;

b) $\frac{15}{7} \cdot \sqrt{0,0196} + 1, (3) \cdot \sqrt{\frac{9}{100}} + 0, (6) \cdot \sqrt{5,76}$;

c) $\sqrt{136110 + \sqrt{2627} - \sqrt{676}}$.

7. Calculează cu două zecimale exacte: **a)** $\sqrt{8}$;

b) $\sqrt{23}$; **c)** $\sqrt{125}$; **d)** $\sqrt{1000}$; **e)** $\sqrt{7,22}$.

8. Află cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu: **a)** $\sqrt{5}$; **b)** $\sqrt{43}$; **c)** $\sqrt{261}$; **d)** $-\sqrt{11}$.

9. Fie mulțimea

$$A = \left\{ 6; \sqrt{6}; -5; -\sqrt{25}; 3\pi; \sqrt{\frac{25}{16}}; -\frac{25}{16}; 2,121314... \right\}.$$

Determină mulțimile: $A \cap \mathbb{N}$, $A \cap \mathbb{Z}$, $A \cap \mathbb{Q}$,
 $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ și $A \cap \mathbb{R}$.

10. Determină numerele naturale m și n pentru care $x = 12 - 2\sqrt{6} + 6\sqrt{5} + \sqrt{m} - 2\sqrt{n}$ este natural.

11. Compară: **a)** $\sqrt{3}$ cu $\sqrt{6}$; **b)** $\sqrt{37}$ cu $\sqrt{45}$;

c) $\sqrt{46}$ cu 7; **d)** 11 cu $\sqrt{116}$; **e)** $-\sqrt{11}$ cu $-\sqrt{13}$;

f) $-\sqrt{33}$ cu $\sqrt{28}$; **g)** $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ cu 1.

12. Unul dintre cei mai mici viruși cunoscuți are diametrul 8×10^{-9} m. De câte ori este mai mare acest diametru decât cel al unui atom de hidrogen, care este aproximativ 10^{-10} m?

13. Determină numerele reale x , astfel încât:

a) $|x| = \sqrt{7}$; **b)** $|x| = \sqrt{2} - 1$; **c)** $|x-3| = \sqrt{3}$.

14. Află numărul real x , care verifică relația:

a) $x^2 = 2$; **b)** $x^2 = 4$; **c)** $x^2 = 11$; **d)** $3x^2 = 9$;

e) $5x^2 = 25$; **f)** $x^2 + 3 = 11$; **g)** $x^2 - 2 = 10$.

15. Calculează: **a)** $2\sqrt{7} + 5\sqrt{7}$; **b)** $7\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$;

c) $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} + 7\sqrt{3}$; **d)** $\sqrt{75} - \sqrt{12} + \sqrt{27}$;

e) $(4\sqrt{2} + 5\sqrt{2}) - (3\sqrt{2} - 6\sqrt{2})$;

f) $3 - 2\sqrt{10} + 4\sqrt{11} + 3\sqrt{10} - 9 + \sqrt{11}$.

16. Calculează: **a)** $\sqrt{6} \cdot \sqrt{8}$; **b)** $\sqrt{24} : \sqrt{6}$;

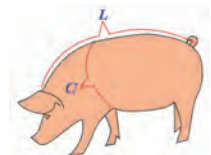
c) $\sqrt{2}(\sqrt{2} - 3)$; **d)** $(\sqrt{42} + \sqrt{35}) : \sqrt{7}$.

17. Experimental s-a dedus o formulă prin care se poate calcula cât cântărește aproximativ un porc, măsurând distanța L de la baza urechilor la coadă și circumferința trunchiului C , în spatele picioarelor din față. Relația este $m = 69,3 \cdot C^2 \cdot L$, unde m se exprimă în kilograme, iar C și L în metri.

a) Cât cântărește un porc, dacă $L = 1,2$ m și $C = 1,4$ m?

Rotunjește rezultatul la cel mai apropiat număr întreg.

b) Exprimă C din relația dată.



18. Raționalizează numitorii: a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; b) $\frac{3}{\sqrt{6}}$;

c) $\frac{6}{5\sqrt{3}}$; d) $-\frac{5}{\sqrt{10}}$; e) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$; f) $\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

19. Calculează: a) $(\sqrt{2})^{-1}$; b) $(\sqrt{3})^{-2}$; c) $(\sqrt{5})^{-3}$;

d) $(5\sqrt{2})^{-1}$; e) $(2\sqrt{3})^{-2}$; f) $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^{-1}$.

20. Verifică dacă $x = 2$ este soluție a ecuației:

a) $4x - 3 = 5$; b) $1 - 2x = 3$; c) $\frac{x}{2} - 5 = -4$.

21. Determină numărul real m , știind că:

a) -1 este soluție a ecuației $mx - 3 = 2$;

b) $\sqrt{2}$ este soluție a ecuației $3\sqrt{2}x + 2m = -6$.

22. Într-un lot de telefoane, 3996 sunt fără defecte. Probabilitatea de a alege un telefon defect este 0,001. Câte telefoane din acel lot au defecte?

23. Un investitor are o sumă de lei cu care ar putea cumpăra 5 200 euro sau 5 900 dolari. Un euro este cu 0,56 lei mai scump decât un dolar. Câți lei are investitorul?

24. Nivelul radiațiilor înregistrate în România a crescut după accidentul nuclear de la Cernobil din 1986 cu 1,23 unități, consecința fiind atingerea unui nivel al radiațiilor de $\frac{139}{98}$ ori mai mare față de cel de dinaintea accidentului. Calculează, în unități, nivelul radiațiilor în România înainte de accident.

25. Calculează media aritmetică și media geometrică a numerelor $a = \sqrt{11} - \sqrt{7}$ și $b = \sqrt{11} + \sqrt{7}$. Compară aceste medii.

26. Rezolvă în mulțimea \mathbb{R} ecuațiile:

a) $\frac{3x+10}{3} - \frac{x+13}{7} = x - \frac{16}{3}$;

b) $\frac{2}{5}(4x-1) - \frac{1}{2}(1+3x) = -2$; c) $\frac{4x-1}{x+4} = \frac{3}{2}$.

27. Află un număr, știind că dublul său este cu 12 mai mare decât 8.

28. Cheltuielile cu concursul „Eurovision” în 2012 și 2013 au totalizat 56 milioane euro. În 2013, Suedia (țara gazdă) a alocat 40% din cât a alocat în anul precedent Azerbaidjan. Câți euro a alocat țara gazdă din 2012?

29. Află un număr care, adunat la numărătorul și la numitorul fracției $\frac{7}{5}$, dă fracția $\frac{10}{9}$.

30. Un butoi plin cu apă cântărea 138 kg. S-a golit jumătate din el și acum are 78 kg. Cât cântărește butoiul gol?

31. Arată că sistemele următoare sunt

echivalente: $\begin{cases} x - y = 9 \\ x + y = 3 \end{cases}$ și $\begin{cases} \frac{x}{y} = -2 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$.

32. Dacă, în laboratorul de biologie, așezăm elevii unei clase câte patru la un microscop, trei elevi nu au loc, iar dacă îi așezăm câte cinci la un microscop, rămân două microscopae nefolosite. Câte microscopae sunt în laborator și câți elevi sunt în clasă?

33. Rezolvă sistemele de două ecuații cu două necunoscute:

a) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3(x + 3y) - 2(x + 2y) = -5 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} -x + 2y + \frac{1}{3}(y - 3) = \frac{1}{4}(x - 3) \\ \frac{2(y - x)}{5} + \frac{x + 1}{3} = \frac{y + 2}{4} \end{cases}$.

34. 8 coli și 5 mine costă 58 €, iar 5 coli și 8 mine de același fel costă 46 €. Cât costă o coală și o mină?

35. Doi elevi au rezolvat împreună 27 de probleme. Câte probleme a rezolvat fiecare, dacă numărul de probleme rezolvate de primul este egal cu 80% din numărul de probleme rezolvate de al doilea?

36. Scrie produsul cartezian al mulțimilor $A = \{-1; 2; 3\}$ și $B = \{-2; 0\}$.

37. Se consideră punctele $A(-2; 3)$, $B(-2; -2)$, $C(3; -2)$ și $D(4; 2)$. a) Reprezintă cele patru puncte într-un sistem de axe ortogonale.

b) Calculează perimetrul patrulaterului $ABCD$.

c) Cât este înălțimea din B a triunghiului ABC ?

38. Un fierăstrău cu lama lungă de 44 cm are dinții de forma unor triunghiuri dreptunghice ca în imaginea alăturată. Câți dinți are fierăstrăul?

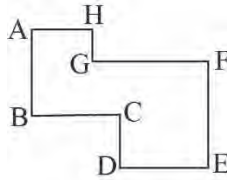


39. Un patrulater are perimetrul de 48 m și lungimile laturilor direct proporționale cu 2, 3, 5, respectiv 6. Calculează lungimile laturilor lui.

