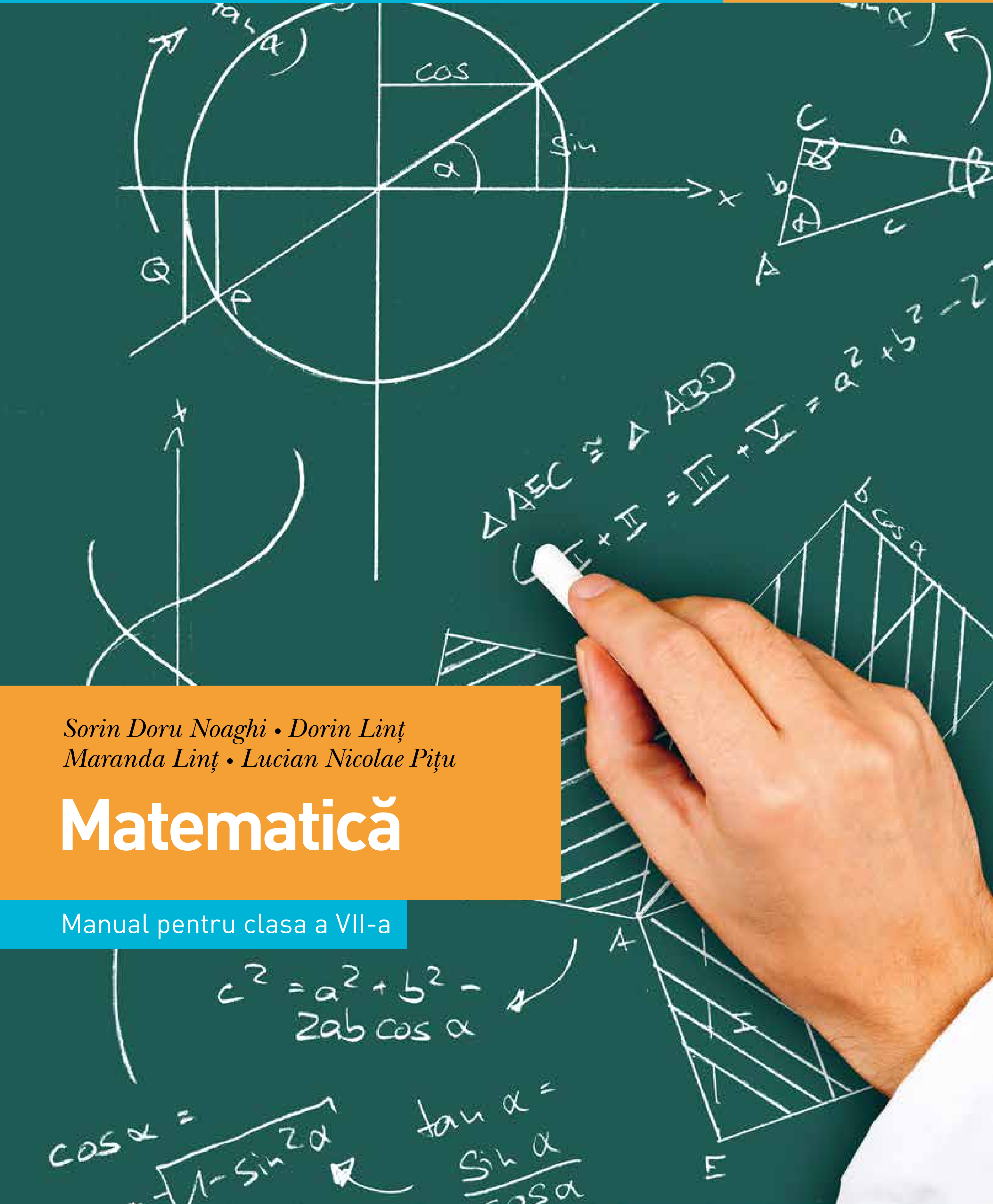
MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

LITERA

Sorin Doru Noaghi • Dorin Linț
Maranda Linț • Lucian Nicolae Pițu

Matematică

Manual pentru clasa a VII-a



Acest manual școlar este proprietatea Ministerului Educației și Cercetării.
Acest manual școlar este realizat în conformitate cu Programa școlară
aprobată prin OM nr. 3393 din 28.02.2017.

116.111 – numărul de telefon de asistență pentru copii

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

LITERA

Sorin Doru Noaghi • Dorin Linț
Maranda Linț • Lucian Nicolae Pițu

Matematică

Manual pentru clasa a VII-a

Manualul școlar a fost aprobat prin ordinul ministrului educației și cercetării nr. 5219/12.11.2019

Manualul este distribuit elevilor în mod gratuit, atât în format tipărit, cât și digital, și este transmisibil timp de patru ani școlari, începând cu anul școlar 2019–2020.

Inspectoratul școlar ....

Școala/Colegiul/Liceul ....

ACEST MANUAL A FOST FOLOSIT:

Anul	Numele elevului	Clasa	Anul școlar	Aspectul manualului*			
				format tipărit		format digital	
				la primire	la predare	la primire	la predare
1							
2							
3							
4							

* *Pentru precizarea aspectului manualului se va folosi unul dintre următorii termeni: nou, bun, îngrijit, neîngrijit, deteriorat.*

- Cadrele didactice vor verifica dacă informațiile înscrise în tabelul de mai sus sunt corecte.
- Elevii nu vor face niciun fel de însemnări pe manual.

Matematică. Manual pentru clasa a VII-a
Sorin Doru Noaghi, Dorin Linț, Maranda Linț, Lucian Nicolae Pițu

Referenți științifici: lect. univ. dr. Marius-Nicolae Heljiu, Departamentul de Matematică-Informatică, Facultatea de Științe, Universitatea din Petroșani
prof. dr. Dan-Ștefan Marinescu, Colegiul Național „Iancu de Hunedoara”, Hunedoara

LITERA®
Editura Litera
O.P. 53; C.P. 212, sector 4, București, România
tel.: 021 319 63 90; 031 425 16 19; 0752 548 372
e-mail: comenzi@litera.ro

Ne puteți vizita pe
www.litera.ro

Editor: Vidrașcu și fiii
Redactori: Gabriela Niță, Carmen Birta
Corector: Sabrina Florescu
Credite foto: Dreamstime, Shutterstock
Copertă: Vlad Panfilov
Tehnoredactare și prepress: Banu Gheorghe

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Matematică. Manual pentru clasa a VII-a /
Sorin Doru Noaghi, Dorin Linț, Maranda Linț,
Lucian Nicolae Pițu. – București: Litera, 2019

ISBN 978-606-33-3992-9

I. Noaghi, Sorin Doru
II. Linț, Dorin
III. Linț, Maranda
IV. Pițu, Lucian Nicolae

51

CUPRINS

Structura manualului

Varianta tipărită

Manualul de *Matematică – clasa a VII-a* cuprinde șapte capitole, totalizând un număr de 28 unități de învățare care respectă domeniile și conținuturile din programă. Lecțiile sunt însoțite de activități de învățare-evaluare interactive, cu caracter practic-aplicativ, care determină formarea competențelor specifice cu care acestea sunt corelate. Unitățile de învățare sunt divizate în lecții a căror parcurgere poate fi realizată în 1-3 ore de curs.

Pagina de prezentare a unității de învățare

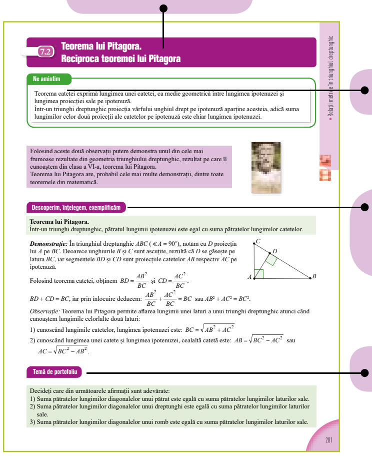
7 Relații metrice în triunghiul dreptunghic

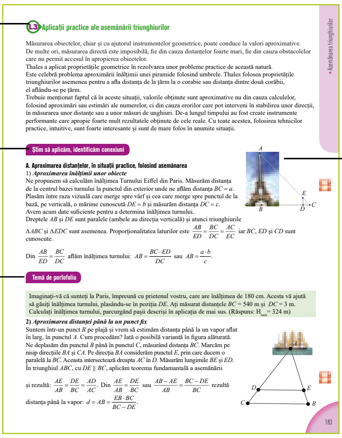
7.1. Proiecții ortogonale pe o dreaptă. Teorema înălțimii. Teorema catetei
7.2. Teorema lui Pitagora. Reciproca teoremei lui Pitagora
7.3. Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic: sinusul, cosinusul, tangenta, cotangenta unui unghi ascuțit
7.4. Rezolvarea triunghiului dreptunghic. Aplicații: calculul elementelor (latură, apotemă, arie, perimetru) în triunghiul echilateral, în pătrat și în hexagonul regulat. Aproximarea distanțelor, în situații practice, folosind relații metrice

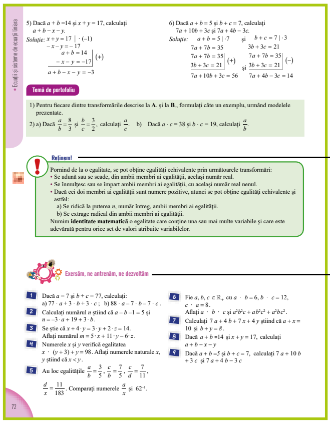
Competențe specifice: 1.7 2.7 3.7 4.7 5.7 6.7

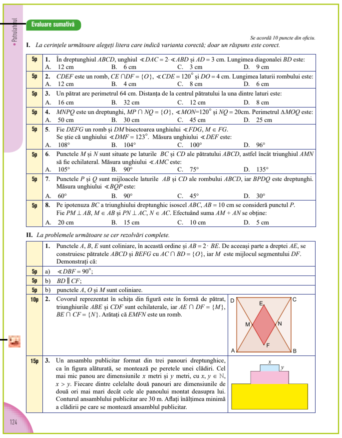
189

Pagini din manual









Despre rubrici

Ne amintim	concepte, cunoştinţe pe care elevii le-au dobândit în lecţii anterioare, în scopul valorificării achiziţiilor acestora şi vizând identificarea firească a noilor conţinuturi prin conexiuni logice
Rezolvăm şi observăm	exerciţii/probleme relevante pentru *identificarea* sau *deducerea* unor elemente noi pe baza observaţiei: proprietăţi, algoritmi, implicaţii
Descoperim, înţelegem, exemplificăm	conţinuturile prevăzute de programa şcolară, însoţite de exemple concludente, comentarii, modele de rezolvare
Ştim să aplicăm, identificăm conexiuni	aplicaţii rezolvate, unele rezultate matematice remarcabile care realizează conexiuni între elementele de conţinut din lecţie, achiziţii anterioare şi viaţa cotidiană.
Aplicaţie practică	activitate de grup sau individuală care presupune realizarea unor sarcini de lucru descrise
Temă de portofoliu	activitate individuală sau de grup, care constă în parcurgerea unor etape descrise, folosind modelele prezentate în manual.
Reţinem	sintetizarea elementelor noi de conţinut prin concluzii, reluarea unor idei esenţiale, prezentarea unor scheme, imagini
Să nu ne pripim!	atenţionări referitoare la folosirea unor proprietăţi în mod incorect/ abuziv
Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm	activităţi eşalonate în funcţie de gradul de dificultate şi de parcurgerea conţinuturilor în cadrul unităţii de învăţare.
Evaluare sumativă	itemi de evaluare: obiectivi, semiobiectivi, subiectivi

Varianta digitală

Varianta digitală cuprinde integral conţinutul manualului în variantă tipărită, având în plus exerciţii interactive, jocuri educaţionale, animaţii, filme şi simulări.

Toate acestea au obiectivul de a aduce un plus de valoare cognitivă.

Paginile din manual pot fi vizionate pe desktop, laptop, tabletă, telefon, oferind o experienţă excelentă de navigare.

Navigarea în varianta digitală permite parcurgerea manualului şi revenirea la activitatea de învăţare precedentă.

Forma electronică a manualului şcolar are un conţinut similar celei tipărite şi cuprinde, în plus, o serie de activităţi multimedia interactive de învăţare: statice, animate, interactive.

AMII static 🖼	Cuprinde desene, fotografii, diagrame statice, hărţi statice.
AMII animat 🎞	Cuprinde animaţii sau filme.
AMII interactiv ☑	Cuprinde elemente educaţionale cu grad înalt de interactivitate (simulări de procese, rezolvare de probleme, experiment şi descoperire, jocuri educative), prin care elevul reuşeşte să adauge o valoare cognitivă superioară.

Competențe generale și competențe specifice conform OMEN 3393/28.02.2017

1. **Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar**
   - **1.1.** Identificarea numerelor aparținând diferitelor submulțimi ale lui $\mathbb{R}$
   - **1.2.** Identificarea unei situații date rezolvabile prin ecuații sau sisteme de ecuații liniare
   - **1.3.** Identificarea unor informații din tabele, grafice și diagrame
   - **1.4.** Identificarea patrulaterelor particulare în configurații geometrice date
   - **1.5.** Identificarea elementelor cercului și/sau poligoanelor regulate în configurații geometrice date
   - **1.6.** Identificarea triunghiurilor asemenea în configurații geometrice date
   - **1.7.** Recunoașterea elementelor unui triunghi dreptunghic într-o configurație geometrică dată

2. **Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale**
   - **2.1.** Aplicarea regulilor de calcul pentru estimarea și aproximarea numerelor reale
   - **2.2.** Utilizarea regulilor de calcul cu numere reale pentru verificarea soluțiilor unor ecuații sau sisteme de ecuații liniare
   - **2.3.** Prelucrarea unor date sub formă de tabele, grafice sau diagrame în vederea înregistrării, reprezentării și prezentării acestora
   - **2.4.** Descrierea patrulaterelor utilizând definiții și proprietăți ale acestora, în configurații geometrice date
   - **2.5.** Descrierea proprietăților cercului și ale poligoanelor regulate înscrise într-un cerc
   - **2.6.** Stabilirea relației de asemănare între triunghiuri
   - **2.7.** Aplicarea relațiilor metrice într-un triunghi dreptunghic pentru determinarea unor elemente ale acestuia

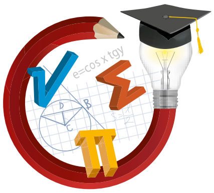
3. **Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice**
   - **3.1.** Utilizarea unor algoritmi și a proprietăților operațiilor în efectuarea unor calcule cu numere reale
   - **3.2.** Utilizarea transformărilor echivalente în rezolvarea unor ecuații și sisteme de ecuații liniare
   - **3.3.** Alegerea metodei adecvate de reprezentare a problemelor în care intervin dependențe funcționale și reprezentări ale acestora
   - **3.4.** Utilizarea proprietăților patrulaterelor în rezolvarea unor probleme
   - **3.5.** Utilizarea proprietăților cercului în rezolvarea de probleme
   - **3.6.** Utilizarea asemănării triunghiurilor în configurații geometrice date pentru determinarea de lungimi, măsuri și arii
   - **3.7.** Deducerea relațiilor metrice într-un triunghi dreptunghic

4. **Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată**
   - **4.1.** Folosirea terminologiei aferente noțiunii de număr real (semn, modul, opus, invers)
   - **4.2.** Redactarea rezolvării ecuațiilor și sistemelor de ecuații liniare
   - **4.3.** Descrierea în limbajul specific matematicii a unor elemente de organizare a datelor
   - **4.4.** Exprimarea în limbaj geometric a noțiunilor legate de patrulatere
   - **4.5.** Exprimarea proprietăților cercului și ale poligoanelor în limbaj matematic
   - **4.6.** Exprimarea în limbaj matematic a proprietăților unor figuri geometrice folosind asemănarea
   - **4.7.** Exprimarea în limbaj matematic a relațiilor dintre elementele unui triunghi dreptunghic

5. **Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date**
   - **5.1.** Elaborarea de strategii pentru rezolvarea unor probleme cu numere reale
   - **5.2.** Stabilirea unor metode de rezolvare a ecuațiilor sau a sistemelor de ecuații liniare
   - **5.3.** Analizarea unor situații practice prin elemente de organizare a datelor
   - **5.4.** Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea optimizării calculării unor lungimi de segmente, a unor măsuri de unghiuri și a unor arii
   - **5.5.** Interpretarea unor proprietăți ale cercului și ale poligoanelor regulate folosind reprezentări geometrice
   - **5.6.** Interpretarea asemănării triunghiurilor în configurații geometrice
   - **5.7.** Interpretarea unor relații metrice între elementele unui triunghi dreptunghic

6. **Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii**
   - **6.1.** Modelarea matematică a unor situații practice care implică operații cu numere reale
   - **6.2.** Transpunerea matematică a unor situații date, utilizând ecuații și/sau sisteme de ecuații liniare
   - **6.3.** Transpunerea unei situații date într-o reprezentare adecvată (text, formulă, diagramă, grafic)
   - **6.4.** Modelarea unor situații date prin reprezentări geometrice cu patrulatere
   - **6.5.** Modelarea matematică a unor situații practice în care intervin poligoane regulate sau cercuri
   - **6.6.** Implementarea unei strategii pentru rezolvarea unor situații date, utilizând asemănarea triunghiurilor
   - **6.7.** Implementarea unei strategii pentru rezolvarea unor situații date, utilizând relații metrice în triunghiul dreptunghic

Probleme recapitulative



1 Fie mulțimea $A=\left\{-\frac{8}{4}, \frac{-3}{-0,5}, \frac{78}{-13}, \frac{7}{4}, 6^2:3^2, (-3)^0\right\}$. Determinați mulțimile $A \cap \mathbb{N}, A \cap \mathbb{Z}, A \setminus \mathbb{Z}$.

2 Calculați suma numerelor întregi cuprinse între $-\frac{23}{6}$ și $\frac{63}{22}$.

3 Precizați valoarea de adevăr a următoarelor propoziții.
a) „Numărul $a = 7 - 13 + 18 - 10 + 9$ este natural.”
b) „Numărul $b = (-2)^3 + (-3)^2 + (-3+2) \cdot (-3-2)$ este întreg negativ.”
c) „Numărul $c=-\frac{1}{4}+\left(0,5-\frac{5}{2}+0,2\right):\left(-4+\frac{2}{5}\right)$ este rațional și nu este întreg.”

4 La un test, elevii unei clase au obținut: trei note de 6, patru note de 7, cinci note de 8, câte șase note de 9 și șapte note de 10. Calculați media clasei la acest test.

5 Fie numerele $x = 2{,}7$; $y=1\frac{1}{2}$ și $z=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$. Aflați rezultatul calculului $z \cdot (x - y^2)$.

6 Arătați că numărul $n=\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\cdot\left[\frac{4}{3}-\left(0,(3)\right)^2\right]:4\frac{8}{9}$ este natural.

7 a) Determinați numerele întregi x pentru care $|x + 3| = 7$.
b) Determinați numerele întregi y pentru care $|3y - 2| \le 4$.

8 La cerințele următoare, alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.
8.1. Cel mai mare divizor comun al numerelor 10 și 15 este:
A. 25; B. 30; C. 5; D. 10.
8.2. Cel mai mic multiplu comun al numerelor 10 și 15 este:
A. 100; B. 50; C. 30; D. 5.
8.3. Dacă a este număr natural și $\frac{a+7}{a+2}$ este număr întreg, atunci a are valoarea:
A. 3; B. 0; C. 1; D. – 1.
8.4. După ce a parcurs 30% din lungimea unui traseu, un sportiv constată că mai are de parcurs încă 8,4 km. Lungimea traseului este:
A. 10 km; B. 12 km; C. 84 km; D. 42 km.

9 Pentru $a = -2 - (-4)$ și $b = -3 + (-3)^2 - (-2) \cdot (-4)$, calculați valoarea raportului $\frac{a-3\cdot b}{3\cdot a+b}$.

10 Aflați numerele raționale x și y știind că au suma 67, iar valoarea raportului dintre $(x - 10)$ și y este 0,5.

11 Cu elemente ale mulțimii $S = \{27, 64, 102, 1234, 5532, 10010, 10^5\}$, formați submulțimile:
$A = \{x \in S \mid x \,\vdots\, 2\}$, $B = \{x \in S \mid x \,\vdots\, 3\}$, $C = \{x \in S \mid x \,\vdots\, 4$ și $x \not\vdots\, 8\}$.

12 Arătați că:

a) numărul $2^{n+3} + 2^{n}$ este divizibil cu 9, oricare ar fi numărul natural n.

b) numărul $4 \cdot m + 8^{m}$ este multiplu al lui 4, oricare ar fi numărul natural nenul m.

c) numărul 3 nu divide numărul $2^{p} + 6^{p}$, pentru nicio valoare a numărului natural p.

13 Stabiliți dacă numărul $a = \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right):\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\frac{1}{81}\right)$ este pozitiv, negativ sau nul.

14 Aflați:

a) numărul natural x din proporția $\frac{x}{4}=\frac{9}{x}$.

b) numărul întreg y din proporția $\frac{3}{y}=\frac{y}{27}$.

15 Aflați numerele a, b și c, știind că sunt direct proporționale cu 2, $\frac{5}{2}$ și 3, iar media lor aritmetică este 25.

16 Numerele a, b și c sunt raționale și verifică egalitatea $3 \cdot a + 4 \cdot b = c - 36$. Determinați cele trei numere dacă că a și b sunt direct proporționale cu 4 și 3, iar b și c sunt invers proporționale cu 0,24 și 0,01.

17 Rezolvați următoarele ecuații:

a) $1{,}3 \cdot x + 2{,}73 = 2 \cdot (1{,}2 \cdot x - 1)$;

b) $\frac{x}{2}+\frac{4}{9}=\frac{x+7}{6}$;

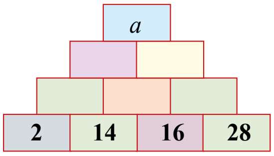
c) $\frac{5 \cdot x - 1}{10}=\frac{2 \cdot x - 3}{6}+\frac{1}{3}$.

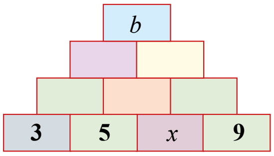
18 Dintr-un grup de copii, o treime participă la un concurs de schi, iar ceilalți 14 copii hotărăsc doar să-i susțină. Aflați numărul copiilor din grup.

19 Dragoș a cumpărat cadouri pentru prietenii săi Alin, Cezar și Vlad. Cadoul lui Alin a costat $\frac{2}{5}$ din suma pe care o avea, cadoul lui Cezar cu 8 lei mai puțin, iar cadoul lui Vlad a costat 31 de lei. Știind că, după ce a plătit cumpărăturile, lui Dragoș i-au mai rămas 13 lei, aflați suma cheltuită de Dragoș pentru cadouri.

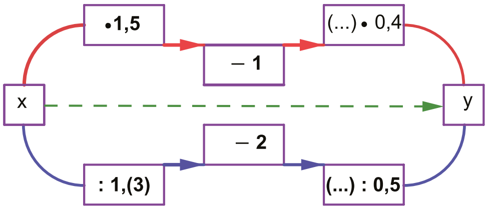
20 Dintr-un depozit de materiale de construcții s-au vândut 22 de tone de ciment, adică $\frac{5}{8}$ din cantitatea de ciment existentă în depozit, iar a doua zi s-au vândut $\frac{3}{4}$ din cantitatea rămasă. Aflați cantitatea de ciment care mai rămâne în depozit după cele două vânzări.

21 Copiați pe caiete tabelele alăturate, apoi completați căsuțele libere, respectând următoarea regulă: media aritmetică a două numere situate în (două) căsuțe vecine din același rând se scrie în căsuța situată deasupra lor.
Aflați numărul x, știind că, efectuând toate calculele, numerele a și b sunt egale.





22 Pornind de la x și efectuând toate operațiile indicate în figura alăturată, pe oricare dintre cele două trasee se ajunge la rezultatul înscris în căsuța din dreapta.
Aflați numerele x și y.



23 Segmentul AD conține punctele B și C astfel încât $AB = 4$ cm, $AC = 12$ cm, $AD = 20$ cm. Arătați că punctul C este mijlocul segmentului BD.

24 Punctele O, A, B, C sunt coliniare în această ordine, iar segmentele OA, AB și BC au lungimile exprimate în cm, prin numere naturale pare consecutive. Se știe că M este mijlocul segmentului AC și $OM = 11$ cm. Calculați:
a) lungimea segmentului OC;
b) distanța dintre N, mijlocul segmentului OB, și punctul M.

25 Unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle COD$ sunt unghiuri opuse la vârf, $O \in AC$, iar $PO \perp BD$, $P \in$ Int $\sphericalangle AOD$. Dacă $\sphericalangle COP = 133°$, aflați măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$.

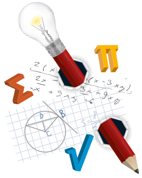
26 Unghiurile $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$ și $\sphericalangle DOA$ sunt unghiuri în jurul punctului O, $\sphericalangle AOB = 80°$, $\sphericalangle BOC = 140°$ și $CO \perp OD$.
a) Calculați măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle AOD$.
b) Demonstrați că semidreapta opusă semidreptei OC este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOB$.

27 Între laturile triunghiul ABC au loc relațiile: $AB + \dfrac{BC}{2} = BC + \dfrac{AC}{2} = AC + \dfrac{AB}{2} = 12$ cm.
Completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:
a) $AB = \ldots$ cm;
b) $\mathcal{P}_{\Delta ABC} = \ldots$ cm;
c) $\sphericalangle BAC = \ldots\ °$;
d) $\sphericalangle ABC = \ldots\ °$.

28 Fie unghiul $\sphericalangle xOy$ cu măsura de 120° și punctele $A \in Ox$, $B \in Oy$ cu $AO = BO$. Mediatoarele segmentelor AO și BO se intersectează în punctul C.
Demonstrați că:
a) $\Delta AOC \equiv \Delta BOC$;
b) ΔABC este isoscel;
c) $AC \parallel OB$.

29 Triunghiul ABC este dreptunghic, $\sphericalangle A = 90°$ și $AB = AC$. Bisectoarea unghiului exterior A intersectează bisectoarea unghiului exterior C în punctul D. Stabiliți valoarea de adevăr pentru fiecare dintre propozițiile date.
a) $AD \parallel BC$;
b) $\sphericalangle ADC = 100°$;
c) ΔADC este isoscel;
d) $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CBD$;
e) $\sphericalangle ADB = 110°\ 30'$.

30 În triunghiul ABC, $AB = AC = 10$ cm, $\sphericalangle A = 120°$, AD este bisecioarea unghiului $\sphericalangle BAC$, $D \in BC$, iar M este mijlocul laturii AB. Completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:
a) $\sphericalangle ABC = \ldots\ °$;
b) $\sphericalangle ADB = \ldots\ °$;
c) $\sphericalangle BMD = \ldots\ °$;
d) $AD = \ldots$ cm;
e) $DM = \ldots$ cm;
f) $d(M, BD)$.



31 Segmentul AB este diametru al cercului $\mathcal{C}(O, r)$. Pe cerc, de o parte și de alta a dreptei AB, sunt situate punctele C și D astfel încât $\sphericalangle BOC = 45°$ iar arcele AD și BD sunt congruente. Demonstrați că $OC \perp AD$.

32 În triunghiul ΔDEF se cunosc $DE = 7$ cm, $DF = 24$ cm și $EF = 25$ cm.
a) Arătați că triunghiul este dreptunghic.
b) Dacă DL este mediană a triunghiului, calculați perimetrul triunghiului ΔLED.

33 Fie unghiul propriu $\sphericalangle ABC$. Paralela prin punctul A la dreapta BC intersectează bisectoarea unghiului în D.
a) Demonstrați că $AB \equiv AD$.
b) Dacă $BC \equiv DC$, demonstrați că $AC \perp BD$.

34 De o parte și de alta a dreptei BC, se consideră triunghiurile echilaterale ABC și DBC. Segmentul BE este mediană în triunghiul ABC, $E \in AC$, iar BF este înălțime în triunghiul BCD, $F \in CD$.
a) Demonstrați că triunghiul BEF este echilateral.
b) Calculați raportul $\frac{BP}{CP}$, P fiind punctul de intersecție al dreptelor BC și EF.

35 Pe mediatoarea segmentului AB, se consideră punctele C și D, diferite de mijlocul segmentului AB.
a) Demonstrați că $\Delta ACD \equiv \Delta BCD$.
b) Știind că $\sphericalangle CDB = 38°$, calculați măsura unghiului ADB.

36 Triunghiurile ABC și DBC sunt dreptunghice, $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$ și E este mijlocul laturii BC.
a) Dacă punctele A, E, D nu sunt coliniare, demonstrați că triunghiul AED este isoscel.
b) Dacă $AD \perp BC$, arătați că $\Delta ABC \equiv \Delta DBC$.

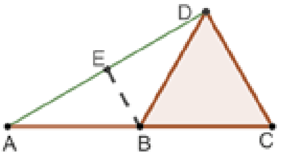
37 Punctul B este situat pe mediana MA a triunghiului MNP, astfel încât $AB = 3$ cm, $BM = 6$ cm.
a) Dacă $NB \cap MP = \{C\}$, arătați că $CM \equiv CP$;
b) Dacă $PB \cap MN = \{D\}$, arătați că $PD = 3 \cdot BD$.

38 Segmentele congruente AB și CD se intersectează în punctul E, $AE = 3$ cm, $AB = 6$ cm, $CE = \frac{1}{2} \cdot CD$.
Demonstrați că:
a) $\Delta AED \equiv \Delta CEB$;
b) $AC \parallel BD$.

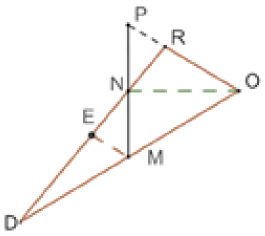
39 Punctele A, B, C sunt coliniare, în această ordine. De aceeași parte a dreptei AB, se consideră punctele D și E, astfel încât $DA \perp BC$, $DA \equiv BC$ și $EC \perp AB$, $EC \equiv AB$.
a) Arătați că $\Delta ABD \equiv \Delta CEB$.
b) Calculați măsurile unghiurilor triunghiului BDE.
c) Demonstrați că dacă $BF \perp DE$, atunci $FD \equiv FE$.

40 Construiți un triunghi DEF, în care mediana DM are lungimea egală cu jumătate din lungimea laturii EF, iar $\sphericalangle DEF = 60°$.

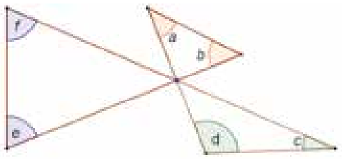
41 Fie M și N mijloacele laturilor AB și AC ale triunghiului echilateral ΔABC și fie P, simetricul punctului M față de dreapta BC. Demonstrați că dreapta NP conține mijlocul segmentului BC.



42 În figura alăturată, punctele A, B, C, D, E reprezintă obiective turistice, segmentele marcate reprezintă străzi. Se știe că A, B, C sunt puncte coliniare și că $BC = CD = DB = 800$ m. Triunghiul ABD este isoscel, iar punctul E este mijlocul segmentului AD.
a) Demonstrați că $BE \parallel CD$.
b) Aflați măsura unghiului CAD.
c) Calculați lungimea traseului $A–B–C–D–B–E$.