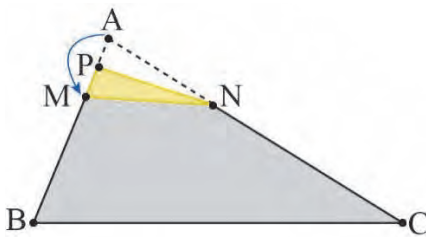
40. În imaginea alăturată $BC=2 \cdot AB$. De câte ori este mai mare distanța parcursă de punctul C decât distanța parcursă de punctul B ?



41. Poligonul din figura alăturată are oricare două laturi consecutive perpendiculare, $AB = 40$ cm, $CD = 15$ cm, $BC = 25$ cm și $DE = 35$ cm. Calculează perimetrul poligonului.



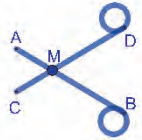
42. În triunghiul ABC , din figura alăturată, unghiurile B și C au măsurile de 70° , respectiv 35° . Îndoim colțul A și vârful A se suprapune cu un punct M al laturii AB , diferit de B . Determină măsura unghiului BMC .



43. PARC este un parc dreptunghiular și AC este o alee. Emil merge din P la alee pe cel mai scurt drum, ajungând în punctul E . Dacă $EC=24$ m și $EA=54$ m, calculează distanța parcursă de Emil.

44. Un covor are formă de pătrat. Distanța dintre două colțuri opuse este 6 m. Cât costă covorul, dacă 1 m^2 costă 16 lei?

45. Pentru foarfeca din imaginea alăturată se cunosc $AM = CM = 4$ cm, $BM = DM = 10$ cm și $AC = 5$ cm. Calculează distanța BD .

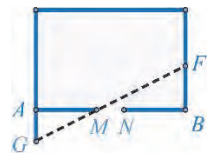


46. Fie pătratul $ABCD$ și E un punct în exteriorul acestuia, astfel încât $\triangle BEC$ este echilateral. Calculează măsura unghiului AEB .

47. În trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, AC și BD sunt bisectoarele unghiurilor BAD , respectiv ABC . Demonstrează că trapezul este isoscel.

48. Demonstrează că trapezul $ABCD$ este isoscel, dacă $AB \parallel CD$, $AC \cap BD = \{O\}$ și $\triangle AOB$ este isoscel.

49. În mijlocul unui perete lung de 5 m al unei camere dreptunghiulare se află o ușă lată de 1 m. George, aflat în punctul G , astfel încât $AG=1$ m, vede o floare ce se află în punctul F .

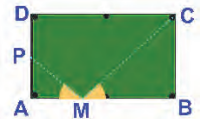


Calculează BF .

50. Un triunghi dreptunghic are aria de 12 cm^2 și ipotenuza de 8 cm. Calculează lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei.

51. Un triunghi isoscel are înălțimea relativă la baza de 8 cm și laturile congruente de 10 cm. Calculează aria triunghiului.

52. Masa dreptunghiulară de biliard din imagine are $AB=240$ cm și $BC=120$ cm. O bilă se deplasează pe traseul indicat, astfel ca $PA=PD$, iar $\angle AMP = \angle BMC$. Calculează AM .



53. Determină ipotenuza unui triunghi dreptunghic isoscel cu o catetă de 8 cm.

54. În paralelogramul $ABCD$, cu aria de 20 cm^2 , O este punctul de intersecție a diagonalelor. Calculează aria $\triangle AOB$.

55. Un romb are aria de 30 cm^2 și o diagonală de 6 cm. Calculează lungimea celeilalte diagonale.

56. Pătratul $ABCD$ are latura 6 m, M mijlocul lui BC și N mijlocul lui CD . Calculează aria $\triangle AMN$.

57. În dreptunghiul $ABCD$, $\{O\} = AC \cap BD$, $AB = 5$ cm și $BC = 4$ cm. Calculează aria $\triangle AOD$.

58. În trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$ și $\sphericalangle A = 90^\circ$, considerăm punctul E pe segmentul AD , astfel încât $CD \equiv AE$ și $DE \equiv AB$. Dacă $AB = 6,5$ cm și $CD = 3,5$ cm, calculează aria $\triangle BCE$.

59. Cu rigla negradată și compasul, împarte un segment: **a)** în 3 părți egale; **b)** în raportul $3/4$.

60. Fie E și F puncte pe prelungirile laturilor AB , respectiv AC , ale $\triangle ABC$, astfel ca $EF \parallel BC$. Dacă $AE = 4$ cm, $AB = 7$ cm și $AF = 3$ cm, află FC .

61. Fie $ABCD$ patrulater convex și E , F și G pe segmentele AC , BC și, respectiv, CD , astfel încât $EF \parallel AB$ și $EG \parallel AD$. Arată că $GF \parallel BD$.

62. Ce fel de patrulater formează mijloacele laturilor unui: **a)** dreptunghi; **b)** romb?

63. Fie M , N , P mijloacele laturilor $\triangle ABC$. Arată că $\triangle ABC$ și $\triangle MNP$ au același centru de greutate.

64. Fie $ABCD$ paralelogram, M și N mijloacele laturilor AB și CD , $AN \cap BD = \{P\}$ și $CM \cap BD = \{Q\}$. Arată că $DP \equiv PQ \equiv QB$.

65. O cheie pătrată are distanța între „dinți” de 3,5 cm. Poate fi folosită această cheie pentru a strânge o piuliță hexagonală cu latura 2 cm?



66. Lângă Bastionul Măcelarilor din Baia Mare se află o zonă verde compusă dintr-un dreptunghi cu $L=15$ m și $l=8$ m, având pe laturile mai scurte două semicercuri. În centru este un bazin cu apă, având forma unui cerc cu diametrul 6 m. Ce arie are suprafața cu gazon din interiorul acestei zone?



67. În dreptunghiul $ABCD$, $AD = 10$ cm și proiecția lui AD pe diagonala AC are lungimea de 6 cm. Află lungimea segmentului AB .

68. Un trapez dreptunghic are bazele cu lungimea de 20 cm și, respectiv, 12 cm, și un unghi cu măsura 45° . Cât este perimetrul lui?

69. Calculează aria rombului de latură 6 cm și un unghi de 30° .

70. $\triangle ABC$ dreptunghic are cateta AB de 8 cm și $\text{tg } B = 2,5$. Calculează lungimea catetei AC .

71. O scară de 52 dm, sprijinită pe un perete, ajunge la înălțimea de 20 dm. La ce înălțime va ajunge o scară de 73 dm, sprijinită pe sol în același loc ca și prima scară?

72. Dacă $\triangle ABC$, cu $\sphericalangle A = 90^\circ$ și $BC = 2AB$ are perimetrul $3(3 + \sqrt{3})$ cm, află lungimile laturilor.

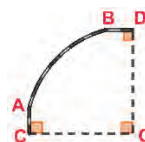
73. Un trapez are bazele de 6 m și, respectiv, 9 m, și laturile neoparalele de 4 m, respectiv 5 m. Arată că trapezul este dreptunghic.

74. O masă are forma unui hexagon regulat cu latura 2 m. Arată că aria suprafeței acestei mese este mai mare de 10 m².

75. Află raza unui cerc în care o coardă de 8 cm este la distanța de 3 cm față de centrul acestuia.

76. Determină raza cercului cu: **a)** lungimea de 26π cm; **b)** aria de 729π cm².

77. Calculează lungimea tronsonului de cale ferată între A și B , știind că este un arc de cerc cu centrul O , iar $AC = BD = 4$ km, $\sphericalangle CAO = \sphericalangle DBO = 60^\circ$.



78. Câte învârtituri complete face o roată de bicicletă, cu diametrul 80 cm, dacă se parcurge o distanță de 0,850 km?



79. Fie CA și CB tangentele duse la $C(O;r)$ (C exterior cercului). Dacă A , B sunt punctele de tangență, $CO = 25$ cm și distanța de la O la AB este de 9 cm, calculează lungimea razei cercului.

80. Timp de două săptămâni, la o stație meteo se înregistrează temperaturile: 12°C , 10°C , 13°C , 11°C , 12°C , 12°C , 11°C , 13°C , 11°C , 14°C , 11°C , 12°C , 13°C , 15°C , 14°C , 14°C .

a) Organizează datele culese, într-un tabel.

b) În câte zile s-a atins temperatura maximă?

c) În câte zile s-au înregistrat cel mult 11°C ?

d) Alcătuieste un grafic cu bare pentru datele înregistrate și află temperatura medie a celor două săptămâni.