43 Dora, Ovidiu și Radu participă la un joc în care se deplasează pe diferite trasee. Figura alăturată reprezintă prin segmente aceste trasee. Se știe că ON este bisectoarea $\sphericalangle DOR$, perpendiculara în punctul N pe dreapta ON intersectează OR în P și DO în mijlocul M al segmentului DO, iar $ME \parallel OR$, $E \in DR$. Pentru început, copiii ocupă pozițiile D, O, R și se deplasează, păstrând ordinea, în pozițiile O, P respectiv E.
a) Arătați că Dora parcurge o distanță de două ori mai mai mare decât Ovidiu.
b) Arătați că Radu parcurge jumătate din traseul $R–D$.



44 Calculați suma măsurilor unghiurilor marcate și notate, în figura alăturată, cu: a, b, c, d, e, f.

1

Mulțimea numerelor reale

Competențe specifice:

1.1 2.1 3.1 4.1 5.1 6.1

1.1 Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural. Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional pozitiv

L1 Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural

Ne amintim

Mulțimi de numere

$\mathbb{N}=\{0,1,2,3,....\}$, mulțimea numerelor naturale;

$\mathbb{Z}=\{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$, mulțimea numerelor întregi;

$\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}\,\middle|\,a,b\in\mathbb{Z},b\neq 0\right\}$, mulțimea numerelor raționale.

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$$

Reguli de calcul cu puteri

Dacă $a,b\in\mathbb{Q}^*$, iar $n,\ p\in\mathbb{Z}$, atunci:

$$a^n\cdot a^p=a^{n+p}$$

$$\left(a^n\right)^p=a^{n\cdot p}$$

$$a^n:a^p=a^{n-p}$$

$$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n$$

$$a^n:b^n=(a:b)^n$$

Pătrate perfecte

Numărul $x\in\mathbb{N}$ se numește **pătrat perfect** dacă există $n\in\mathbb{N}$ astfel încât $x=n^2$.

Exemple

$7\in\mathbb{N},\ 7\in\mathbb{Z},\ 7\in\mathbb{Q}$

$-7\notin\mathbb{N},\ -7\in\mathbb{Z},\ -7\in\mathbb{Q}$

$\frac{1}{7}\notin\mathbb{N},\ \frac{1}{7}\notin\mathbb{Z},\ \frac{1}{7}\in\mathbb{Q}$

$3^1\cdot 3^4=3^{1+4}=3^5$

$\left((-1)^3\right)^2=(-1)^{3\cdot 2}=(-1)^6=1$

$5^4:5^3=5^{4-3}=5$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{-3}=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\right)^{-3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=\frac{27}{8}$

$(0,6)^2:2^2=(0,6:2)^2=0,3^2=0,09$

49 este pătrat perfect deoarece $49=7^2$

256 este pătrat perfect deoarece $256=16^2$

Rezolvăm și observăm

a) Dorim să aflăm numerele naturale care, ridicate la puterea a doua, dau unul din rezultatele: 16, 49, 225. Prin încercări, deducem că: $4^2=16$, $7^2=49$, $15^2=225$.

b) Ne propunem să aflăm latura pătratului a cărui arie este 144 cm^2.

$\mathcal{A}_{\square}=l^2$ și $\mathcal{A}_{\square}=144\ \text{cm}^2$. Obținem $l^2=12^2$, deci $l=12$ cm.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Definiție: Fie $x\in\mathbb{N}$, pătrat perfect.
Se numește **rădăcina pătrată** a numărului x numărul natural n cu proprietatea $x=n^2$.

Vom scrie $\sqrt{x}=n$ și vom citi „***radical din x este egal cu n***”.

Numărul natural n se mai numește și
„radicalul de ordin 2 al numărului *x*”.

Exemple

$\sqrt{25}=5$ deoarece $5\in\mathbb{N}$ și $25=5^2$

$\sqrt{81}=9$ deoarece $9\in\mathbb{N}$ și $81=9^2$.

$\sqrt{0}=0$ deoarece $0\in\mathbb{N}$ și $0=0^2$.

$\sqrt{529}=23$ deoarece $23\in\mathbb{N}$ și $529=23^2$.

Operația prin care unui pătrat perfect $x \in \mathbb{N}$ i se asociază un număr $n \in \mathbb{N}$ cu proprietatea $x = n^2$ se numește **operația de extragere a rădăcinii pătrate** sau **operația de extragere a radicalului.**

pătrat perfect

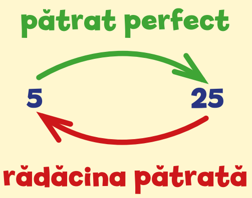
$25 = 5^2$

$\Downarrow$

$\sqrt{25} = 5$

rădăcina pătrată

Pătrate perfecte	Rădăcina pătrată
$225 = 15^2$	$\sqrt{225} = 15$
$256 = 16^2$	$\sqrt{256} = 16$
$289 = 17^2$	$\sqrt{289} = 17$
$324 = 18^2$	$\sqrt{324} = 18$
$361 = 19^2$	$\sqrt{361} = 19$
$400 = 20^2$	$\sqrt{400} = 20$
$441 = 21^2$	$\sqrt{441} = 21$



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

$\sqrt{17^2} = 17$; $\sqrt{2019^2} = 2019$; $\sqrt{5^6} = \sqrt{\left(5^3\right)^2} = 5^3 = 125$;

$\sqrt{(38\cdot7+98:14)^2} = 38\cdot7+98:14$;

$\sqrt{2^{2018}} = \sqrt{\left(2^{1009}\right)^2} = 2^{1009}$; $\sqrt{2^4\cdot3^2} = \sqrt{\left(2^2\cdot3\right)^2} = \sqrt{12^2} = 12$

Concluzie:

$\sqrt{x} = n \Leftrightarrow x = n^2$, unde $n \in \mathbb{N}$

Prin urmare, $\sqrt{n^2} = n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

De regulă, înainte de a efectua adunări, scăderi, înmulțiri, împărțiri sau ridicări la putere ale unor expresii care conțin radicali, se vor efectua operațiile de extragere a rădăcinilor pătrate.

$$\sqrt{36}+\sqrt{100}:\sqrt{25} = 6+10:5 = 8$$

$$\sqrt{64}\cdot\sqrt{9}+\sqrt{25}^{\sqrt{4}} = 8\cdot3+5^2 = 49$$

Totuși, în anumite situații, operațiile de extragere a radicalilor se pot realiza după efectuarea anumitor operații algebrice.

a) $\sqrt{25}\cdot\sqrt{4} = 5\cdot2 = 10$ și $\sqrt{25\cdot4} = \sqrt{100} = 10$, deci $\sqrt{25}\cdot\sqrt{4} = \sqrt{25\cdot4}$

b) $\dfrac{\sqrt{225}}{\sqrt{25}} = \dfrac{15}{5} = 3$ și $\sqrt{\dfrac{225}{25}} = \sqrt{9} = 3$, deci $\dfrac{\sqrt{225}}{\sqrt{25}} = \sqrt{\dfrac{225}{25}}$

c) $\sqrt{1600} = \sqrt{16\cdot100} = \sqrt{16}\cdot\sqrt{100} = 4\cdot10 = 40$

$\sqrt{\dfrac{1600}{49}} = \dfrac{\sqrt{1600}}{\sqrt{49}} = \dfrac{40}{7}$

Au loc relațiile:

a) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{y} = \sqrt{x\cdot y}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{N}$, pătrate perfecte.

b) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{N}$ și oricare ar fi $y \in \mathbb{N}^*$, pătrate perfecte.

c) $\sqrt{x\cdot y} = \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}$, $x, y \in \mathbb{N}$ pătrate perfecte, respectiv $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$, $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}^*$, pătrate perfecte.

Să nu ne pripim!

Ne putem întreba dacă au loc relații similare și în cazul adunării sau al scăderii.

Comparăm rezultatele calculelor:

$\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$ și $\sqrt{16}+\sqrt{9}=4+3=7$

$\sqrt{169-25}=\sqrt{144}=12$ și $\sqrt{169}-\sqrt{25}=13-5=8$

$\sqrt{16+9}\neq\sqrt{16}+\sqrt{9}$

$\sqrt{169-25}\neq\sqrt{169}-\sqrt{25}$

Concluzie: $\sqrt{x+y}$ și $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ **sunt diferite** pentru orice numere raționale pozitive.

$\sqrt{x-y}$ și $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ **sunt diferite** pentru orice numere raționale pozitive, $x>y$.

Reținem!

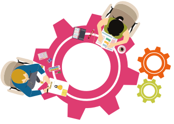
Dacă x este pătrat perfect, atunci numărul natural n cu proprietatea $x=n^2$ se numește **rădăcina pătrată** a numărului x sau **radicalul de ordin 2** al numărului x.

Se notează $\sqrt{x}=n$.

$\sqrt{x}=n \Leftrightarrow x=n^2$, unde $x\in\mathbb{N}$ este pătrat perfect și $n\in\mathbb{N}$.

$\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=\sqrt{x\cdot y}$; $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\sqrt{\dfrac{x}{y}}$, $y\neq 0$, unde $x, y\in\mathbb{N}$ sunt pătrate perfecte.

$\sqrt{n^2}=n$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 a) Scrieți toate pătratele perfecte mai mari decât 700 și mai mici decât 1000.

b) Scrieți toate pătratele perfecte cuprinse între 123 și 321.

2 Stabiliți care dintre următoarele numere sunt pătrate ale unor numere naturale. Justificați răspunsul dat.

a) 64, 100, 140, 333, 1000000

b) 2^4, $4^2\cdot 9$, 3^6, 21^8, 10^9, $5^{2\cdot n}$, $6^{4\cdot n+1}$, $n\in\mathbb{N}$.

3 Copiați tabelele pe caiete, apoi completați căsuțele libere ale fiecăruia, știind că x desemnează un număr *natural*.

a)

x	4	1	0	2	7	11
x^2						

b)

x^2	9	36	400	0	121	49
x						
$\sqrt{x^2}$						

4 Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

$p_1:\sqrt{4}=2$;

$p_2:\sqrt{121}=11$;

$p_3:\sqrt{a^2}=a$, oricare ar fi $a\in\mathbb{N}$;

$p_4:\sqrt{11^2}=-11$;

$p_5:\sqrt{c^2}=c$, oricare ar fi $c\in\mathbb{Z}$;

$p_6:\sqrt{100\cdot b^4}=10\cdot b^2$, oricare ar fi $b\in\mathbb{Z}$.

5 Determinați numărul natural n, pentru fiecare din situațiile:

a) $n^2=81$; b) $n^2=169$; c) $n^2=900$; d) $n^2=441$.

6 Demonstrați că numărul x este pătrat perfect și calculați $\sqrt{x}$:

a) $x=19\cdot 9+19\cdot 10$;

b) $x=2^{11}-2^{10}$;

c) $x=200+199\cdot 200$;

d) $x=n+n\cdot(n-1)$, $n\in\mathbb{N}^*$;

e) $x=\sqrt{441}+\sqrt{\dfrac{42\cdot 43+43\cdot 44}{2}}$;

f) $x=\dfrac{3^{n+2}-3^{n+1}-2\cdot 3^n}{3^n}$, $n\in\mathbb{N}$.

7 Calculați:

a) $x = 9^2 + 12^2$, apoi $\sqrt{x}$;

b) $y = 25^2 - 7^2$, apoi $\sqrt{y}$;

c) $z = 13^2 + 2 \cdot 13 \cdot 17 + 17^2$, apoi $\sqrt{z}$.

8 a) Completați numere naturale în spațiile libere. pentru a obține egalități:
$2^2 \cdot 3^4 = (\ldots)^2$; $2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^6 = (\ldots)^2$
$2^{100} : 2^{84} = (\ldots)^2$; $2^6 \cdot 5^2 = (\ldots)^2$

b) Calculați $\sqrt{14^2}$; $\sqrt{7^4}$; $\sqrt{a^2}$, $a \in \mathbb{N}$;

c) Folosind rezultatele de la subpunctul a), calculați: $\sqrt{2^2 \cdot 3^4}$; $\sqrt{2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^6}$;
$\sqrt{2^{100} : 2^{84}}$; $\sqrt{2^6 \cdot 5^2}$.

9 Se consideră mulțimea $A = \{576, 484, 2025, 1600, 2500, 3600, 1521, 729, 529, 2116\}$

a) Descompuneți în factori primi elementele mulțimii A și apoi scrieți-le ca pătrate ale unor produse.

b) Folosind rezultatele obținute la subpunctul a), calculați rădăcina pătrată a fiecărui element al mulțimii A.

10 Scrieți numerele de sub fiecare radical ca pătrat al unui număr natural, apoi efectuați calculele:

a) $\sqrt{1156} + \sqrt{3249} - \sqrt{1296}$

b) $\sqrt{1936} + \frac{1}{2}\sqrt{3844}$

c) $1{,}5 \cdot \sqrt{4900} - \sqrt{46656}$

11 a) Se consideră numărul
$A = 1 + 2 + \ldots + 10 + 10 \cdot (2^0 + 2^3 + 2^4 + 2^5)$.
Demonstrați că A este pătrat perfect și calculați $\sqrt{A}$.

b) Se consideră numărul
$B = 1 + 3 + 5 + \ldots + 19$.
Demonstrați că B este pătrat perfect și calculați $\sqrt{B}$.

c) Se consideră numărul
$C = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Demonstrați că C este pătrat perfect și calculați $\sqrt{C}$.

12 Probați, prin exemple, afirmațiile:

a) Dacă $a, b \in \mathbb{N}^*$, atunci $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$.

b) Dacă $a, b \in \mathbb{N}^*$, $a > b$, atunci $\sqrt{a^2 - b^2} \neq a - b$.

L2 Rădăcina pătrată a pătratului unui număr rațional

Ne amintim

În lecția anterioară, am stabilit că:

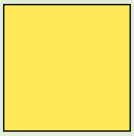
$\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$ $\quad$ $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$, $y \neq 0$ $\quad$ $\sqrt{n^2} = n$ $\quad$ $\sqrt{x} = n \Leftrightarrow x = n^2$ unde x și y sunt pătrate perfecte, iar $n \in \mathbb{N}$.

În cazul $x = 0$, am constatat că $\sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$.

Ne propunem să aflăm dacă există $\sqrt{x}$, atunci când x este număr rațional pozitiv. Ne vom ocupa, mai întâi, de acele numere raționale care sunt *pătrate ale unor numere raționale pozitive*.

Rezolvăm și observăm

Aria unui pătrat este 1,69 cm². Determinați lungimea laturii acestuia.



Soluția I: $\mathcal{A}_{\square} = l^2$, $\mathcal{A}_{\square} = 1{,}69$ cm². Obținem $l^2 = 1{,}3^2$, deci $l = 1{,}3$ cm.

Soluția a II-a: În contextul lecției noastre, rezolvarea se poate scrie astfel: $\mathcal{A}_{\square} = l^2$, $\mathcal{A}_{\square} = 1{,}69$ cm².

Obținem $l^2 = 1{,}69$, deci $l = \sqrt{1{,}69} = \sqrt{\frac{169}{100}} = \frac{13}{10} = 1{,}3 \Rightarrow l = 1{,}3$ cm,

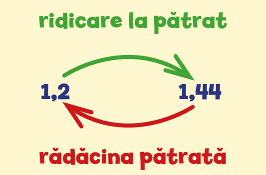
sau altfel: $l^2 = 1{,}69$, deci $l = \sqrt{1{,}69} = \sqrt{1{,}3^2} = 1{,}3 \Rightarrow l = 1{,}3$ cm.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Definiție

Se numește **rădăcina pătrată a unui număr rațional pozitiv** *x*, numărul rațional pozitiv *a*, cu proprietatea $x = a^2$.

Vom scrie $\sqrt{x} = a$.



A. Să determinăm, în două moduri, rădăcinile pătrate: $a=\sqrt{1{,}44}$ și $b=\sqrt{0{,}0025}$

1) $a=\sqrt{1{,}44}=\sqrt{\frac{144}{100}}=\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{100}}=\frac{12}{10}=1{,}2$

$b=\sqrt{0{,}0025}=\sqrt{\frac{25}{10000}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{10000}}=\frac{5}{100}=0{,}05$

2) $a=\sqrt{1{,}44}=\sqrt{(1{,}2)^2}=1{,}2$

$b=\sqrt{0{,}0025}=\sqrt{(0{,}05)^2}=0{,}05$

Observație: Este important să alegem varianta avantajoasă.

B. Să observăm că putem determina rădăcina pătrată în mod asemănător și dacă numărul dat se exprimă sub formă de fracție periodică.

$$\sqrt{1{,}(7)}=\sqrt{\frac{17-1}{9}}=\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}}=\frac{4}{3} \text{ și } \sqrt{3{,}36(1)}=\sqrt{\frac{3361-336}{900}}=\sqrt{\frac{3025}{900}}=\sqrt{\frac{121}{36}}=\frac{11}{6}$$

Ne amintim

Modulul unui număr $x \in \mathbb{Q}$ este:

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{pentru } x \geq 0 \\ -x, & \text{pentru } x < 0 \end{cases}$$

Exemple

$x = 3{,}5 > 0 \Rightarrow |x| = x = 3{,}5$

$x = -4 < 0 \Rightarrow |x| = -x = -(-4) = 4$

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Știm că $\sqrt{n^2} = n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Ne propunem să înțelegem ce reprezintă $\sqrt{x^2}$ pentru $x \in \mathbb{Q}$.
Vom analiza câteva exemple:

Pentru $x = 1{,}5$ avem $\sqrt{x^2} = \sqrt{1{,}5^2} = \sqrt{2{,}25} = 1{,}5 = x$.

Pentru $x = -1{,}5$ avem $-x = -(-1{,}5) = 1{,}5$, iar

$\sqrt{x^2} = \sqrt{(-1{,}5)^2} = \sqrt{2{,}25} = 1{,}5 = -x$

Deducem că:

$\sqrt{x^2} = x$, pentru orice $x \geq 0$;

$\sqrt{x^2} = -x$, pentru orice $x < 0$;

care pot fi scrise sub forma generală astfel:

$\sqrt{x^2} = |x|$, pentru orice $x \in \mathbb{Q}$.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

a) Vom calcula $\sqrt{x^2}$ pentru $x = 8{,}9 - 5 : 4$.
Efectuăm întâi calculele: $x = 8{,}9 - 1{,}25 = 7{,}65$.
Deoarece $x > 0$, vom aplica formula $\sqrt{x^2} = x$
și obținem $\sqrt{x^2} = \sqrt{(7{,}65)^2} = 7{,}65$.

b) Vom calcula $\sqrt{x^2}$ pentru $x = 2{,}7 - 9 : 2$
Efectuăm întâi calculele: $x = 2{,}7 - 4{,}5 = -1{,}8$
Deoarece $x < 0$, vom aplica formula $\sqrt{x^2} = -x$
și obținem $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-1{,}8)^2} = 1{,}8$.

Dacă despre numărul rațional *x* nu putem decide dacă este pozitiv sau negativ, vom folosi formula generală $\sqrt{x^2} = |x|$, oricare ar fi *x*, număr rațional.

c) Pentru $x = 2 - 1{,}2 : 0{,}4$ avem $\sqrt{x^2} = |x|$ și $|x| = |2 - 1{,}2 : 4|$. Doar ulterior, vom face operațiile necesare pentru obținerea răspunsului final, astfel:

$$\sqrt{x^2} = |x| = |2 - 1{,}2 : 0{,}4| = |2 - 3| = |-1| = 1$$

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

a) $\sqrt{1{,}44} \cdot \sqrt{9} = 1{,}2 \cdot 3 = 3{,}6$ și $\sqrt{1{,}44 \cdot 9} = \sqrt{12{,}96} = 3{,}6$

b) $\dfrac{\sqrt{1{,}44}}{\sqrt{9}} = \dfrac{1{,}2}{3} = 0{,}4$ și $\sqrt{\dfrac{1{,}44}{9}} = \sqrt{0{,}16} = 0{,}4$

Au loc relațiile:

a) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y}$, oricare ar fi x, y pătrate ale unor numere raționale.

b) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$, oricare ar fi x și y, pătrate ale unor numere raționale, $y \neq 0$.

Reținem!

Dacă x este pătratul unui număr rațional, atunci numărul rațional pozitiv a cu proprietatea $x = a^2$ se numește rădăcina pătrată a numărului x sau radicalul numărului x. Vom scrie $\sqrt{x} = a$.
Oricare ar fi numerele x și y, pătrate ale unor numere raționale, avem:

$\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y}$ și $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$, $y \neq 0$. $\sqrt{a^2} = |a|$, oricare ar fi $a \in \mathbb{Q}$

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor și completați spațiile libere astfel încât să obțineți afirmații adevărate:

$p_1 : \sqrt{100} = 10$ $p_2 : \sqrt{400} = -20$

$p_3 : \sqrt{\dfrac{1}{36}} = \dfrac{1}{6}$ $p_4 : \sqrt{1{,}96} = 1{,}4$

$p_5 : \sqrt{\dfrac{25}{4}} = \dfrac{7}{2}$ $p_6 : \sqrt{20{,}25} = \dfrac{9}{2}$

$p_7 : \sqrt{0{,}09} = -0{,}3$ $p_8 : \sqrt{0{,}0676} = \dfrac{13}{50}$

a) Dintre propozițiile enumerate, sunt adevărate următoarele: … .

b) Dintre propozițiile enumerate, sunt false următoarele: … .

2 Se consideră mulțimea $M = \left\{1{,}44; \dfrac{36}{25}; \dfrac{4}{16}; 3\dfrac{1}{16}; 1{,}(7)\right\}$. Determinați elementele mulțimii $P = \left\{x \mid x = \sqrt{y},\ y \in M\right\}$.

3 Copiați tabelele pe caiete, apoi completați căsuțele libere, din fiecare tabel, știind că a desemnează un număr rațional pozitiv.

a)

a	$\dfrac{2}{3}$	1	0	0,25	1,(3)	$\dfrac{5}{4}$	$2\dfrac{1}{3}$
a^2							

b)

a^2	$\dfrac{1}{9}$	2,25	$\dfrac{100}{49}$	0	$2\dfrac{1}{4}$	$\left(\dfrac{5}{4}\right)^4$	$(0{,}4)^6$
a							
$\sqrt{a^2}$							

4 Calculați suma numerelor m și n, știind că:

a) $m = 1 + \sqrt{0{,}09}$ și $n = 2 - \sqrt{\dfrac{49}{25}}$;

b) $m = \dfrac{2}{5} + \sqrt{\dfrac{25}{4}}$ și $n = 0{,}6 - \sqrt{6{,}25}$.

5 Calculați:

a) $\sqrt{\frac{1}{9}}$; $\sqrt{\frac{81}{25}}$; $\sqrt{\frac{169}{4}}$; $\sqrt{\frac{625}{289}}$; $\sqrt{\frac{3}{300}}$

b) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; $\sqrt{2\frac{1}{4}}$; $\sqrt{3\frac{13}{36}}$; $\sqrt{4\frac{29}{49}}$; $\sqrt{5\frac{29}{100}}$

c) $\sqrt{0,81}$; $\sqrt{0,16}$; $\sqrt{1,96}$; $\sqrt{4,41}$; $\sqrt{20,25}$

d) $\sqrt{\frac{2^4}{3^6}}$; $\sqrt{\frac{3^4\cdot 5^6}{7^2}}$; $\sqrt{\frac{12}{3^3\cdot 4^3}}$; $\sqrt{\frac{3^2+4^2}{7^2+24^2}}$

6 Copiați tabelele pe caiete, apoi completați căsuțele libere ale fiecăruia, știind că x desemnează un număr întreg.

a)

x	-2	-17	12	-2	17	-12
x^2						

b)

x^2	16	1	49	0	121	36
x						
$\sqrt{x^2}$						

7 Determinați valorile numărului întreg n, pentru fiecare din situațiile:

a) $n^2 = 81$;

b) $n^2 = 169$ și $n > 0$;

c) $n^2 = 900$ și $n < 0$.

8 Se consideră mulțimea $A=\{-3,-2,-1,0,1,2\}$. Determinați elementele mulțimilor:

$$B=\left\{n \mid n=x^2, x\in A\right\}$$

$$C=\left\{m \mid m=\sqrt{n}, n\in B\right\}$$

9 Copiați tabelele pe caiete, apoi completați căsuțele libere ale fiecăruia, știind că x desemnează un număr rațional. Comparați rezultatele obținute la subpunctul b) cu cele obținute la exercițiul 3.

a)

a	1	-1	0	$-0,5$	$0,5$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4}$
a^2							

b)

a^2	$\frac{1}{9}$	$2,25$	$\frac{100}{49}$	0	$2\frac{1}{4}$	$\left(\frac{5}{4}\right)^4$	$(0,4)^6$
a							
$\sqrt{a^2}$							

L3 Estimarea rădăcinii pătrate a unui număr rațional pozitiv

Ne amintim

Teorema lui Pitagora: În orice triunghi dreptunghic, pătratul lungimii ipotenuzei este egal cu suma pătratelor lungimilor catetelor.

Pentru $a, b \in \mathbb{Q}_+$ avem $a<b \Leftrightarrow a^2<b^2$.

- **Estimarea** este o evaluare a unei cantități, având *date incomplete sau insuficiente*.

Spre deosebire de aproximare, la care cunoaștem mărimea maximă a erorii, în cazul estimării nu știm cât de aproape suntem de valoarea exactă.

- Dacă pentru efectuarea unui calcul folosim aproximări ale numerelor care intervin, atunci vom obține *o estimare* a rezultatului corect.

În triunghiul ABC, cu $m(\widehat{A})=90^\circ$, are loc relația: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Exemple

a) Numărul de copaci din pădurea Băneasa este estimat la câteva sute de mii.

b) Estimăm că numărul de locuitori din capitala țării este de peste două milioane.

c) Estimăm că mai avem de parcurs 5 km până la destinație.

d) Folosind aproximări, prin lipsă, la zeci, în calculul $16,2 + 32 + 125,7$, obținem 160.
Rezultatul corect este 173,9.

Rezolvăm și observăm

Problemă:
Sonia și Natalie au fost la cumpărături, împreună cu sora lor, Cezara.
Ele au cumpărat trei truse de geometrie cu prețul de 32,9 lei trusa, cinci cutii de markere cu prețul de 19,29 lei cutia și 10 caiete cu spirală, cu prețul de 10,5 lei bucata.

Sonia spune: Ne trebuie *mai puțin* de 309 lei;
Natalie spune: Ne trebuie *mai mult* de 291 de lei.
Cezara spune: Eu cred că ne trebuie *cam* 304 lei.
Casiera scanează prețurile produselor, listează bonul de casă și spune: Aveți *de plătit suma* de 300,15 lei.
Cum se explică faptul că sumele nu coincid? A greșit cineva?

Pentru a înțelege logica răspunsului dat de cele trei surori, vom parcurge următoarele etape:
Calculăm *suma de plată* astfel: $S = 3 \cdot 32,9 + 5 \cdot 19,29 + 10 \cdot 10,5 = 300,15$ (lei)

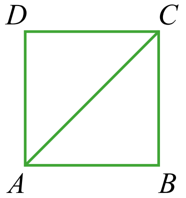
Estimăm suma, aproximând prețurile prin adaos, la unități:
$32,9 \approx 33;\ 19,29 \approx 20;\ 10,5 \approx 11.$
$S \approx 3 \cdot 33 + 5 \cdot 20 + 10 \cdot 11 = 309$

Estimăm suma, aproximând prețurile prin lipsă, la unități:
$32,9 \approx 32;\ 19,29 \approx 19;\ 10,5 \approx 10.$
$S \approx 3 \cdot 32 + 5 \cdot 19 + 10 \cdot 10 = 291$

Estimăm suma, rotunjind prețurile la unități:
$32,9 \approx 33;\ 19,29 \approx 19;\ 10,5 \approx 11.$
$S \approx 3 \cdot 33 + 5 \cdot 19 + 10 \cdot 11 = 304$

Observație: Fiecare dintre cele trei surori a estimat corect suma care urma să fie plătită, dar în mod diferit.
Estimarea cea mai apropiată de rezultatul corect este cea obținută prin *rotunjirea termenilor*. Uneori însă, este util să folosim aproximări prin lipsă sau prin adaos pentru toți termenii.
Estimările sunt foarte utile în activitățile cotidiene. Acestea ne ajută să luăm *decizii practice avantajoase.*

Aplicație practică



1) Desenați pe caiete, folosind rigla gradată, pătratul *ABCD*, cu latura de lungime 1 dm.
2) Reprezentați diagonala *AC* a acestuia.
3) Scrieți relația dată de teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic *ABC*.
4) Măsurați cu atenție, folosind rigla gradată, lungimea segmentului *AC*. Notați valoarea găsită, în decimetri și comparați-o cu cea a colegilor din imediata vecinătate.

- *AC* este ipotenuza triunghiului *ABC*, $AB = BC = 1$ dm, deci: $AC^2 = AB^2 + BC^2$, adică $AC^2 = 1 + 1 = 2$.
- Măsurând cu atenție, se obțin, pentru lungimea segmentului *AC*, valori apropiate de 1,4 dm.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Egalitatea $AC^2 = 2$ ne arată că există un număr (nu-l cunoaștem încă), al cărui pătrat este 2. Cum *AC* este lungimea unui segment, rezultă $AC > 0$. Vom spune că $AC = \sqrt{2}$.
Din măsurători, rezultă că valoarea numărului $\sqrt{2}$ poate fi estimată, destul de greu, la 1,4.
Ne întrebăm: câte zecimale mai are? Pot fi determinate toate?
Răspunsul este oferit, parțial, de următoarea secvență:

Dacă $\sqrt{2} = q$, atunci $q^2 = 2$.
Prin încercări, vom urmări *să găsim* numărul *q*.

$$
\begin{aligned}
1^2 &= 1 & < 2 < 4 &= 2^2\\
1,4^2 &= 1,96 & < 2 < 2,25 &= 1,5^2\\
1,41^2 &= 1,9881 & < 2 < 2,0164 &= 1,42^2\\
1,414^2 &= 1,999396 & < 2 < 2,002225 &= 1,415^2
\end{aligned}
$$

Constatăm că, prin încercările făcute, nu am găsit date suficiente pentru a afla un număr rațional *q* cu proprietatea $q^2 = 2$, dar am găsit valori suficient de apropiate. Vom spune că **putem aproxima** valoarea numărului $\sqrt{2}$.
În fizică, se folosesc, de obicei, aproximările prin lipsă, la sutimi, ale radicalului unui număr rațional.
De exemplu: $\sqrt{2} \approx 1,4;\ \sqrt{3} \approx 1,73;\ \sqrt{5} \approx 2,23.$

Pentru orice număr rațional $x \geq 0$, ***există rădăcina pătrată*** $\sqrt{x}$.

$\sqrt{x} = n \Leftrightarrow x = n^2$, unde $n \geq 0$

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Deseori, avem nevoie să exprimăm rădăcina pătrată aproximând-o printr-un ***număr natural*** sau printr-un ***număr rațional pozitiv***.

Pentru a aproxima rădăcina pătrată a unui număr rațional pozitiv x, printr-un număr natural, ***încadrăm numărul x între două pătrate perfecte consecutive:*** $n^2 \leq x < (n+1)^2$, $n \in \mathbb{N}$.

Este posibil ca x să fie pătrat perfect și atunci $x = n^2$, iar $\sqrt{x} = n$.