Răspunsuri selectate*

Unitatea 1. Pg. 9 Test inițial I. 1. a) 340; **b)** 2,5; **2. a)** 4,76; **b)** 1,44; **c)** 5,5; **d)** 1/2; **e)** 15/8; **f)** 4/3; **g)** 2900; **h)** -35. **3. adevărat. II. 4. B; 5. D; 6. C. III. 7. 19; 8. Se pot calcula unghiurile; 9. a)** 4 cm^2 și $0,25\text{ cm}^2$; **b)** $4,25\text{ cm}^2$; **c)** $4+0,25=4,25$. **Pg. 11. 8.** $3+0,75; 1+0,5; 9. 18;$
10. Diferența este divizibilă cu 9; 11. a) $25=2^4+2^3+2^0$; **b)** Contraex.: 5.
Pg. 13. 5. $3,0625\text{ m}^2$; **6.** $6,25\text{ dm}^2$; **7.** $34,81$; **21,05**; **8.** 4 cm ; $0,75\text{ cm}^2$;
9. $8,2\text{ m}$; $4,14\text{ m}^2$; **10.** $48-n=2^4 \cdot 3$, $n=3$; **11.** De ex, $51^2=2601$, $50^2=2500$, iar șirul $2501, 2502, \dots, 2600$ are 100 termeni și niciunul nu este pătrat perfect; **12.** Al doilea număr are un factor prim cu exponentul 491 impar.
14. a) De ex. $P=123876$, $Q=876123$; **b)** Fie S suma cifrelor lui P . Suma cifrelor lui Q este S . Conform ipotezei, $2S=9n \Rightarrow n$ este par.
Pg. 15. 5. $a=(2^4 \cdot 3^5)^2$, $\sqrt{a}=2^4 \cdot 3^5$; **6.** 60; 90; 42; **7. A; 8. a)** 4,875; **b)** 124,5; **c)** 5,125; **d)** 0,625; **e)** 62,5; **f)** 125,125; **g)** 15,625; **h)** 124,875;
9. $1,25\text{ cm}^2$; **10.** 225 cm^2 ; **11.** $20,25\text{ m}^2$; **12.** 16000 m; **13. a)** 3,68; **b)** 1,17; **c)** 6,42; **d)** 0,64; **e)** 0,06; **f)** 62,70; **14.** 30 m; **15.** 48 m²;
16. 20 m; **17. a)** $a=0,25=a \cdot 1/4=a:4$; **b)** 30; 900; 1,03; **2.4. 18.** 204;
19. a) 6^2 și 66^2 ; **b)** 666. **Pg. 17. 5.** 7 cm^2 ; **6.** Cel cu aria 10 cm^2 ;
7. a) 7 cm^2 ; **b)** $\sqrt{7}\text{ cm}$; **8.** 30 m; **9.** $\sqrt{133}\text{ cm}$; **10. a)** latura pătrat mic $x=\sqrt{2}$; **b)** $8\sqrt{2}\text{ cm}$
Pg. 18 Recapitulăm ... 1. a) A; **b)** F; **c)** A; **2.** 15; 21; 75; 81; **3.** 53, 59;
4. a) 5,5; 3,(6); 1,8(3); 0,6(1); **b)** 1/4; 25/99; 23/90; **c)** $\sqrt{16}$; **5. a)** 6,76; **b)** 18,49; **c)** 2,(7); **6.** Nu are dreptate, cf. def. rădăcinii pătrate; **7.** 18 cm;
8. a) 1, 2, 4, 11, 22, 44; **b)** 12; **c)** 12; **9. a)** A; **b)** F; **10.** 4 m; **11.** 3 și 4; 5 și 6; 7 și 8; 9 și 10; **12.** 22; **13.** 1500 m; **14. a)** 4; 34; 334; **b)** 333334;
15. a) $L=27\text{ cm}$, $l=24\text{ cm}$; **b)** $ABCD$ este pătrat cu latura $9\sqrt{2}\text{ cm}$;
 $A=162\text{ cm}^2$, $P=36\sqrt{2}\text{ cm}$; **16.** 2^n-1 este de forma $4k+3$ pentru $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, dar un pătrat perfect impar este de forma $4m+1$, unde $k, m \in \mathbb{N}$.
17. $x=\sqrt{6}\text{ cm}$.
Unitatea 2. Pg. 21 Test inițial I. 1. b); 2. c și **e**; **d** și **f**; **(CC)** și **(IU)**;
3. isos. II. 4. B; 5. C; 6. D. III. 7. echilat; **8. isos.;** **9. dreptunghic.**
Pg. 23. 5. b și **c**; **Pg. 23 Scurt demers de cercetare 1. 2;** **2. 0, 2, 5, 9, 14, 20, 27, 35. Pg. 25. 5. a** și **b**; **6.** $\angle Q=64^\circ$, $\angle M=89^\circ$, $\angle N=95^\circ$,
 $\angle P=112^\circ$; **7.** $\angle A=55^\circ$, $\angle B=89^\circ$, $\angle C=96^\circ$, $\angle D=120^\circ$; $\angle E=90^\circ$,
 $\angle F=110^\circ$, $\angle G=90^\circ$, $\angle H=70^\circ$; **8.** $\angle A=\angle D=45^\circ$, $\angle B=\angle C=135^\circ$; **9.** Suma celor patru unghiuri din jurul lui P este 360° ; **10.** $\angle M=80^\circ$, $\angle N=95^\circ$,
 $\angle P=55^\circ$, $\angle Q=130^\circ$; **11. a)** 108° ; **b)** 144° ; **c)** $180^\circ-360^\circ/n$.
Pg. 28. 4. 60; 100; 76; 72; **5. a)** $AD=3\text{ cm}$, $CD=5\text{ cm}$; **b)** $\angle B=\angle C=104^\circ$,
 $\angle D=76^\circ$; **c)** 7 cm ; **d)** 50° ; **e)** 40° ; **f)** 30° ; **g)** 60° ; **e)** 55° ; **9.** $\angle A=\angle C=80^\circ$,
 $\angle B=\angle D=100^\circ$; **10.** $ABDC$, cf. def.; **11.** Se arată că $DLBM$ este paralelogram; **12.** Se arată că laturile op. sunt paralele; **13.** 24 cm;
14. Triunghiuri dr. congr. (IU); **15.** Se arată că $DFEC$ este paralelogram.
Pg. 32. 5. $BC=DE$, $BC \parallel DE$; **7.** $\triangle MAQ \cong \triangle PBN$, $\triangle MAN \cong \triangle PBQ$;
8. $QM=RS$ și $QM \parallel RS$; **9.** $MA=BN$ și $MA \parallel BN$; **10.** $\triangle DAE \cong \triangle BCF$ (ULU);
11. a) mijloc, **b)** S este mijloc pentru BD și EF ; **12.** Diag. lor au același mijloc;
13. $EF=GH$ și $EF \parallel GH$; **14. a)** $P=36$; **b)** $P=26$; **15.** $\triangle ADE$ și $\triangle BEC$ sunt isos., cu vf. A , resp. B ; **16.** Se arată că $MP \parallel BC$ și $MN \parallel BC$, folosind faptul că $\triangle PBM$ și $\triangle NEM$ sunt isoscele, cu bazele MB , respectiv ME .
Pg. 37. 6. 106° , 37° ; 74° , 53° , 53° ; **7.** $\triangle AHE \cong \triangle BEF$, $\triangle CFG \cong \triangle DGH$ (CC), iar $\angle AEH$ și $\angle BEF$ sunt compl.; **8.** $\angle M=\angle P=86^\circ$, $\angle N=\angle Q=94^\circ$;
9. $AMCN$ are toate lat. congr.; **10. a)** $\angle PBC=135^\circ$,
 $\angle BCP=\angle BPC=22^\circ 30'$; **b)** $\angle PBC=45^\circ$, $\angle BCP=\angle BPC=67^\circ 30'$;
11. $\angle CBE=135^\circ$, $\triangle ABC \cong \triangle EBC$ (LUL). **12.** Romb;
13. Presup. prin abs. că R, N, Q coliniare $\Rightarrow \angle QNM + \angle RNM = 180^\circ \Rightarrow \angle PNM + \angle SNM = 360^\circ$, absurd, deoarece $\angle PNM < 180^\circ$ și $\angle SNM < 180^\circ$;
14. $\triangle ABE \cong \triangle ADG$ (LUL); **15.** Se trasează mediana corespunzătoare ipotenuzei și se folosește teor. ref. la această mediană și teor. unghiului de 30° . **Pg. 41. 5. a)** $2,5\text{ cm}$; **6.** 52° , 44° , 136° , 128° ; **7.** 53° , 127° ;
9. 53° , 127° ; **10.** $CD=10\text{ cm}$, $AD=BC=5\text{ cm}$; **11.** $DM > CD/2$;
12. $\angle EBA=90^\circ$; $DF/AB=1/2$; **13.** Fie E piciorul bisectoarei lui $\angle ACD$. Notând $\angle ECA=u$, se arată că $\angle ACB=90^\circ-u$; **14.** $\triangle PCM \cong \triangle NBM$ (ULU),
 $BN \parallel CD$; **15.** În triunghiurile dr. congr. $\triangle DAC$ și $\triangle ABE$, DM și AN sunt mediane. $DM=MN=AM=EN=AN$. $\triangle AMN$ este echilat.; $\angle ABE=15^\circ$.
Pg. 44. 5. $x=10\text{ mm}$, $y=30\text{ mm}$, $z=4\text{ mm}$, $t=24\text{ mm}$; **6.** QR este linie mijlocie; **7.** 24 cm; **8.** 3 cm, 4 cm, 5 cm; **9.** 7 cm; **10.** 3 cm, 4 cm, 4 cm;