Dacă $n^2 \leq x < (n+1)^2$, $n \in \mathbb{N}$, atunci $n \leq \sqrt{x} < n+1$.
Pentru $0 \leq x \leq 100$, se compară x cu pătratele perfecte cunoscute.

Exemplu
Pentru $x = 73$ avem $64 < x < 81 \Leftrightarrow 8^2 < x < 9^2$ $\Leftrightarrow 8 < \sqrt{x} < 9 \Rightarrow \sqrt{x} \approx 8$ sau $\sqrt{x} \approx 9$.

Dacă $10^2 < x < 100^2$, adică $100 < x < 10\,000$, atunci $\sqrt{x} \approx \overline{ab}$. Cifra a, a zecilor, se găsește aplicând procedeul de mai sus numărului obținut prin eliminarea din x a ultimelor două cifre (a zecilor și a unităților).
Apoi, cifra unităților se găsește prin încercări. Sugerăm să se înceapă cu $b = 5$.

Exemplu
Pentru $x = 5413$, vom aproxima $\sqrt{x}$ printr-un număr natural.
Deoarece $10^2 < x < 100^2 \Rightarrow 10 < \sqrt{x} < 100 \Rightarrow \sqrt{x} \approx \overline{ab}$.
Eliminăm ultimele două cifre ale lui x și obținem 54, pe care îl încadrăm între două pătrate perfecte consecutive:
$49 < 54 < 64 \Rightarrow 7^2 < 54 < 8^2$, deci $a = 7$.
Am obținut deci $70 < \sqrt{x} < 80$. Deoarece 54 este mai apropiat de 49 decât de 64, vom estima $\sqrt{x} \approx 70$. În anumite aplicații practice, această aproximare este suficientă, adică $\sqrt{5413} \approx 70$. Vom urmări în continuare să găsim și cifra unităților. Pentru $b = 5$ avem $\overline{ab}^2 = 75^2 = 5625 > x$. Pentru $b = 4$ avem $\overline{ab}^2 = 74^2 = 5476 > x$.
Pentru $b = 3$ avem $\overline{ab}^2 = 73^2 = 5329 < x$. Deci $73^2 < x < 74^2 \Rightarrow 73 < \sqrt{x} < 73$ și $\sqrt{x} \approx 73$ sau $\sqrt{x} \approx 74$.

Dacă x este format din 5 sau 6 cifre (adică $10^4 < x < 10^6$), atunci $\sqrt{x} \approx \overline{abc}$.
Cifra sutelor, a, se găsește aplicând procedeul de mai sus numărului obținut prin eliminarea din x a ultimelor patru cifre (a unităților, a zecilor, a sutelor și a miilor). Dacă este necesar, celelalte cifre se găsesc prin încercări.

Exemplu
Pentru $x = 317\,492$ vom aproxima $\sqrt{x}$ printr-un număr de ordinul sutelor. Eliminând ultimele patru cifre obținem 31, pe care îl încadrăm între două pătrate perfecte consecutive $25 < 31 < 36 \Rightarrow 5^2 < 31 < 6^2$.
Deci, cifra sutelor este $a = 5$ și $500 < \sqrt{x} < 600$.
Deoarece 31 este mai aproape de 36 decât de 25, vom scrie $\sqrt{x} \approx 600$.

Totuși, pentru ***numere foarte mari*** se recomandă **folosirea calculatorului** sau **folosirea algoritmului de extragere** a rădăcinii pătrate. Algoritmului de extragere a rădăcinii pătrate a fost foarte util de-a lungul timpului, înainte ca tehnica să ofere facilități de calcul.

Pentru $x \in \mathbb{Q}_+$, scris sub formă zecimală finită, vom scrie $x = \dfrac{y}{10^{2n}}$ cu $y, n \in \mathbb{N}$, iar $\sqrt{x} = \dfrac{\sqrt{y}}{10^n}$.
Aproximarea numărului $\sqrt{y}$ urmează pașii descriși în algoritmul precedent.

Exemplu
Ne propunem să estimăm $\sqrt{x}$ pentru $x = 93{,}4$.
Deoarece $81 < 93{,}4 < 100 \Rightarrow 9 < \sqrt{93{,}4} < 10 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{93{,}4} \approx 9$ sau $\sqrt{93{,}4} \approx 10$.
Dacă dorim obținerea aproximării la zecimi, vom scrie $\sqrt{x} = \sqrt{\dfrac{9340}{100}} = \dfrac{\sqrt{9340}}{10}$ și $\sqrt{9340} \approx \overline{ab}$.

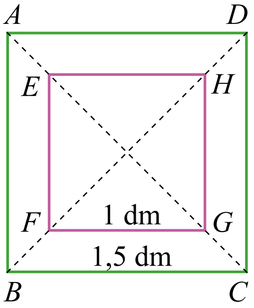
Eliminăm ultimele două cifre ale lui 9340 și obținem 93, pe care îl încadrăm între două pătrate perfecte consecutive: $81 < 93 < 100 \Rightarrow 9^2 < 93 < 10^2$, deci $a = 9$.

Pentru $b = 5$, avem $\overline{ab}^2 = 95^2 = 9025 < 9340$.
Pentru $b = 6$, avem $\overline{ab}^2 = 96^2 = 9216 < 9340$.
Pentru $b = 7$, avem $\overline{ab}^2 = 97^2 = 9409 > 9340$.

Deci $96^2 < 9340 < 97^2 \Rightarrow 96 < \sqrt{9340} < 97 \Rightarrow$
$\sqrt{9340} \approx 96$ sau $\sqrt{9340} \approx 97$, iar
$\sqrt{93{,}4} \approx 9{,}6$ sau $\sqrt{93{,}4} \approx 9{,}7$.

Temă de portofoliu

1. Decupați, din hârtie, un pătrat cu latura 1,5 dm. Notați-l *ABCD*.
2. Decupați încă un pătrat cu latura de 1 dm. Notați-l *EFGH*.
3. Suprapuneți centrele celor două pătrate și treceți prin ele un ac, pentru a le fixa.
4. Puneți pătratul mare într-o poziție fixă, pe bancă/masă (ca în figura alăturată), apoi rotiți pătratul *EFGH* în jurul acului.
5. Urmăriți, cu atenție, vârfurile pătratului mic și observați dacă acestea intersectează laturile pătratului mare.
6. Justificați, folosind estimarea unui radical, rezultatul observat.

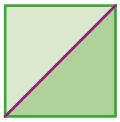


Reținem!

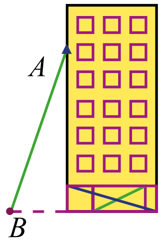
- **Estimarea** este o evaluare a unei cantități, având date incomplete sau insuficiente.
- Dacă pentru efectuarea unui calcul folosim **aproximări** ale numerelor care intervin, atunci vom obține **o estimare** a rezultatului corect.
- Pentru orice număr rațional $x > 0$, există rădăcina pătrată $\sqrt{x}$.
- Pentru $a \geq 0$ avem: $\sqrt{x} = a$ dacă și numai dacă $x = a^2$.
- Dacă $n^2 \leq x < (n+1)^2$, $n \in \mathbb{N}$, atunci $n \leq \sqrt{x} < n+1$. Dacă $x = \dfrac{y}{10^{2n}}$ cu y, $n \in \mathbb{N}$, atunci $\sqrt{x} = \dfrac{\sqrt{y}}{10^n}$.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 O porțiune din drumul parcurs spre școală de Sergiu trece printr-un parc în formă de pătrat, cu latura de 120 m. Aleea pe care se deplasează Sergiu se suprapune cu diagonala pătratului. Estimați, printr-un număr natural distanța, în metri, pe care o parcurge Sergiu prin parc.



2 O echipă de intervenție dorește să ajungă pe terasa unei clădiri, în punctul *A*, situat la distanța 15,8 m față de sol. Persoanele care intervin montează o scară din punctul *B*, situat la distanța 4,2 m de clădire. Echipa are scări rabatabile de 10 m, 18 m, 25 m. Care dintre acestea este potrivită pentru intervenție?



3 Se consideră mulțimea

$$A = \left\{\sqrt{199},\ -\sqrt{300},\ -\sqrt{144}\right\}.$$

Pentru fiecare element *x*, al mulțimii *A*, determinați cel mai mare număr întreg, mai mic sau egal cu *x*.

4 Se consideră mulțimea

$$B = \left\{\sqrt{57},\ -\sqrt{\frac{36036}{12}},\ -\sqrt{789{,}1}\right\}.$$

Pentru fiecare element *x*, al mulțimii *B*, determinați cel mai mic număr întreg, mai mare sau egal cu *x*.

5 Completați în căsuțe, pe caiet, câte două numere întregi consecutive, astfel încât să obțineți relații adevărate:

a) $\square < \sqrt{12} < \square$ c) $\square < \sqrt{1234} < \square$

b) $\square < -\sqrt{123} < \square$ d) $\square < -\sqrt{600} < \square$

6 Determinați mulțimile:

$A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid 3 < \sqrt{x} < 4\right\}$;

$B = \left\{x \in \mathbb{N} \mid -6 < \sqrt{x} < -5\right\}$;

$C = \left\{x \in \mathbb{N} \mid 10{,}5 < x^2 < 50{,}1\right\}$;

$D = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid 23 < x^2 < 32\right\}$.

7 Determinați prima zecimală a numărului $\sqrt{n^2 + n}$, pentru fiecare dintre valorile $n \in \{1,\ 2,\ 3\}$.

Evaluare sumativă

Se acordă 10 puncte din oficiu.

I. *La cerințele următoare, alegeți litera care indică răspunsul corect; doar un răspuns este corect.*

1. Numărul $8+\sqrt{8+\sqrt{8^2}}$ este egal cu:
5p A. 8 B. 10 C. 12 D. 16

2. Rezultatul calculului $\sqrt{900}-\sqrt{3^6}+\sqrt{(-2)^4}$ este:
5p A. 1 B. 3 C. 5 D. 7

3. Rădăcina pătrată a numărului $2^4 \cdot 49$ este:
5p A. 14 B. 21 C. 28 D. 42

4. Numărul pentru care $\sqrt{a+7}=17$ este:
5p A. 10 B. 27 C. 100 D. 282

5. Fie $x=\sqrt{0,(4)}$, atunci:
5p A. $x\in\mathbb{N}$ B. $x\in\mathbb{Z}$ C. $x\in\mathbb{Q}$ D. $x\notin\mathbb{Q}$

6. Mulțimea $A=\left\{\sqrt{\frac{225}{49}}, \sqrt{2\frac{7}{9}}, \sqrt{\frac{300}{3}}, \frac{\sqrt{1,96}}{\sqrt{0,04}}, \sqrt{\frac{3^2\cdot 10^2}{5^2}}\right\}$, conține:
5p A. un număr natural B. două numere naturale C. trei numere naturale D. patru numere naturale

7. Dacă $\overline{abcde}$ este un pătrat perfect, atunci $\sqrt{\overline{abcde}}$ are:
5p A. 2 cifre B. 3 cifre C. 4 cifre D. 5 cifre

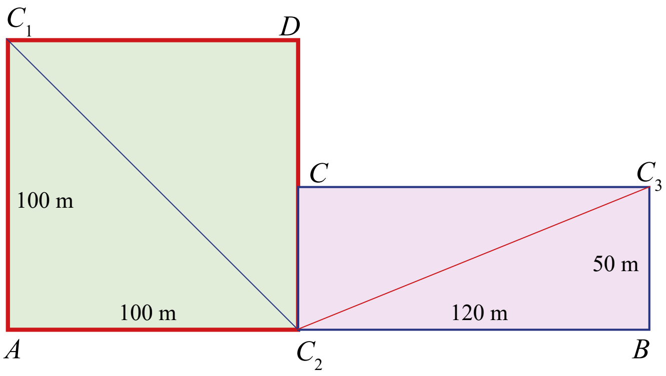
8. Dintre următoarele relații: $(a)\sqrt{10}\le 3, (b)\sqrt{10}\ge 4, (c)\sqrt{10}<3, (d)\sqrt{10}>3$ este adevărată:
5p A. (a) B. (b) C. (c) D. (d)

II. *La problemele următoare se cer rezolvări complete.*

1. Calculați:
5p a) $2\sqrt{81}-3\sqrt{64}+4\sqrt{49}-5\sqrt{36}$.
5p b) $\left(\sqrt{36}-\sqrt{64}\right)\cdot\left(\sqrt{100}-\sqrt{144}\right)$.
5p c) $\frac{\sqrt{1225}}{\sqrt{441}}\cdot\left(\sqrt{225}\right)^{-1}$.

2. Se consideră numerele $a=\sqrt{25^2-20^2}-\sqrt{5^2+12^2}$ și $b=\sqrt{100}\cdot\left(\sqrt{\frac{49}{25}}-\sqrt{0,01}-\sqrt{1\frac{9}{16}}\right)$.
10p a) Efectuați calculele și aflați numerele *a* și *b*.
10p b) Arătați că $\sqrt{a\cdot b}$ este număr natural.

3. Doi prieteni cumpără cadouri din centrele comerciale C_1, C_2, C_3. În figura alăturată, sunt redate, prin segmente, străzile pe care se pot deplasa.
5p a) Estimați lungimea traseului $C_1-C_2-C_3$, în metri, printr-un număr natural.
10p b) Verificați dacă traseul $C_1-C_2-C_3$ este sau nu cel mai scurt pentru a ajunge de la centrul C_1 la centru C_3.



1.2 Numere iraționale, exemple. Mulțimea numerelor reale, incluziunile $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

L1 Numere iraționale, exemple

Ne amintim

Mulțimea numerelor raționale este
$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$

Numere raționale: $\frac{2}{11}, \frac{-3}{8}, \frac{-4}{1}, \frac{10}{5}$.

Dacă x, y sunt numere raționale, atunci

$$x + y, x - y, x \cdot y, \frac{x}{y} \left(y \neq 0 \right) \in \mathbb{Q}.$$

Fie $x = 3{,}5$ și $y = 0{,}4$ numere raționale.
Atunci, suma lor $x + y = 3{,}9$, diferența lor $x - y = 3{,}1$, produsul lor $x \cdot y = 1{,}4$ și raportul lor $\frac{x}{y} = 8{,}75$ sunt tot numere raționale.

Orice număr rațional pozitiv poate fi scris în mod unic sub forma unei fracții ireductibile $\frac{a}{b}$, cu a, $b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

Fracțiile ordinare $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{10}{15}, \frac{20}{30}, \frac{200}{300}$ reprezintă același număr rațional, pentru că $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{10}{15} = \frac{20}{30} = \frac{200}{300}$, forma ireductibilă a acestui număr fiind $\frac{2}{3}$.

Orice număr rațional se poate scrie în mod unic în una dintre formele:

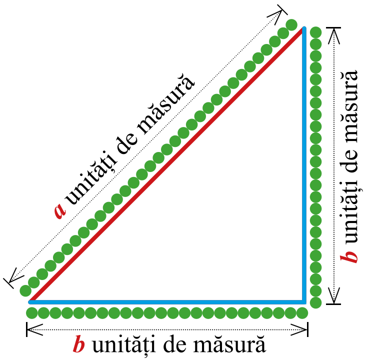
- fracție zecimală ***finită***: $\frac{17}{5} = 3{,}4$;
- fracție zecimală infinită, ***periodică simplă***, cu perioada diferită de (9): $\frac{14}{11} = 1{,}(27)$;
- fracție zecimală infinită, ***periodică mixtă***: $\frac{19}{12} = 1{,}58(3)$.

Orice fracție zecimală finită sau periodică este un număr rațional.