11. a) $AG=6\text{ cm}$, $GM=3\text{ cm}$; **b)** $AM=6\text{ cm}$, $AG=4\text{ cm}$; **c)** $AM=3,6\text{ cm}$,
 $GM=1,2\text{ cm}$; **12.** AN, CM, BO sunt mediane în $\triangle ABC$; **13.** Fie P mijl. lui BC și $AP \cap MN = \{Q\}$. MQ și QN sunt linii mijl. în $\triangle ABP$, respectiv $\triangle APC$;
14. $AM=24$, $BN=27$; **15.** $x=16\text{ mm}$, $y=10\text{ mm}$, $u=9\text{ mm}$, $v=8,5\text{ mm}$, $m=10\text{ mm}$,
 $n=6,5\text{ mm}$, $z=7\text{ mm}$, $t=21\text{ mm}$; **16.** Pentru orice punct P de pe BC și $AP \cap DE = \{Q\}$. DQ și QE sunt linii mijl. în $\triangle ABP$, respectiv $\triangle APC$;
17. a) $MNPQ$ are laturi egale cu $1/2$ din diag. dreptunghiului ce reprezintă fața superioară; **b)** Cu bazele pătrate; **18. a)** 2,5 cm; **b)** Fiecare segment M_i-N_{i+1} este linie mijl. în trapezul ACM_iN_i .
Pg. 46 Recapitulăm... 1. $x=80^\circ$, $y=130^\circ$; **2.** $\angle A=72^\circ$, $\angle B=84^\circ$, $\angle C=96^\circ$,
 $\angle D=108^\circ$; **3.** $l=59^\circ$, $m=88^\circ$, $n=33^\circ$; $t=65^\circ$; $u=66^\circ$, $v=72^\circ$, $w=45^\circ$;
4. $x=11$, $y=24$, $n=7,5$, $p=10$, $q=30$, $t=14,5$, $w=18$, $v=22,5$;
5. a) Laturile sunt linii mijlocii, cele opuse fiind egale cu $1/2$ din fiecare diagonală a patrulaterului dat; **b)** Dacă diagonalele patrulaterului dat sunt congruente; **c)** Dacă diagonalele patrulaterului dat sunt perpendiculare; **6.** $QR \parallel SN$ (ambele fiind perpendiculare pe MP) și $QS \parallel RN$; **7.** 7 cm; **8.** O este centru de simetrie al lui $ABCD$, deci O este mijloc pentru MN și PQ ; **9.** $\triangle BDC$ este isos. cu vârful D ; BEC este romb; **10.** Se folosesc triunghiurile isos. congr. (LUL) $\triangle ABE$ și $\triangle ADF$, cu unghiul din vârf de 150° . Punctul F se află pe mediatoarea lui EB , deoarece $EF=FB$; **11.** Fie E simetricul lui A față de D . $ABEC$ este paralelogram, iar din $\triangle ABE$ se obține că $2AD \leq AB+BE \Rightarrow 2AD \leq AB+AC$; **12. a)** Notăm $\angle ADC=u$. $\angle ODP=\angle OCN=270^\circ-u$. $\triangle ODP \cong \triangle OCN$ (LUL); **b)** $\triangle ODP \cong \triangle OCN \Rightarrow \triangle MBN \cong \triangle MAP$ (LUL) $\Rightarrow OP=ON=MN=MP$; **c)** $\angle COD=90^\circ \Rightarrow \angle PON=\angle COD-\angle CON+\angle POD=90^\circ$;
13) Fie M mijlocul lui BD . ME și MF sunt linii mijlocii în $\triangle ABD$, respectiv $\triangle DBC \Rightarrow ME=AD/2$, $MF=BC/2$. Dar din $\triangle MFE$ se obține $EF \leq ME+MF$, de unde rezultă inegalitatea din enunț.
Unitatea 3. Pg. 49 T.I. 1. B; 2. A; 3. D. II. 4. aproximările prin lipsă: 231,1 și 231,17, aproximările prin adaos: 231,2 și 231,18; **5.** $(1/4)^4$;
6. $-5 < -4,5 < -14/4 < 0 < 1/2 < 2,6 < 2,6(6) < 3 < 6$. **III. 7. C; 8. A; 9. A.**
Pg. 51. 6. $A \cap N = \emptyset$; $A \cap Z = \{-5\}$; $A \cap Q = \{\sqrt{9/4}, -5/8, 2(5)\}$;
 $-\sqrt{75/12}; -6,5\}$; $A \cap (\mathbb{R} \setminus Q) = \{\sqrt{3}, -\sqrt{8}\}$. **7. a)** rațional; **b)** rațional;
c) rațional; **d)** irațional. **8. a, b** și f sunt iraționale, pentru că numerele de sub radical nu sunt pătrate perfecte. **9.** Șirul conține 9 numere raționale: $\sqrt{1}, \sqrt{4}, \sqrt{9}, \dots, \sqrt{81}$. **10. a)** $1^2, \dots, 10+8$ are ultima cifra 8.
b) 234645 se divide cu 5, dar nu se divide și cu 5^2 . **c)** Suma cifrelor lui 9231 este 15, deci se divide cu 3, dar nu se divide cu **9.** 5256520 se termină cu un număr impar de zerouri. **e)** 746 este par, deci se divide cu 2, dar terminându-se în 46 nu se divide cu 4. **12.** Presup. prin absurd că $3,454455444555\dots$ este o fracție periodică, deci număr rațional. Considerăm că perioada acestei fracții conține n cifre. Cifra 4 apare în alcătuirea fracției zecimale date de o infinitate de ori, deci în perioada acesteia apare cel puțin o dată, iar cifra 5 de cel mult $n-1$ ori. Astfel, între oricare două cifre 4 consecutive pot fi cel mult $n-1$ cifre 5, ceea ce contrazice modul în care este alcătuită fracția.
Pg. 54. 8. a) 4; **b)** 65; **c)** 267; **d)** $27/35$; **e)** $\sqrt{32}$; **f)** 8; **g)** $\sqrt{2}$. **9. b), c), d), e)** sunt adevărate. **12. b)** $n=8$. **Pg. 57. 4. a)** $\sqrt{256}$; **b)** egale.
5. $-5\sqrt{10} < -3\sqrt{11} < -2\sqrt{11} < 3\sqrt{10}$. **7. 0.54. Pg. 60. 5. a)** $6\sqrt{3}$; **b)** $10\sqrt{5}$;
c) 4; **d)** $5^2\sqrt{3}$; **e)** $7 \cdot 3^2$; **f)** $2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \sqrt{2} \cdot 5$; **g)** $3/5 \sqrt{7/2}$; **h)** $9/2 \sqrt{5/3}$;
i) $5/4 \sqrt{2} \cdot 6. a) 2; **b)** $\sqrt{2/3}$; **c)** 3. **7. a)** $\sqrt{2^4 \cdot 3}$; **b)** $\sqrt{2^6 \cdot 5}$; **c)** $\sqrt{2/3^2}$;
d) $\sqrt{16^2 / (11^2 \cdot 3)}$; **e)** $1/\sqrt{343}$. **8. a)** $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$; **b)** $6 > 2\sqrt{7}$; **c)** $\sqrt{3 \cdot 2^3} > -3\sqrt{6}$; **d)** $-\sqrt{19} < -3\sqrt{2}$. **10. a)** $\sqrt{3} < \sqrt{4} < 2\sqrt{2} < 3$; **b)** $-2\sqrt{3} < -3 < 2\sqrt{3}/3 < \sqrt{3} < 3$.
Pg. 63. 5. a) 0; **b)** $7\sqrt{13}$; **c)** $-19\sqrt{7}$; **d)** $9\sqrt{3}$; **e)** $103\sqrt{6}/60$.
6. a) $8\sqrt{3}$; **b)** $-\sqrt{5}$; **c)** $4\sqrt{7}$; **d)** $9\sqrt{2}$; **e)** $-6,5\sqrt{5}$; **f)** $\sqrt{7}/3$.
9. a) $\sqrt{2}$; **b)** 0; **c)** $5\sqrt{3}$. **10. a)** $19\sqrt{3}/385$; **b)** $3/4\sqrt{2/3}$.
12. a) $3,7 < 4,4$; **b)** $2,3 > 1,6$; **c)** $5,4 < 5,6$.$