$3{,}5 = \frac{35}{10} = \frac{7}{2}$; $2{,}73 = \frac{273}{100}$ $\quad 1{,}(27) = \frac{127 - 1}{99} = \frac{126^{(9}}{99} = \frac{14}{11}$ $\quad 1{,}58(3) = \frac{1583 - 158}{900} = \frac{1425^{(75}}{900} = \frac{19}{12}$

Puțină istorie

Pitagora a fost filosof și matematician grec și a trăit aproximativ între anii 580–495 î.Hr.
Lui Pitagora și discipolilor săi le datorăm rezultate importante în geometrie și algebră. Ne amintim de celebra teoremă a lui Pitagora, învățată în clasa a VI-a.
Pentru Pitagora, esența a tot ceea ce există este **numărul**, crezând că orice lungime poate fi exprimată cu numere naturale. De exemplu, credea că pentru un triunghi dreptunghic isoscel există o unitate de măsură suficient de mică, astfel încât ipotenuza să aibă lungimea de a unități, iar fiecare catetă lungimea de b unități, unde a și b sunt numere naturale nenule.
Din teorema lui Pitagora rezultă relația: $a = b\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{b}$



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Să urmărim o parte din eforturile matematicienilor acelor timpuri de a afla aceste numere a și b.

Fracția $\frac{a}{b}$ poate fi considerată ireductibilă. Dacă totuși $\frac{a}{b}$ este reductibilă, ea poate fi simplificată până când ajungem la o fracție ireductibilă, echivalentă cu aceasta (ambele sunt reprezentanți ai aceluiași număr rațional).

Deducem $a = b\sqrt{2} \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2 \vdots 2 \Rightarrow a \vdots 2 \Rightarrow a = 2 \cdot k$, unde $k \in \mathbb{N}^*$.

Din $a = b\sqrt{2} \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow (2k)^2 = 2b^2 \Rightarrow 4k^2 = 2b^2 \Rightarrow 2k^2 = b^2 \Rightarrow b^2 \vdots 2 \Rightarrow b \vdots 2$.

Prin urmare, $a \vdots 2$ și $b \vdots 2$, deci fracția $\frac{a}{b}$ se poate simplifica cu 2, ceea ce contrazice faptul că $\frac{a}{b}$ este ireductibilă. În concluzie, **nu există numerele naturale** a și b astfel încât $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

Concluzie: $\sqrt{2}$ nu este număr rațional.

Vom scrie că $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

În lecțiile anterioare, am constatat că lungimea diagonalei unui pătrat cu latura de o unitate este $\sqrt{2}$. Am încercat să calculăm $\sqrt{2}$, dar n-am reușit să găsim o valoare exactă, un număr rațional $q \in \mathbb{Q}_+$ cu proprietatea $q^2 = 2$. Încercările noastre nereușite nu au fost suficiente pentru a ne convinge de faptul că $\sqrt{2}$ nu este rațional. Era necesară demonstrația de mai sus.

Totuși, deși $\sqrt{2}$ este număr, deoarece reprezintă lungimea unui segment, acesta nu este niciunul dintre numerele pe care le cunoșteam, adică nu este număr rațional. Deducem că mai există și alte numere pe lângă cele raționale. Le vom numi **numere iraționale**.

$\sqrt{2}$ este număr irațional.

Din faptul că $\sqrt{2}$ este irațional, deducem că acesta nu poate fi scris sub formă de fracție zecimală finită sau periodică. Calculăm mai multe zecimale ale acestui număr, folosind calculatorul, și găsim: $\sqrt{2} = 1,41421356237309504880168 8...$ În practică, vom folosi o aproximare a numărului, de regulă, cu două zecimale exacte $\sqrt{2} \approx 1,41$.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

În mod analog, înlocuind numărul 2 cu orice alt ***număr prim*** p, se demonstrează că $\sqrt{p}$ este irațional.	Numerele 3, 5, 7 sunt prime, deci $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ sunt numere iraționale.
În general, dacă $n \in \mathbb{N}$ ***nu este pătrat perfect***, atunci $\sqrt{n}$ este irațional.	6, 8, 12 nu sunt pătrate perfecte, deci $\sqrt{6}, \sqrt{8}, \sqrt{12}$ sunt numere iraționale.
Dacă numărul $x \in \mathbb{Q}$ ***nu se poate scrie ca raport de pătrate perfecte***, atunci $\sqrt{x}$ este irațional.	$\frac{12}{7}, \frac{3}{8}, \frac{4}{5}$ nu se pot scrie ca raport a două pătrate perfecte, prin urmare $\sqrt{\frac{12}{7}}, \sqrt{\frac{3}{8}}, \sqrt{\frac{4}{5}}$ sunt numere iraționale.
Opusul unui număr irațional este un număr irațional.	$-\sqrt{2}, -\sqrt{8}, -\sqrt{15}$ sunt numere iraționale.
Suma dintre un număr rațional și un număr irațional este un număr irațional.	$3+\sqrt{2}$; $7-\sqrt{5}$; $-9+\sqrt{3}$; $1,2+\sqrt{8}$ sunt numere iraționale.
Produsul dintre un număr rațional nenul și un număr irațional este un număr irațional.	$3\sqrt{2}$; $-7\sqrt{5}$; $(1,2)\sqrt{8}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$ sunt numere iraționale.
Numărul π este număr irațional.	Numărul π este raportul dintre lungimea unui cerc oarecare și lungimea diametrului său. Se aproximează la sutimi prin $\pi \approx 3,14$.

Temă de portofoliu:
Vă propunem să vă antrenați, demonstrând că numerele $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{12}, \sqrt{0,7}$ sunt numere iraționale.

Vom vedea, de asemenea, că există și numere iraționale care nu se pot exprima cu ajutorul radicalilor. Acestea se vor reprezenta ca fracții zecimale infinite neperiodice.

Numărul $\alpha = 0,505005000500005\ldots$ (după prima cifră 5 este un 0, după a doua cifră 5 sunt două zerouri, după a n-a cifră 5 sunt n zerouri) este număr irațional.

Reținem!

- Se numește număr irațional orice număr care nu este rațional.
- Pentru $x \in \mathbb{Q}$ avem: $\sqrt{x}$ este număr irațional dacă și numai dacă x nu este pătrat perfect sau nu poate fi scris ca raport de pătrate perfecte.
- Un număr este irațional dacă și numai dacă se scrie sub formă de fracție zecimală infinită și neperiodică.
- Dacă $q \in \mathbb{Q}^*$ și $\sqrt{x} \notin \mathbb{Q}$, , atunci $-\sqrt{x}$, $q + \sqrt{x}$, $q\sqrt{x}$ sunt numere iraționale.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Se consideră mulțimea
$$A = \left\{\sqrt{3}; \sqrt{4}; 2\sqrt{7}; 9 + \sqrt{12}; 4 - \pi; \frac{\sqrt{5}}{2}; \sqrt{\frac{8}{18}}\right\}$$
a) Enumerați elementele mulțimii A care sunt numere raționale.
b) Enumerați elementele mulțimii A, care sunt numere iraționale. Justificați răspunsul dat.

2 Se consideră numerele: 0,246810… (se alătură, în ordine crescătoare, numerele naturale pare) și 1,010010001… (numărul zerourilor dintre două cifre alăturate, egale cu 1 crește la fiecare secvență, deplasându-ne spre dreapta)
a) Justificați faptul că numerele de mai sus sunt iraționale.
b) Scrieți alte două numere iraționale, exprimate ca fracții zecimale infinite, explicând regula folosită.

3 Scrieți mulțimea numerelor iraționale de forma $\sqrt{a}$, $a \in A$, știind că
$A = \{15^2, 2^5, 3^6, 4^7, 7^3, 2^4, (-3)^2, 8^{11}, (-5)^2\}$.
Justificați, verbal, alegerea fiecărui element.

4 Demonstrați că numerele $\sqrt{8}, \sqrt{76}, \sqrt{193}, \sqrt{555}, \sqrt{1000}$ sunt iraționale, folosind intercalarea numerelor scrise sub radicali, între două pătrate perfecte consecutive. (Dacă $x, y \in \mathbb{N}$ și $n^2 < x < (n + 1)^2$, atunci $\sqrt{x}$ este irațional).

5 a) Scrieți trei valori ale numărului natural x pentru care $\sqrt{x+8}$ este număr rațional.
b) Scrieți trei valori ale numărului natural y pentru care $\sqrt{5-y}$ este număr irațional.

6 a) Calculați $2,7^2$ și $2,8^2$, apoi stabiliți dacă numărul $\sqrt{7,31}$ este rațional sau este irațional.
b) Calculați $3,24^2$ și $3,25^2$, apoi stabiliți dacă numărul $\sqrt{10,4996}$ este rațional sau este irațional.

7 Se consideră numerele naturale de forma $a = 10n + 3$, $n \in \mathbb{N}$.
a) Scrieți cele mai mici cinci numere de această formă.
b) Demonstrați că $\sqrt{a}$ este număr irațional, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

8 Se consideră numerele naturale de forma $b = 4n + 2$, $n \in \mathbb{N}$.
a) Scrieți cele mai mici cinci numere de această formă.
b) Demonstrați că $\sqrt{b}$ este număr irațional, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

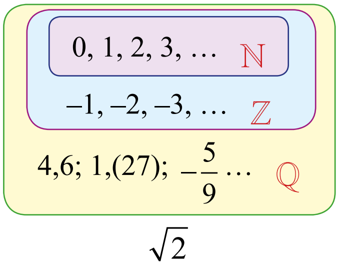
9 a) Determinați numerele raționale de forma $\sqrt{\overline{67ab}}$, unde a și b sunt cifre.
b) Determinați numerele raționale de forma $\sqrt{\overline{7cd6}}$, unde c și d sunt cifre.

L2 Mulțimea numerelor reale. Incluziunile $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Ne amintim

- Există numere iraționale.
- Un număr nu poate fi simultan rațional și irațional.
- Orice număr rațional poate fi scris, în mod unic, sub forma unei fracții zecimale finite sau periodice, cu perioada diferită de (9).
- Orice număr irațional poate fi scris în mod unic sub forma unei fracții zecimale infinite și neperiodice.
- Orice număr natural este și număr întreg și număr rațional.
- Orice număr întreg este și număr rațional.
- Dacă un număr nu este întreg, atunci nu este nici natural.
- Dacă un număr nu este rațional, atunci nu este nici întreg, nici natural.

Știm că $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$



$3 \in \mathbb{N}$ deci $3 \in \mathbb{Z}$ și $3 \in \mathbb{Q}$

$-3 \in \mathbb{Z}$ deci $-3 \in \mathbb{Q}$

Dacă $4{,}6 \notin \mathbb{Z}$, atunci $4{,}6 \notin \mathbb{N}$

Dacă $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$ și $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Definiție: Reuniunea dintre mulțimea numerelor raționale și mulțimea numerelor iraționale se numește mulțimea numerelor reale și se notează cu $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ este număr rațional}\} \cup \{x \mid x \text{ este număr irațional}\}$

Se mai definesc:
- mulţimea numerelor **reale pozitive** $\mathbb{R}_+$
- mulţimea numerelor **reale negative** $\mathbb{R}_-$
- mulţimea numerelor **reale nenule** $\mathbb{R}^*$

Rezultă imediat că:
- orice număr rațional este un număr real;
- orice număr irațional este un număr real.

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- \cup \{0\}$

Dacă $x \in \mathbb{Q}$, atunci $x \in \mathbb{R}$.

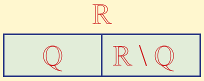
Mulțimea numerelor iraționale este diferența $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

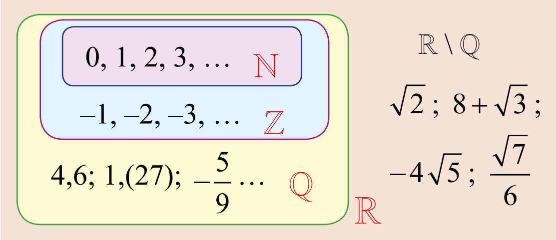
Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Folosind implicațiile: 1) Pentru orice $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$; 2) Pentru orice $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$; 3) Pentru orice $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{R}$, deducem că au loc incluziunile: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$$

Mulțimile $\mathbb{Q}$ și $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sunt *disjuncte*, adică *intersecția lor este mulțimea vidă.*





Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Determinați valoarea de adevăr a fiecăreia din următoarele afirmații (A sau F):

a) $4\in\mathbb{N}$; f) $-\frac{20}{4}\in\mathbb{Z}$;

b) $-10\in\mathbb{Z}$; g) $\sqrt{\frac{4}{9}}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$;

c) $\frac{12}{5}\in\mathbb{Q}$; h) $-3,1(5)\notin\mathbb{Q}$;

d) $\sqrt{5}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; i) $\sqrt{(-7)^2}\notin\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$;

e) $0\notin\mathbb{N}$; j) $\sqrt{1296}\in\mathbb{Q}$;

k) $\sqrt{10^0+10^1+10^2+\ldots+10^{10}}\in\mathbb{R}$.

2 Se consideră mulțimea

$$M=\left\{2,1;-\sqrt{9};\sqrt{8};(-3)^3;(0,1)^{-1};\sqrt{1\frac{9}{16}};\frac{15}{5}\right\}$$

a) Scrieți, pe rând, mulțimile formate cu toate:
  1) numerele naturale care aparțin mulțimii M;
  2) numerele întregi care aparțin mulțimii M;
  3) numerele raționale care aparțin mulțimii M;
  4) numerele iraționale care aparțin mulțimii M.

b) Folosind subpunctul a), copiați tabelul pe caiet și completați:

$M\cap\mathbb{N}$	
$M\cap\mathbb{Z}$	
$M\cap\mathbb{Q}$	
$M\cap\mathbb{R}$	

3 Fie mulțimea $B=\left\{-\sqrt{49};\sqrt{64};\frac{-57}{-19};\frac{\sqrt{81}}{-3}\right\}\cup\left\{\sqrt{2,(7)};\frac{0}{7};\sqrt{2^2\cdot(-3)^4};\sqrt{500}\right\}$

Completați spațiile libere astfel încât să obțineți egalități:

a) $B\cap\mathbb{N}=\{\ldots\}$ d) $B\cap\mathbb{Q}=\{\ldots\}$

b) $B\cap\mathbb{Z}=\{\ldots\}$ e) $B\cap(\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z})=\{\ldots\}$

c) $B\cap(\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N})=\{\ldots\}$ f) $B\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})=\{\ldots\}$

4 Se consideră mulțimea

$$C=\left\{\sqrt{0,(1)};-\sqrt{1\frac{3}{4}};\frac{69}{23};-3;\left(0,1(6)\right)^{-1};\sqrt{7}\right\}$$

a) Găsiți o mulțime $D=\{a, b, c\}$ care satisfice simultan condițiile:
  1) mulțimea $C\cap D$ conține exact două numere naturale.
  2) mulțimea $C\cup D$ conține exact trei numere iraționale.

b) Folosind mulțimea D, identificată la subpunctul anterior, stabiliți valoarea de adevăr pentru fiecare din propozițiile următoare.

p_1: „Mulțimea D nu conține numere naturale.”

p_2: „Mulțimea D conține cel mult două numere raționale.”

5 Completați spațiile libere cu una din notațiile $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, pentru a obține propoziții adevărate:

a) Numerele care se pot scrie ca raport de numere întregi, formează mulțimea … .

b) Numerele care se pot exprima ca fracții zecimale finite, aparțin mulțimii … .

c) Numerele care se pot exprima ca fracții zecimale periodice, aparțin mulțimii … .

d) Numerele care nu se pot exprima ca raport de numere întregi, formează mulțimea … .

e) Dacă a nu este pătratul unui număr rațional, atunci $\sqrt{a}$ aparține mulțimii … .

f) Reuniunea dintre mulțimea numerelor raționale și mulțimea numerelor iraționale este mulțimea … .