* Veți găsi răspunsurile complete la adresa www.editurasigma.ro

Pg. 66 6. a) $-12\sqrt{5}$; b) 14; c) 210; d) $33\sqrt{15}/2$; e) 15; f) $-4\sqrt{7}/7$.
7. a) $5\sqrt{3}$; b) 1,2; c) 13/11; d) 3. **8.** a) $2\sqrt{3}-3$; b) $4\sqrt{7}-7\sqrt{5}$.
9. $\sqrt{30}$. **12.** Fie $a, b > 0$, $b = 4a$. $\sqrt{a \cdot b} = 40 \Rightarrow a \cdot b = 1600$, deci $a = 20$,
 $b = 80$. **13.** $1019 < a \Leftrightarrow 1019 \cdot 1019 < 1019 \cdot 1020 + \sqrt{1019 \cdot 1020} \Leftrightarrow$
 $0 < 1019 \cdot (1020 - 1019) + \sqrt{1019 \cdot 1020}$

Pg. 69 5. lei. **6.** a) $5\sqrt{5}$; b) $-27\sqrt{10}/100$; c) $\sqrt{3}$. **7.** 3,875.
8. a) $7\sqrt{3}/3$; b) $-9\sqrt{5}/5$; c) $\sqrt{11}$; d) $2\sqrt{3}/15$. **9.** a) 3; b) -3 ;
c) -26 ; d) $-100/3$; e) $\sqrt{5}/90$. **12.** a) $(5 + \sqrt{15})/10$; b) $9/4$;
c) $(2\sqrt{2}-1)/2$. **13.** a) 2; b) $2^{29}\sqrt{2}$; c) $8/11$.
14. $b/a = (\sqrt{12} + \sqrt{75})/\sqrt{3} = 7 \in \mathbb{Q}$. **15.** $1/a + 1/b = 3/2 \in \mathbb{Q}$.

Pg. 71 **4.a)** $3^6\sqrt{3}$; b) 2^9 ; c) $1/75$; d) $-2\sqrt{7}$; e) $1/3^{10}$; f) 1. **5.** a) 3; b) $1/5$;
c) $11^4\sqrt{11}$; d) $(2/5)^{10}$; e) $0,5$. **6.** a) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})/6$; b) $6\sqrt{5}$; c) $7/12$.

7. a) $11/25$; b) $\sqrt{5}/3^7$; c) $\sqrt{5}/2$. **8.** $a = \sqrt{3} \Rightarrow a^2 \in \mathbb{Q}$.

9. $a = \sqrt{2}^{1+2+3+\dots+100-5050} = \sqrt{2}^{\frac{100 \cdot 101}{2} - 5050} = \sqrt{2}^0 = 1 \in \mathbb{N}$.

Pg. 73 5. a) 0; b) $-\sqrt{2}$; c) $7 - 9\sqrt{2}$. **6.** a) 3; b) 1; c) 0; d) $2\sqrt{5}$.

7. a) $5\sqrt{3}/6$; b) $-\sqrt{3}$; c) $2/3$; d) 7. **8.** a) $\sqrt{6}-3$; b) $12-8\sqrt{2}$;
c) $3\sqrt{2}+2\sqrt{6}$; d) $12\sqrt{3}-12\sqrt{2}$. **10.** a) $z = 706/50625$; b) $z = 13/36$.

11. a) $4\sqrt{3}-2\sqrt{5}-5\sqrt{7}$; b) $-3\sqrt{3}$. **12.** a) 1; b) 1. **13.** a) -7 ; b) $4 - \sqrt{11}$;
c) $-9 - 2\sqrt{11}$; d) 3; e) $9 - 4\sqrt{6}$. **14.** a) $8\sqrt{15}$; b) $92/3$; c) $-3\sqrt{6}/8$.

16. $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 1$. **17.** a) $a=3, b=-3$; b) $a=5/3, b=-1/7$.

Pg. 74 Recapitulăm... **10.** a) 7,3; b) 18,9; c) 0,7; d) 157,5. **11.** a) 1,4;
b) 5,3; c) 7; d) $-0,4$. **13.** a) $\sqrt{5}$; b) $5\sqrt{2}$; c) $-2\sqrt{5}$; d) $21\sqrt{5}$.

14. a) $1050\sqrt{3}$; b) 0,5; c) -24 . **15.** $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$. A, B, C sunt
coliniare. **17.** 1200. **18.** 80%; 20%. **19.** 3,2. **20.** a) 0; b) $13/19$; c) $-2/15$;
d) $3/50$. **22.** $u(3^{2000} + 4^{2000}) = 7$. **23.** a) 3; b) $2^{51} \cdot 2 + (2^{50} \cdot 1)\sqrt{2}$.

Unitatea 4. Pg. 77 T.I. I. 1. 7 cm; 2.160; 3. 30. **II. 4. C); 5. A); 6. C).**

III. 7. 12,5 dm.; **8.** $9\sqrt{3}$; **9.** $AB = BD:2 = 3$ și $AD = 3\sqrt{3}$ m, deci

$A_{ABCD} = 9\sqrt{3}$ m². **Pg. 79** 5. a) 17,2 cm; b) 9,2 cm; c) 178 cm;

d) 111 cm. **6.** $MP = 6$ cm, $NQ = 6\sqrt{3}$ cm. **7.** $BD = 2,5\sqrt{2}$ cm.

8. $AB = \sqrt{34}$ cm. **9.** $AB = CD = 3$ cm, $AC = BD = 6$ cm, $AD = 3\sqrt{3}$ cm.

10. 12 cm, 12 cm, 12 cm, 17 cm. **11.** 22 m.

12. $AB = BC = CD = AD = AC = 4$ cm. $BD = 4\sqrt{3}$ cm.

Pg. 81 5. $A = 12 \cdot 8 = 96$ cm². **6.** $P = 4l = 16\sqrt{5}$ cm, $d = 4\sqrt{10}$ cm.

7. $P = 2(L+l) = 26$ cm, $d = \sqrt{L^2 + l^2} = \sqrt{97}$ cm. **11.** 37 m² de gresie,
1554 lei. **13.** a) $l_{100} = 1/2^{99}$, $P_{100} = 4 \cdot l_{100} = 1/2^{97}$, $A_{100} = 1/2^{198}$.

Pg. 83 4. 13,5 cm². **6.** 288 dm². **7.** $3\sqrt{3}/2$ cm². **9.** $A = 1080$ cm².

10. $20\sqrt{6}/7$ m. **11.** $h = AB \cdot BC/AC = 30\sqrt{61}/61$ cm. **12.** $A_{MNPQ} = 39,6\sqrt{11}$
cm². **14.** Aria supraf. albe este $A_1 = 6\sqrt{3}$ cm², iar a celei colorate este

$A_2 = 16 - 6\sqrt{3}$ cm² și $A_1 > A_2$.

Pg. 85 5. 1540 cm². **6.** $b = 10$ cm, $B = 35$ cm, $h = 15$ cm; $A_1 = 262,5$ cm²,
 $A_2 = 75$ cm². **7.** $h = 3$ m, $B = 6 + 6\sqrt{3}$, $A = 9(2 + \sqrt{3})$ m² și $9(2 + \sqrt{3}) > 27$.

8. $AB = a, CD = b$, înălț. h , $AM = x$, $A_{AMCD} = A_{CMB} \Rightarrow (b+x) \cdot h/2 = (a-x) \cdot h/2$, $x =$
 $1/2(a-b)$. Deci M este la dist. $1/2(a-b)$ față de A . Pt. construcția lui M se
duce prin D dreapta $DP \parallel BC$ și apoi linia mijl. $NM \parallel DP$ în

ΔDAP .

Pg. 86 Recapitulăm ... **1.** a) $l = \sqrt{13}$ cm; b) 8 cm. **2.** 7 cm.

5. a) 128 mm; b) 110,3 cm. **6.** a) $AE = 1$ cm; b) $AE = BC/2 = 2$ cm,

$DE = 2\sqrt{3}$ cm; c) ΔADE dr. isoscel și $AE = DE = \sqrt{2}$ cm. **7.** $AC = 2\sqrt{10}$ cm,
 $BD = 2\sqrt{26}$ cm. $CE \perp AB$, $E \in AB \Rightarrow AECD$ dreptunghi $\Rightarrow EB = AB$

$CD = 4$ cm, $EC = AD = 2$ cm $\Rightarrow BC = \sqrt{EB^2 + EC^2} = 2\sqrt{5}$ cm.

8. Fie $RM \cap OB = \{A\}$, $RC \perp MB$, $C \in MB$; $AM = RM/2 = 1,2$ cm,
 $AB = OB/2 = 0,5$ cm; $MB = 1,3$ cm, $A_{ROMB} = RM \cdot OB/2 = 1,2$ cm²,

$A_{ROMB} = MB \cdot RC \Rightarrow d(R, MB) = RC = A_{ROMB}/MB = 12/13$ cm. **9.** Fie $PR \perp$
 MN , $R \in MN$; $MNPQ$ trapez isoscel și $RN = (MN - QP)/2 = 2$ cm; $MR = MN$

$RN = 8$ cm; $PR = \sqrt{MP^2 - MR^2} = \sqrt{17}$ cm. **10.** 19,55 cm.

11. Aria parcului $A_p = 360 \cdot 200 = 72000$ m²; aria aleilor $A_l = [200 \cdot 1,5 + (360$

$- 3) \cdot 1,5] = 1671$ m²; aria aleilor centrale $A_z = (360 - 3) \cdot 2,5 + (200 - 3) \cdot 2,5$

$- 2,5^2 = 1378,75$ m²; aria spațiului verde $A_v = A_p - A_l - A_z = 68950,25$ m². **12.**

Romburile au diagonalele de 12 cm și 20 cm și aria unui romb este 120
cm²; aria suprafeței colorate este $A_c = 120 \cdot 4 = 480$ cm²; aria suprafeței

albe este $A_a = A_{ABCD} - A_c = 480$ cm². **13.** Construind prin vârfurile
patraterului $ABCD$ paralele la diagonalele acestuia se obține un

dreptunghi, deoarece $AC \perp BD$, $A_{ABCD} = AC \cdot BD/2 = 1725$ cm².

14. ΔBCD echilateral; $\sphericalangle OCB = \sphericalangle OAB = \sphericalangle OAD = 30^\circ$; $\sphericalangle BAD = 60^\circ$ și
 $\sphericalangle ABC = 120^\circ$, iar $\sphericalangle ADC = 120^\circ$. $ABCD$ este romb și $AB = BC = CD = DA = 5$

cm; $BD = 5$ cm; ΔAOB dreptunghic, $AO = 5\sqrt{3}/2$ cm, $AC = 5\sqrt{3}$ cm.

Unitatea 5. Pg. 89 T.I. I. 1. a) Q; b) EC; c) rază; d) $\sphericalangle AOB$. **2.** A).

3. 152°. **II. 4.** A; **5.** B; **6.** C. **III. 7.** Se aplică L.U.L. **Pg. 91** 5. 1,5 cm.

Pg. 94 5. a) 90° ; b) 80° ; c) 70° . **6.** 120° ; **7.** Se evaluează măsura arcelor
cuprinse între laturile de cele două unghiuri; **8.** Se folosește proprietatea

unui unghi înscris într-un semicerc. **Pg. 97** 6. b) 72° . **7.** a) $\Delta AOBQ$ are
toate laturile congruente; b) Se arată că $\sphericalangle C = \sphericalangle D$.

Pg. 99 6. M mijlocul arcului BC, deci $\sphericalangle BAM = \sphericalangle CAM$; **7.** Podul trebuie
să fie perpendicular pe diametrul ce trece prin P; **8.** Se construiesc

perpendiculararele din O pe AB și CD.

Pg. 101 5. $675\sqrt{3}/4$; **6.** 20; **7.** $18\sqrt{3}$ mm; **8.** 30 cm; **11.** 45° .

Pg. 104 5. 136; **6.** 96; **7.** Dacă O este centrul cercurilor, se arată că
 ΔAOB este isoscel, iar OT, fiind înălțime, este și mediană.

Pg. 107 5. 20π cm²; **6.** $3/\pi \approx 0,95$ m; **7.** $8(\pi - 2)$; **8.** Pentru cifra 2:

$\pi + \sqrt{13} + 2$; **9.** $7\pi/2$; 14π .

Pg. 108 Recapitulăm... **8.** $20\pi + 30\sqrt{3}$ cm.

Unitatea 6. Pg. 111 T.I. I. 1. 30° ; **2.** $3/5$; **3.** $\frac{53y}{30}$. **II. 4.** B; **5.** C; **6.** A.

III. 7. LLL; **8.** $\Delta ADC \cong \Delta AEB$ (LUL); **9.** $\Delta DEP \cong \Delta DFQ$ (ULU) $\Rightarrow DP = DQ$.

Pg. 113 3. a, c, d; **4.** Oricare două dintre AB/DF, AC/DE, BC/EF;

5. a) diferența; b) și c) raportul; **6.** a) $x=4, y=45$; b) $x=8, z=4\sqrt{2}$,
 $t=1130$; **7.** a) 6; b) $11/2$; c) $11/2$; d) $19/3$; **8.** Se poate nota valoarea rap.

date cu k, după care se exprimă a, b, c; **9.** 32 lei; **10.** 6 și 18;

11. $l = 40$ m, $l = 20$ m; **12.** 42 și 7; **13.** Oricare pereche de numere x și y,
a. $1.3y = 2x$; **14.** 9 cm, 15 cm; **15.** MN este semidiferența bazelor; 48 cm,
12 cm.

Pg. 115 5. Cf. propr. centrului de greutate al unui triunghi, acesta este
punctul de diviziune situat la două părți de mijlocul laturii și patru părți de

vârf; **7.** a) 11; b) 16. **8.** 49.

Pg. 118 5. $AM/MD = AK/KC = BN/NC$; **6.** Se aplică propr. centrului de
greutate al unui triunghi; **7.** $MN = 14,5$ mm, $AG = 20$ mm; **8.** $AM = 24$,
 $BN = 27$; **9.** Se aplică teor. lui Thales în ΔADC și în ΔCAB ; **10.** Se aplică

reciproca teor. lui Thales în ΔABD , ΔCBD , ΔBAC , ΔDAC ; **11.** Se aplică
teor. lui Thales pentru ΔPAB , cu $CD \parallel AB$ și pentru ΔTAB , cu $CD \parallel AB$;

12. $x = 6$, $AB = 26$, $AC = 65$; **13.** Aplicând succesiv teor. lui Thales, pentru
paralelele MN, NP, PQ, QR, RS, ST se obține un șir de rapoarte egale.

Egalitatea $AM/MB = AT/TB$ arată că punctele M și T coincid; **14.** $OT \parallel QS$
și se aplică teor. lui Thales; **15.** Notăm $EC = x$, $EF = y$. Se aplică teor. lui

Thales în ΔABC și în ΔABE , obținând $2x = 3y$. $AF/AC = 2y/(x+3y) = 4/9$.

Pg. 121 4. a) 14 cm, 5 cm; b) 8 cm, 14 cm, 6 cm; **5.** Se va folosi o rețea
de pătrate cu latura 1,5 cm; **6.** Două pătrate, având unghiurile

congruente și laturile proporționale; **7.** Da, având unghiurile congr. și lat.
proporț.; **8.** a) A; b) F; **9.** 25 km; **10.** $CA/CP = CB/CQ = AB/PQ$.

Pg. 124 4. $OC/BD = 2/5$, $CE/AF = 3/5$; **5.** $OC/BD = 1/3$, $CE/AF = 2/3$;

6. $x=26$, $y=20$; 7. Nu; 8. Linile mijlocii paralele cu laturile congruente sunt congruente; 9. d) $BD=6$, $AE=2$; 10. $x=1,5$, $AB=3,5$, $FG=10,5$;

11. $AP=2$ cm, $CP=\sqrt{52}$ cm; 12. 20 cm; 13. 28 cm;

15. a) $\triangle AEP \sim \triangle ADC$, $\triangle APB \sim \triangle CPD$, $\triangle CFP \sim \triangle CBA$; b) $EF = \frac{2}{3} \cdot \frac{AB \cdot CD}{(AB+CD)} = 40/7$ cm; 16. a) $\triangle ABM \sim \triangle AEF$, $BM=15/8$ cm; b) Fie N intersecția lui DE cu BC. $\triangle EBN \sim \triangle EAD$, $BN=15/8$ cm. În concluzie, $BM=BN$, așadar M și N coincid, deci D, M, E sunt coliniare.

Pg. 127 4. Cateta necunoscută a tr. mic are 4 cm; iar ipotenuza tr. mare are 10 cm. Se aplică criteriul LLL de asemănare; 5. Nu, deoarece $2/3 \neq 2/4$; 6. Tr. formate sunt asemenea, indiferent de scara hărții, Cf. criteriul LLL de asemănare; 7. $\triangle MQP \sim \triangle NMP$; 8. Fie O centrul primului romb și S centrul celui al doilea. $\triangle OAB \sim \triangle SMN$.