6 Demonstrați că:

a) $\sqrt{1234}\notin\mathbb{Q}$;

b) $\sqrt{1+6^{78}}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$;

c) $\sqrt{\underbrace{111\ldots1}_{15\text{ cifre}}}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$;

d) $\sqrt{4^n}\in\mathbb{Q}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

7 Determinați mulțimea

$$E=\left\{\sqrt{x}\,\middle|\,59<x<2^7,\ \sqrt{x}\in\mathbb{N}\right\}.$$

1.3 Scoaterea factorilor de sub radical. Introducerea factorilor sub radical

Ne amintim

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{a^2} = a, \text{ pentru orice } a \geq 0 \\ \sqrt{a^2} = -a, \text{ pentru orice } a < 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \sqrt{a^2} = |a|, \text{pentru orice } a \in \mathbb{Q}$$

Relațiile de mai sus rămân valabile și în cazul în care $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exemple

$\sqrt{\pi^2} = \pi$;

$\sqrt{(1-\pi)^2} = -(1-\pi) = -1+\pi = \pi - 1$

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Scrierea expresiei $\sqrt{a^2 b}$ sub forma $a\sqrt{b}$ se numește **scoaterea factorului *a* de sub radical**, unde $a, b \in \mathbb{N}^*$.

$$\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$$

Când se cere scoaterea factorilor de sub radical, numărul $\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, va fi scris sub forma $a\sqrt{b}$, unde b nu este divizibil cu niciun pătrat perfect diferit de 1.

a) $\sqrt{63} = \sqrt{9 \cdot 7} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{7} = 3 \cdot \sqrt{7}$

(am scos factorul 3 de sub radical)

b) $\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5 \cdot \sqrt{3}$

(am scos factorul 5 de sub radical)

c) $\sqrt{700} = \sqrt{100 \cdot 7} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{7} = 10 \cdot \sqrt{7}$

(am scos factorul 10 de sub radical).

Exemple

$\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$

$\sqrt{150} = \sqrt{25 \cdot 6} = 5\sqrt{6}$

$\sqrt{120} = \sqrt{4 \cdot 30} = 2\sqrt{30}$

Rezolvăm și observăm

Pentru a evidenția pătratele perfecte care apar ca factori sub radical, este util să descompunem numărul în produs de factori primi.

a) $\sqrt{147} = ?$

$$\begin{array}{r|l} 147 & 3 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$\sqrt{147} = \sqrt{7^2 \cdot 3}$

$\sqrt{147} = 7\sqrt{3}$

b) $\sqrt{2450} = ?$

$$\begin{array}{r|l} 2450 & 2 \\ 1225 & 5 \\ 245 & 5 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$\sqrt{2450} = \sqrt{5^2 \cdot 7^2 \cdot 2}$

$\sqrt{2450} = 5 \cdot 7\sqrt{2} = 35\sqrt{2}$

c) $\sqrt{216} = ?$

$$\begin{array}{r|l} 216 & 2 \\ 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$\sqrt{216} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 3}$

$\sqrt{216} = 2 \cdot 3\sqrt{2 \cdot 3} = 6\sqrt{6}$

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

În practică, sunt situații în care, pentru evidențierea unor proprietăți sau pentru simplificarea unor calcule, este necesar să scoatem de sub radical și factori care nu sunt numere naturale.

Ne întrebăm dacă putem generaliza scoaterea factorilor de sub radicali și în cazul numerelor raționale și chiar în cazul numerelor reale pozitive.

Considerăm numărul $\sqrt{\frac{12}{25}}$ și folosim proprietățile deja învățate, pentru a calcula în două moduri diferite:

$\sqrt{\frac{12}{25}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{2^2 \cdot 3}}{\sqrt{5^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$, respectiv $\sqrt{\frac{12}{25}} = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot 3} = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2} \cdot \sqrt{3} = \frac{2}{5}\sqrt{3}.$

Vom constata că ambele sunt calcule corecte.

Scrierea expresiei $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$ se numește **scoaterea factorului *a* de sub radical**, unde $a \geq 0$, $b \geq 0$.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

$\sqrt{a^{2k} \cdot b} = a^k \sqrt{b}$, unde $a \geq 0$, $b \geq 0$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Dacă în descompunere apar $2k$ factori egali cu a, atunci factorul a^k iese de sub radical.

Exemplu: $\sqrt{2^8 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot 7} = 2^4 \cdot 3\sqrt{5 \cdot 7} = 48\sqrt{35}$

$\sqrt{a^{2k+1} \cdot b} = \sqrt{a^{2k} \cdot a \cdot b} = a^k \sqrt{a \cdot b}$

Dacă în descompunere apar $2k + 1$ factori egali cu a, atunci factorul a^k iese de sub radical și mai rămâne sub radical factorul a.

Exemplu: $\sqrt{2^7 \cdot 3^3 \cdot 5} = \sqrt{2^6 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 5} =$
$= 2^3 \cdot 3\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5} = 24\sqrt{30}$

Se înmulțesc factorii care au fost scoși de sub radical și, separat, se înmulțesc factorii care au rămas sub radical.

În cazul calculului algebric, când nu știm dacă factorul a este pozitiv sau negativ, vom folosi scrierea $\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$.

$\sqrt{5x^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{5} = |x|\sqrt{5}$

$\sqrt{3x^4} = \sqrt{x^4}\sqrt{2} = \left|x^2\right|\sqrt{2} = x^2\sqrt{2}$

$\sqrt{2x^6} = \sqrt{x^6}\sqrt{2} = \left|x^3\right|\sqrt{2} = x^2|x|\sqrt{2}$

Operația inversă scoaterii factorilor de sub radical se numește „introducerea factorilor sub radical”.

Astfel, vom scrie $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$, unde $a \geq 0$, $b \geq 0$.

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$$

Exemple:

a) $3\sqrt{5} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{45}$
(am introdus factorul 3 sub radical).

b) $7\sqrt{2} = \sqrt{7^2 \cdot 2} = \sqrt{49 \cdot 2} = \sqrt{98}$
(am introdus factorul 7 sub radical)

c) $0{,}8\sqrt{5} = \sqrt{(0{,}8)^2 \cdot 5} = \sqrt{0{,}64 \cdot 5} = \sqrt{3{,}2}.$
(am introdus factorul 0,8 sub radical)

Să nu ne pripim!

Dacă $a < 0$ și $b \geq 0$, atunci $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 \cdot b}$. De exemplu, $-2\sqrt{5} = -\sqrt{2^2 \cdot 5} = -\sqrt{20}$.

Reținem!

- Scoaterea factorului a de sub radical: $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$, oricare ar fi $a \geq 0$, $b \geq 0$;
- Introducerea factorului a sub radical: $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$, oricare ar fi $a \geq 0$, $b \geq 0$.
- Pentru orice $a \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$, are loc relația $\sqrt{a^2b} = |a|\sqrt{b}$.
- Dacă $a \geq 0$ și $b \geq 0$, atunci $\sqrt{a^{2k} \cdot b} = a^k\sqrt{b}$ și $\sqrt{a^{2k+1} \cdot b} = \sqrt{a^{2k} \cdot a \cdot b} = a^k\sqrt{a \cdot b}$.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Copiați pe caiete propozițiile, apoi completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:

a) Dacă $a \geq 0$ și $b \geq 0$, atunci $\sqrt{a^2 \cdot b} = \ldots$.

b) Dacă $a \leq 0$ și $b \geq 0$, atunci $\sqrt{a^2 \cdot b} = \ldots$.

c) Dacă $a \in \mathbb{R}$ și $b \geq 0$, atunci $\sqrt{a^2 \cdot b} = \ldots$.

2 Scoateți factorii de sub radicali:

a) $\sqrt{2^2 \cdot 3}$; g) $\sqrt{(-5)^4 \cdot 7}$;

b) $\sqrt{3^4 \cdot 5}$; h) $\sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5}$;

c) $\sqrt{5^6 \cdot 7}$; i) $\sqrt{(-7)^2 \cdot 101}$;

d) $\sqrt{11^{10} \cdot 2}$; j) $\sqrt{5^4 \cdot 3^2 \cdot 2}$;

e) $\sqrt{(-2)^2 \cdot 3}$; k) $\sqrt{(-2)^2 \cdot 3^2 \cdot 5}$;

f) $\sqrt{(-3)^2 \cdot 5}$; l) $\sqrt{(-3)^2 \cdot 5^4 \cdot 7}$.

3 Scoateți factorii de sub radicali:

a) $\sqrt{2^7}$; e) $\sqrt{(-2)^3 \cdot (-3)^3}$;

b) $\sqrt{3^{11}}$; f) $\sqrt{2 \cdot 2^3 \cdot 2^5 \cdot 2^8}$;

c) $\sqrt{2^5 \cdot 3^7}$; g) $\sqrt{2^{2n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$;

d) $\sqrt{3^3 \cdot 5^5 \cdot 7^7}$; h) $\sqrt{3^{2n+3}}$, $n \in \mathbb{N}$.

4 Scoateți factorii de sub radicali:

a) $\sqrt{12}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{32}$, $\sqrt{75}$, $\sqrt{98}$;

b) $\sqrt{360}$, $\sqrt{192}$, $\sqrt{150}$, $\sqrt{288}$, $\sqrt{294}$, $\sqrt{972}$;

c) $\sqrt{2250}$, $\sqrt{2366}$, $\sqrt{3468}$, $\sqrt{9072}$, $\sqrt{10^5}$, $\sqrt{10^{11}}$.

5 După efectuarea calculelor, scoateți factorii de sub radicali:

a) $\sqrt{2^2 \cdot 3^2 + \sqrt{2^4 \cdot 3^6}}$

b) $\sqrt{2^8 + 4 \cdot \sqrt{4096}}$;

c) $\sqrt{2^5 \cdot 3^4 + 2^4 \cdot 3^4 + 2^4 \cdot 3^5}$.

6 Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor. Scrieți, pe caiete, propozițiile adevărate:

a) $\sqrt{200} = 10\sqrt{2}$;

b) $-\sqrt{343} = 7\sqrt{7}$;

c) $\sqrt{a^2 \cdot b} = a\sqrt{b}$, $0 < a$, $0 < b$;

d) $\sqrt{a \cdot b^2} = -b\sqrt{a}$, $b < 0 < a$;

e) Dacă $\sqrt{288} = 12\sqrt{x}$, , atunci $x = 2$.

f) Dacă $\sqrt{675} = x\sqrt{3}$, , atunci $x = 5$.

7 Completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:

a) „Dacă $a > 0$ și $b \geq 0$, atunci $a\sqrt{b} = -\sqrt{\ldots}$”;

b) „Dacă $a < 0$ și $b \geq 0$, atunci $a\sqrt{b} = -\sqrt{\ldots}$”.

8 Scrieți următoarele numere, introducând factorii sub radicali:

a) $2\sqrt{3}$; d) $-3\sqrt{2}$;

b) $5\sqrt{1,4}$; e) $-\frac{2}{3} \cdot \sqrt{15}$;

c) $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{24}$; f) $-\frac{5}{7}\sqrt{\frac{7}{5}}$.

9 Completați în dreptul fiecărui enunț litera A, dacă propoziția este adevărată și litera F, dacă propoziția este falsă:

a) $2\sqrt{15} = \sqrt{60}$; d) $-2\sqrt{19} = -\sqrt{2^2 \cdot 19}$;

b) $3\sqrt{5} = \sqrt{45}$; e) $6\sqrt{7} = 7\sqrt{6}$;

c) $-4\sqrt{7} = \sqrt{(-4)^2 \cdot 7}$; f) $-4\sqrt{12} = -8\sqrt{3}$.

10 Determinați numerele naturale x și y pentru care $x \cdot \sqrt{y} = \sqrt{153}$, cu $x > 1$.

Evaluare sumativă

Se acordă 10 puncte din oficiu.

I. *Aflați valoarea de adevăr a fiecăreia dintre propozițiile date:*

3p	**1.** Numărul 1,3(4) este rațional.	**3p**	**3.** Numărul $\sqrt{225}$ este real.
3p	**2.** Numărul $\sqrt{1,(7)}$ este irațional.	**3p**	**2.** $\left\{-\frac{\sqrt{1}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2},\right\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

II. *La problemele următoare alegeți litera care indică răspunsul corect; doar un răspuns este corect.*

5p **5p**	**1.** Se consideră mulțimea $A = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, ..., \sqrt{2019}\}$. **1.1.** Numărul elementelor mulțimii $A \cap \mathbb{Q}$ este egal cu: A. 40 B. 50 C. 45 D. 44 **1.2.** Numărul elementelor mulțimii $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ este egal cu: A. 1974 B. 1975 C. 1976 D. 2018
5p	**2.** Fie $x \in \mathbb{N}$. Numărul $\sqrt{77 - 7 \cdot x}$ este rațional pentru: A. $x \in \{0, 1, 2, 3, ..., 11\}$ B. $x \in \{0, 1, 9\}$ C. $x \in \{2, 3, 6, 8\}$ D. $x \in \{4, 11\}$
5p	**3.** Fie $y \in \mathbb{N}$. Numărul $\sqrt{88 - 22 \cdot y}$ este irațional pentru: A. $y \in \{0, 1, 2, 3\}$ B. $y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ C. $y \in \{0, 4\}$ D. orice număr natural y
5p	**4.** Dacă $\sqrt{75} = a \cdot \sqrt{3}$, , atunci a este egal cu: A. 1 B. 3 C. 5 D. 6
5p	**5.** Știind că $\sqrt{500} = b \cdot \sqrt{c}$ și că nu se mai pot scoate factori naturali de sub radical, $b + c$ este: A. 15 B. 12 C. 13 D. 14
5p	**6.** Dacă $\sqrt{\frac{27}{12}} = \frac{d}{e}$, , atunci $d - e$ este: A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
5p	**7.** Mulțimea formată numai din numere iraționale este: A. $\{\sqrt{1}, \sqrt{3}, ..., \sqrt{17}\}$ B. $\{\sqrt{2}, \sqrt{4}, ..., \sqrt{18}\}$ C. $\{\sqrt{2^2}, \sqrt{2^4}, ...\sqrt{2^{18}}\}$ D. $\{\sqrt{2^1}, \sqrt{2^3}, ..., \sqrt{2^{17}}\}$

III. *Asociați fiecare cifră corespunzătoare enunțurilor din coloana A, cu litera care indică răspunsul corect, aflat în coloana B.*
După ce s-au scos factorii de sub radical se obține:

	A	B
3p	**1.** Pentru $a > 0$, $\sqrt{9a^2} =$	**a.** $-3a\sqrt{-a}$
3p	**2.** Pentru $a < 0$, $\sqrt{-9a^3} =$	**b.** $3a$
3p	**3.** Pentru $a > 0$, $\sqrt{a^9 : a^3} =$	**c.** a^3
		d. $-3a$

	A	B
3p	**4.** Pentru $a < 0$, $b > 0$, $\sqrt{a^2 b^2} =$	**e.** $a : b^2$
3p	**5.** Pentru $a > 0$, $b > 0$, $\sqrt{a^2 : b^4} =$	**f.** $-a \cdot b$
3p	**6.** Pentru $a < 0$, $b < 0$, $\sqrt{(a+b)^2} =$	**g.** $-a - b$
		h. $-a^2 : b$

IV. *La problema următoare se cere rezolvare completă.*

20p

Se consideră mulțimea $B = \left\{ x \middle| x = \sqrt{\frac{n \cdot (n+1)}{2}}, n \in \mathbb{N}^*, n < 10 \right\}$.

a) Scrieți mulțimea B, enumerând elementele.

b) Determinați mulțimile $B \cap \mathbb{Q}$ și $B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

1.4 Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor, prin aproximări. Compararea și ordonarea numerelor reale. Modulul unui număr real

L1 Aproximarea numerelor reale prin fracții zecimale. Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor, prin aproximări

Ne amintim

În lecțiile anterioare, am identificat unele tehnici de estimare a valorii unui număr rațional și a valorii unui număr irațional, deci a unui număr real.