Pg. 129 4. a) $AC/CD=CD/DM=2$ și $\angle ACD=\angle CDM=90^\circ$; b) $\angle ADC$ și $\angle MCD$ sunt complementare; 5. a) $AO/MO=BO/NO=1/2$ și $\angle AOB=\angle MON$ (opuse la vârf); b) Criteriul LLL de asemănare; 6. $AF/CB=AE/CG=1/3$ și $\angle A=\angle C$ (unghiuri opuse în paralelogram); 7. $AB/DE=BM/EN$ și $\angle B=\angle E$.

Pg. 131 4. $\angle DEB=\angle CFD=90^\circ$ și $\angle B=\angle C$; 5. a) $\angle FBD=\angle EAF$, având ambele compl. $\angle C$; b) Sunt dr. și au $\angle A$ comun; c) Se deduce din punctul a); 6. a) Au același supl. $\angle BDE$; b) Criteriul UU; c) Se deduce din punctul b); 7. a) $\triangle DBG \sim \triangle EFC$, având $\angle BDG=\angle CEF=90^\circ$ și $\angle B=90^\circ-\angle C=\angle EFC$; b) $\triangle AGF \sim \triangle EFC$ și apoi se aplică criteriul LUL de asemănare; c) Este o consecință a punctului b); 8. $\angle M=\angle P$ și $\angle N=\angle Q$, fiind unghiuri înscrise care cuprind între laturi arcul AB din cercul mic, respectiv din cercul mare; 9. Fie trapezul ABCD, $AB \parallel CD$, $AB > CD$. Notăm $AC \cap BD = \{O\}$, $AD \cap BC = \{S\}$, $SO \cap AB = \{M\}$, $SO \cap CD = \{N\}$. Construim prin O, $EF \parallel AB$, cu $E \in AD$, $F \in BC$. Cf. prob. 15 de la lecția "Teor. Fundam. a asemănării", $OE=OF$. Din $\triangle SDN \sim \triangle SEO$ și $\triangle SNC \sim \triangle SOF$, se deduce $DN=NC$, adică N e mijlocul lui CD. Analog se arată că M e mijlocul lui AB.

Pg. 133 4. 25 m²; 5. 1/4; 6. Rap. ariilor=4, rap. perim.=2; 7. 16; 8. Fie r rap. bazelor trapezului. $\triangle PAB \sim \triangle PCD$ și rap. ariilor este r^2 , iar $\triangle QAB \sim \triangle QDC$ și rap. ariilor lor este r^2 . Aplicând propr. Fundam. a proporțiilor se deduce relația cerută.

Unitatea 7. Pg. 137 T.I. I. 1. - 3; 2. 1; 3. 4. II. 4. C; 5. A; 6. B. III. 7. 9; 8. 27,5 lei; 9. o caisă=80 g, o piersică=120 g.

Pg. 139 3. 70; 0. 6. 26. 7. $a=2\sqrt{2}$, $b=\sqrt{2}$, $c=4\sqrt{2}$.

Pg. 141 4. Toate elementele sunt soluții. 6. $2\sqrt{3}$. 7. ora 12:20.

8. a) -19/7; b) 30; c) 7. 9. b) \mathbb{R} ; c) \emptyset ; d) 1. 10. Pentru $m \neq -3$, $x=(2m+n)/(m+3)$; pentru $m=-3$, mulț. soluțiilor este \mathbb{R} dacă $n=6$, \emptyset dacă $n \neq 6$. 11. $-10\sqrt{2}/9$.

Pg. 143 4. Sistemele au soluția (6; 3). 5. a) $(\sqrt{5}; 3\sqrt{5})$; b) (-2; 1).

6. $a=2$, $b=3$. 7. a) nu are soluții; b) $x=2,5y+3$ și $y \in \mathbb{R}$; c) $x=6/5$, $y=-1/2$; d) $x=\pm 5/2$, $y=-4$.

Pg. 145 7. a) soluțiile au forma $(x, (x\sqrt{3}-1)/6)$, cu $x \in \mathbb{R}$; b) Sistemul nu are soluție. 8. $a+b=208/63$. 10. $m=1/2$. **Pg. 147 5.** ora 10. 6. 3 și 4.

7. 23 hexagoane și 11 pătrate. 8. $15\sqrt{5}$, $3\sqrt{5}$. 11. 120 lei.

Pg. 148 Recapitulăm... 7. $a=3$. 10. a) -1; b) -2/13; c) -3; f) $x \in \emptyset$. 12. $x=2$, $y=13$. 14. $x=1/2$. 15. $x=99$, $y=23$. 18. a) 2; b) 1. 20. $x=21$ pentru $m=4$, $x=13$ pentru $m=5$, $x=9$ pentru $m=7$, $x=7$ pentru $m=11$, $x=6$ pentru $m=19$.

Unitatea 8. Pg. 151 T.I. I. 1. 1296; 2. 13, 12; 3. 0,08125; II. 4. D; 5. A; 6. B; 7. $\triangle DAC \equiv \triangle BCA$ (IC) \Rightarrow ABCD paralelogram \Rightarrow diagonalele au același mijloc; 8. $\triangle MDN \equiv \triangle OEP$ (IU); 9. $\triangle ABE \equiv \triangle ADF$ (CU).

Pg. 154 6. Segmentul mic se construiește inclus în cel mare; 7. Se aplică reciproca teor. catetăi.

Pg. 156 4. a) $3^2+4^2=5^2$ și se aplică reciproca teor. lui Pitagora;

5. $\triangle ABC$, $\triangle DEF$; 6. $P=4a\sqrt{2}+a\sqrt{5}$; $A=15a^2/4$; 7. 6,5m; 8. a) $8\sqrt{2}$;

b) $4\sqrt{2}$; c) $25\sqrt{2}/2$; d) 50; e) $\sqrt{6}$; 9. $x=4\sqrt{26}$, $y=2\sqrt{101}$, $z=15$,

$u=24$, $v=4\sqrt{29}$; 10. $\triangle ABC$, $\triangle DEF$, $\triangle GHI$; 11. Se arată că triunghiurile sunt dr.; 12. a) Fie $\triangle ABC$ și înălțimea AD. Dacă $\triangle DAB \sim \triangle DAC$,

$\angle B=\angle C \Rightarrow \triangle ABC$ isoscel; dacă $\triangle DAB \sim \triangle DCA$, $\angle BAD=\angle ACD \Rightarrow \angle A=90^\circ$; b) Un \triangle asemenea cu un \triangle dr. este dr.; 13. În tripletele de numere naturale a, b, c ce pot fi lungimile laturilor unui \triangle dr. (numere pitagorice) cu ipotenuza a se aleg cele pentru care $a|b^2$, $a|c^2$. Un ex. este $b=15$, $c=20$, $a=25$.

Pg. 161 6. a) $\sin B=4/5$, $\cos B=3/5$, $\tan B=4/3$, $\cot B=3/4$; b) $\angle F=30^\circ$, $\angle D=60^\circ$, valorile sunt cele din tabelul de la pag. 160;

c) $\sin G=6\sqrt{61}/61$, $\cos G=5\sqrt{61}/61$, $\tan G=6/5$, $\cot G=5/6$

7. $\angle BAD=90^\circ$, $AC=BD=30$, $AB=15\sqrt{3}$; $\angle EFG=90^\circ$, $EG=HF=20\sqrt{2}$; $\angle STU=60^\circ$, $\angle SVU=120^\circ$,

$UV=SV=40$, $SU=TS=TU=40\sqrt{3}$, $TV=80$; $\angle I=\angle J=75^\circ$, $\angle L=\angle K=105^\circ$,

$IJ=13\sqrt{6}$, $LK=13\sqrt{2}$, $IK=LJ=13(1+\sqrt{3})$; 8. $\angle EGH=60^\circ$, $\angle H=30^\circ$,

$EH=90$, $GH=60\sqrt{3}$, $EG=30\sqrt{3}$; $\angle K=\angle J=45^\circ$, $KJ=45\sqrt{2}$;

10. a) Pătrate, căci au ungh. dr. și două lat. alăt. congr.; b) $6a\sqrt{2}$;

11. $40(1+\sqrt{2})$; $40\sqrt{5}$ **Pg. 163 5.** $2\sqrt{6}$; 6. a) 40; b) 40; 7. a) $6\sqrt{3}$; b) 12; c) 60° ;

8. $CD=0,625$ cm, $AC=0,375$, $\sin C=0,8$, $\sin D=0,6$; 9. 13 m.

Pg. 166 4. a) $600\sqrt{2}$; b) $450(\sqrt{2}-1)$; c) $675\sqrt{3}/4$; 5. $80\sqrt{2}$ cm;

6. 4,8; 7. a) Fie pătratul ABCD și punctele E, F pe AB a.î.

$AE=EF=FB=1/3$. Notăm O centrul cercului și M mij. lui AB. $AM=OM=1/2$,

$EM=1/6$; Se obține raza cercului $OE=\sqrt{10}/6$; b) Aria octogonului este egală cu diferența dintre aria pătratului și ariile celor patru tr. dr. isoscele cu vârfurile A, B, C, D. Se obține 7/9; 8. Poligoanele care compun dreptunghiul nu se "aliniază" perfect. De ex., se poate verifica că $42/68 \neq 16/26$. Capetele diag. dreptunghiului și punctele din interior nu sunt coliniare.

Pg. 169 5. Se folosește tg în cele două tr. dr.; 2,2 m; 7. $n=20$,

$m=20\sqrt{3}$, $k=10\sqrt{7}$, $l=20$, $p=20\sqrt{3}$, $q=20\sqrt{2}$; 8. $\approx 23,1$ m; 9. a)

$AB=2\sqrt{5}$, $AC=4\sqrt{5}$, $BD=2$, $DC=8$; b) $\triangle ABO$ este isos. cu vârful O;

Pg. 170 4. a) Un \triangle dr. ar avea cat. și ip. egale cu 22; b) Un dreptunghi ar avea două laturi opuse de lungimi diferite; c) O coardă în cerc ar fi mai lungă decât diametrul; d) Un \triangle echilat. cu înălțimea 24 ar avea apotema

$8\sqrt{2}$; e) Un segm. de $16\sqrt{3}$ ar avea lungimea 28; 5. 6,6 m; 6. Se

folosește tg 30° ; 18,9 m; 7. Se trasează o înălțime din unul din vârfurile

diferite celui cu unghiul de 30° ; 42 cm²; 8. Din formula ariei triunghiului

se deduce că punctele C și D sunt egal depărtate de dreapta AB; 9. a)

Def. sin. în $\triangle ABB'$ și $\triangle ACC'$; b) De ex., $CC'=BC \sin ABC$;

c) Se deduce din punctul a) și din formula ariei tr. $S_{ABC}=bh/2$.

Unitatea 9. Pg. 173 T.I. I. 1. 5. 2. {2, 4, 5}. 3. 2300. II. 4. C. 5. D. 6. B. III. 8. 10 cm, 4,8 cm.

Pg. 175 4. 15 elemente. 6. a) $A = \{1,3\}$, $B = \{2,4\}$; b) $A = \{-1, \sqrt{5}\}$, $B = \{3, 6\}$. 7. $\text{card}(B)=4$. 8. $\text{card}(B)=3$. 9. Nu există, deoarece $(1,2), (3,4) \in A \times B$, dar $(3,2) \notin A \times B$. 10. 154 perechi. 11. 5 și 12, deci nu există o mulț. cu această propr. 12. $A = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$, $B = \{1; 2\}$, $\text{card}(A) = 5$, $\text{card}(B) = 2$, $\text{card}(A \times B) = \text{card}(B \times A) = 10$, $\text{card}(A \times A) = 25$, $\text{card}(B \times B) = 4$. 13. 15¹⁶ 16 numere de 3 cifre.

Pg. 177 4. a) A și C, B și D; b) A și D, B și C; c) A și B, C și D. 5. Se formează pătrat. 7. $M = \{1; 3\}$, $N = \{2; 4\}$. 8. OM și ON formează cu axa Ox unghiuri de 45° .

Pg. 179 5. b) $DE=3\sqrt{2}$, $EF=DF=3\sqrt{5}$; d) trapez dr.; e) 27; f) 27/2. 6.

b) $8+4\sqrt{13}$; c) $M(-3; 1,5)$, $N(3; -1,5)$ și $MN=3\sqrt{5}$; d) $A_{ABCF} = A_{CDEF} = 18$, $A_{ABDE} = A_{BCEF} = 24$; e) 6. 7. B(-3,4). 8. a) C(5; 5); b) ABCD romb,

$AC=4\sqrt{2}$, $BD=2\sqrt{2}$, $A=8$. **Pg. 182 6. b)** 15%; c) 32%.

Pg. 184 Recapitulăm... 4. B = {1,2}. 5. a) $\text{card}(B) = 4$; b) $\text{card}(A) = 4$; c)

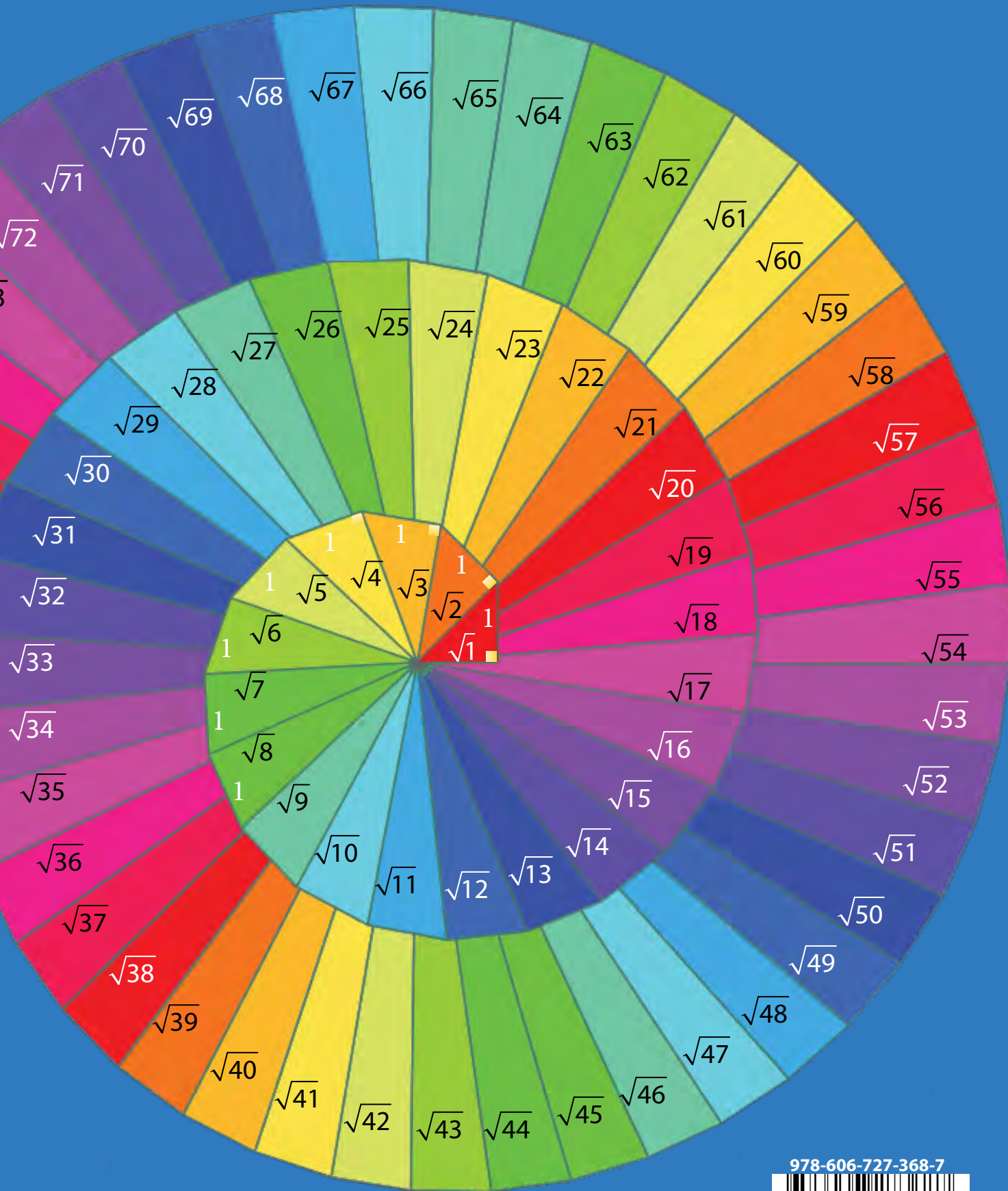
nu există mulț. A cu $\text{card}(A) = \sqrt{24}$. 7. $AB=BC=\sqrt{2}$. 8. a) 1; 1; 2; 4; 1; 1;

b) 12,6 min. 9. $A = \{-3; -2; 2; 3\}$, $B = \{0; 1; \sqrt{2}\}$. 10. b) $BC=2\sqrt{2}$,

$AB=AC=\sqrt{10}$, \triangle isos.; c) $h_A=2\sqrt{2}$; d) A=4. 11. b) 36%, 14%, 20%,

10%, 12%, 8%.

Programa școlară se află la adresa <http://programe.ise.ro>



978-606-727-368-7