Aproximarea prin lipsă a unui număr real la ordinul unităților (zecilor, sutelor, miilor etc.) este ***cel mai mare*** număr natural format numai din unități (zeci, sute, mii etc.) ***mai mic sau egal*** cu numărul respectiv.	Fie $x=\sqrt{200}$. *La ordinul unităților:* $\sqrt{200}\approx 14$ pentru că $14<\sqrt{200}<15$. La *ordinul zecilor:* $\sqrt{200}\approx 10$ pentru că $10<\sqrt{200}<20$.
Aproximarea prin adaos a unui număr real la ordinul unităților (zecilor, sutelor, miilor etc.) este ***cel mai mic*** număr natural format numai din unități (zeci, sute, mii etc.) strict ***mai mare*** decât numărul respectiv.	Fie $x=\sqrt{200}$. *La ordinul unităților:* $\sqrt{200}\approx 15$ pentru că $14<\sqrt{200}<15$. *La ordinul zecilor:* $\sqrt{200}\approx 20$ pentru că $10<\sqrt{200}<20$.
Rotunjirea unui număr real la ordinul unităților (zecilor, sutelor, miilor etc.) este ***aproximarea*** prin lipsă sau aproximarea prin adaos, la ordinul considerat, care este ***cea mai apropiată*** de numărul respectiv. În cazul în care cele două aproximări sunt ***la fel de apropiate*** de număr, rotunjirea va fi dată de aproximarea ***prin adaos***.	*La ordinul unităților:* $17{,}39\approx 17$ pentru că $17{,}39-17<18-17{,}39$; $17{,}69\approx 18$ pentru că $17{,}69-17>18-17{,}69$. *La ordinul zecilor:* $17{,}39\approx 20$ pentru că $17{,}39-10>20-17{,}39$; $14{,}69\approx 10$ pentru că $14{,}69-10<20-14{,}69$. *La ordinul unităților:* $19{,}5\approx 20$ pentru că $19{,}5-19=0{,}5=20-19{,}5$ *La ordinul zecilor:* $395\approx 400$ pentru că $395-390=5=400-395$.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Regulile practice pentru aproximarea numerelor reale prin fracții zecimale, la ordinul zecimilor, sutimilor, miimilor etc., se pot formula în mod similar.

Să considerăm numărul real 12,7358 și să-l aproximăm la zecimi, sutimi, miimi, prin lipsă, prin adaos, apoi să-l rotunjim.

Au loc inegalitățile:

$12{,}7<12{,}7358<12{,}8$; $\quad 12{,}73<12{,}7358<12{,}74$; $\quad 12{,}735<12{,}7358<12{,}736$

Aproximarea prin lipsă a unui număr real la ordinul zecimilor (sutimilor, miilor etc.) se obține prin înlăturarea, din numărul inițial, a tuturor zecimalelor aflate la dreapta ordinului de mărime la care aproximăm.	La zecimi: $12{,}7358\approx 12{,}7$; La sutimi: $12{,}7358\approx 12{,}73$; La miimi: $12{,}7358\approx 12{,}735$.

Aproximarea prin adaos a unui număr real la ordinul zecimilor (sutimilor, miilor etc.) se obține adăugând o zecime (sutime, miime etc.) la aproximarea prin lipsă, la același ordin.

La zecimi: 12,7358 ≈ 12,8.
La sutimi: 12,7358 ≈ 12,74.
La miimi: 12,7358 ≈ 12,736.

Rotunjirea unui număr real la ordinul zecimilor (sutimilor, miilor etc.) este aproximarea prin lipsă sau aproximarea prin adaos, la ordinul considerat, care este cea mai apropiată de numărul respectiv. În cazul în care cele două aproximări sunt la fel de apropiate de număr, rotunjirea reprezintă aproximarea prin adaos.

La zecimi: 12,7358 ≈ 12,7.
La sutimi: 12,7358 ≈ 12,74.
La miimi: 12,7358 ≈ 12,736.

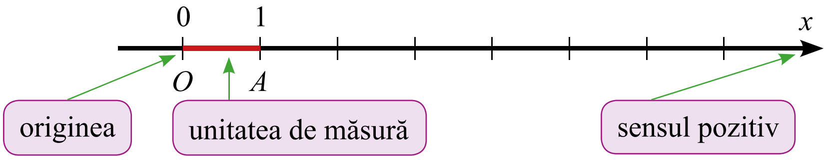
Pentru a stabili care aproximare este mai apropiată, sunt necesare calcule, uneori lungi.
O *modalitate practică* de realizare a *rotunjirii*:
Dacă cifra aflată imediat după ordinul de mărime la care efectuăm rotunjirea este 0, 1, 2, 3 sau 4, atunci rotunjirea este chiar aproximarea prin lipsă. Dacă această cifră este 5, 6, 7, 8 sau 9, atunci rotunjirea este dată de aproximarea prin adaos.

La zecimi:12,7358 ≈ 12,7
pentru că 3 < 5.
La sutimi: 12,7358 ≈ 12,74
pentru că 5 = 5.
La miimi: 12,7358 ≈ 12,736
pentru că 8 > 5.

Observație: În practică, se folosesc, prin convenție, aproximări cu una sau cu două zecimale exacte. Aproximarea prin lipsă a unui număr pozitiv, la ordinul zecimilor se mai numește **aproximarea cu o zecimală exactă**. Aproximarea prin lipsă a unui număr pozitiv, la ordinul sutimilor se mai numește **aproximarea cu două zecimale exacte**.
Comentariu: Aproximarea numerelor reale prin fracții zecimale este foarte utilă pentru a estima poziția punctului de reprezentare a unui număr real pe axa numerelor, pentru a compara numere reale și pentru a stabili ordinea crescătoare sau descrescătoare a unor numere.

Definiție: O dreaptă pe care s-au fixat un *punct* (numit *origine*), o *unitate de măsură* și un *sens pozitiv*, se numește *axa numerelor*.

Originea se notează, de regulă, cu *O*. Pe desenul alăturat unitatea de măsură este *OA* = 1 cm, iar sensul pozitiv este de la stânga spre dreapta și este indicat prin săgeată.

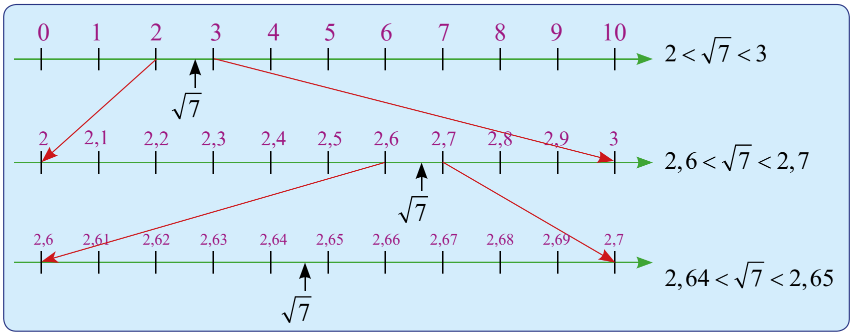


Pe axa *Ox*, fiecărui număr real *a*, îi corespunde, în mod unic, un punct *M* și reciproc, fiecărui punct *M* de pe dreaptă îi corespunde un unic număr real *a*, numit coordonata (sau abscisa) punctului *M*, care va fi notat x_M.
Din scrierea $x_M = a$, înțelegem că *a* este ***abscisa punctului*** *M*, sau că punctul *M* este ***reprezentarea***, pe axa numerelor, a ***numărului real*** *a*. Vom da aceeași interpretare și scrierii *M*(*a*) (citim *M* de abscisă *a*, sau *M* de coordonată *a*).
Datorită faptului că între numerele reale și punctele de pe axa numerelor există „o corespondență *unu* la *unu*”, axa numerelor se mai numește și ***axa numerelor reale***.
Să nu uităm: Numerele pozitive se reprezintă în dreapta originii; numerele negative se reprezintă în stânga originii; 0 este abscisa originii axei.
Numerele iraționale *se aproximează prin numere raționale*, exprimate, de regulă, prin fracții zecimale.
Exemplu: Calculăm $\sqrt{7}$ cu ajutorul calculatorului, păstrăm primele opt zecimale exacte și obținem $\sqrt{7} = 2,64575131...$

Aproximările prin lipsă, aproximările prin adaos și rotunjirile numărului $\sqrt{7}$ sunt:

	Aproximări prin lipsă	Aproximări prin adaos	Rotunjiri
la unități	2	3	3
la zecimi	2,6	2,7	2,6
la sutimi	2,64	2,65	2,65
la miimi	2,645	2,646	2,646

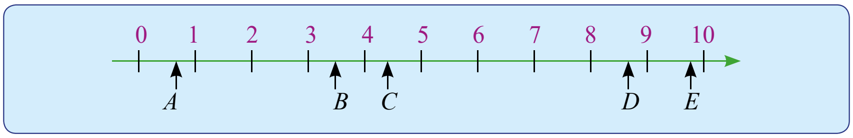
Reprezentarea pe axa numerelor reale a numărului $\sqrt{7}$, folosind aproximările prin fracții zecimale, este ilustrată în imaginea de mai jos.



Exercițiu: În desenul de mai jos, punctele A, B, C, D și E au abscisele printre numerele:
$\sqrt{0,6}, \sqrt{20}, \sqrt{76}, \sqrt{15}, \sqrt{97}$

Folosind poziția punctelor pe axă și estimări ale valorii fiecăruia dintre numerele date, determinați coordonatele fiecărui punct, urmând modelul:

$0^2 < 0,6 < 1^2 \Rightarrow 0 < \sqrt{0,6} < 1$. Cum $0 < x_A < 1$ deducem că $x_A = \sqrt{0,6}$.

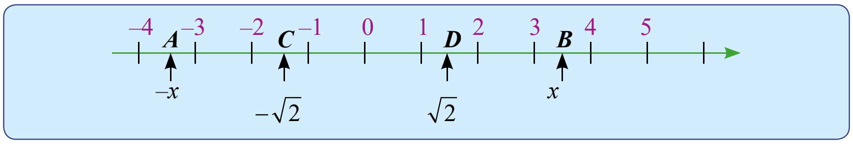


Numerele ***reale negative*** se reprezintă pe axa numerelor după modelul reprezentării numerelor raționale negative, adică:

Numerele opuse x și $-x$ se reprezintă, de o parte și de alta a originii, la aceeași distanță de punctul O. Numărul pozitiv se reprezintă în partea dreaptă a originii, iar numărul negativ se reprezintă în partea stângă.

Exemple: Dacă $x \in \mathbb{R}_+$, atunci A și B, având coordonatele $-x$, respectiv x, sunt reprezentate pe axa numerelor la distanța x de punctul O.

Punctele C și D având coordonatele $-\sqrt{2}$, respectiv $\sqrt{2}$, numere iraționale, sunt reprezentate pe axa numerelor la distanța $\sqrt{2}$ de punctul O.



Reținem!

O dreaptă pe care s-au fixat o origine (punctul O), o unitate de măsură (segmentul $OA = 1$) și un sens (de la stânga spre dreapta), se numește *axa numerelor*.

Scriem $M(a)$ sau $x_M = a$ și înțelegem:
- a este **abscisa punctului** M;
- punctul M este **reprezentarea** numărului real a pe axa numerelor, iar a este **coordonata punctului *M***.

Numerele reale x și $-x$ se reprezintă pe axa numerelor, de o parte și de alta a originii, la aceeași distanță de origine.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 a) Aproximați prin lipsă, la unități, numerele: $\sqrt{7}$, $\sqrt{234}$, $\sqrt{1000}$.

b) Aproximați prin adaos, la unități, numerele: $\sqrt{312}$, $\sqrt{99}$, $\sqrt{2019}$.

2 a) Aproximați prin lipsă, la zecimi, numerele: $\sqrt{3}$, $\sqrt{20}$.

b) Aproximați prin adaos, la sutimi, numerele: $\sqrt{5}$, $\sqrt{32}$.

3 Folosind operația de împărțire a numerelor întregi și calculatorul, completați căsuțele libere din tabelul următor, exprimând numerele sub formă de fracții zecimale cu două zecimale exacte (aproximate, prin lipsă, la sutimi):

$\frac{17}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{29}{7}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{50}$

4 Se consideră numărul $a = 1{,}234567$.

a) Aproximați prin lipsă, la unități și apoi la sutimi, numărul a.

b) Aproximați prin adaos, la zecimi și apoi la miimi, numărul a.

5 Completați, pe caiet, căsuțele libere, astfel încât să obțineți relații de forma $a < x < a + 1$, unde a este un număr întreg.

a) $\square < \sqrt{3} < \square$; d) $\square < -\sqrt{3} < \square$;

b) $\square < \sqrt{27} < \square$; e) $\square < -\sqrt{20} < \square$;

c) $\square < \sqrt{150} < \square$; f) $\square < -\sqrt{27} < \square$.

6 a) Demonstrați, prin calcul, inegalitățile:

1) $(2{,}2)^2 < 5 < (2{,}3)^2$;

2) $(2{,}23)^2 < 5 < (2{,}24)^2$;

3) $(12{,}2)^2 < 150 < (12{,}3)^2$;

4) $(12{,}24)^2 < 150 < (12{,}25)^2$.

b) Aproximați prin lipsă, la zecimi, numărul $\sqrt{5}$;

c) Aproximați prin adaos, la sutimi, numărul $\sqrt{5}$;

d) Aproximați prin lipsă, la sutimi, numărul $\sqrt{150}$;

e) Aproximați prin adaos, la zecimi, numărul $\sqrt{150}$.

7 Reprezentați pe axa numerelor reale $\frac{1}{2}; -0{,}5; \frac{3}{2}; -2; \frac{5}{2}; -1{,}5$, luând ca unitate de măsură un segment cu lungimea de 1 cm.

8 Luând ca unitate de măsură un segment cu lungimea de 5 cm, reprezentați pe axă următoarele numere: 0,2; –1; 1,3; –0,6; $\frac{3}{10}; \frac{5}{5}; 1\frac{1}{10}$.

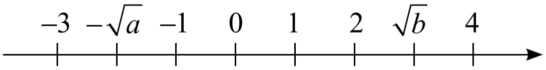
9 Alegeți o unitate de măsură convenabilă și reprezentați pe axă următoarele numere: $\sqrt{2}; -3; \frac{11}{5}; -\sqrt{3}; 1; \sqrt{5}$.

10 Pe axa numerelor, punctele $A(-1)$, $B(x)$, $C(y)$, $D(3)$ sunt reprezentate în această ordine, x numește un număr rațional, iar y numește un număr irațional.

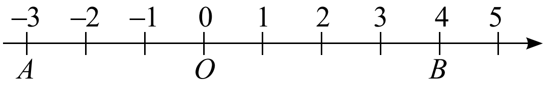
a) Găsiți câte o valoare pentru x și y, apoi realizați un desen care să corespundă datelor problemei.

b) Stabiliți dacă are loc egalitatea $AB + CD = AC + BD$.

11 Pe axa din imaginea de mai jos, sunt reprezentate doar numere raționale. Determinați numerele naturale a și b.



12 În figura de mai jos, punctul O este originea axei.



a) Folosind desenul, identificați abscisele punctelor A și B;

b) Reprezentați pe axă punctele $C\left(-\sqrt{2}\right)$ și $D\left(2\sqrt{6}\right)$, estimând valorile acestora;

c) Folosind ordinea punctelor A, B, C, D și O, justificați egalitățile: $AC + CO = AO$, respectiv $AD - DB = AB$.

13 Se consideră un număr real cu cifra miimilor nenulă. Determinați cifra sutimilor astfel încât:

a) aproximările prin lipsă la zecimi și la sutimi să fie egale.

b) aproximările prin adaos la zecimi și la sutimi să fie egale.

L2 Compararea și ordonarea numerelor reale

Ne amintim

Pentru a compara și pentru a ordona două numere (naturale, întregi, raționale) am folosit, cu succes, reprezentarea lor pe axa numerelor și am definit relația „ ≤ ” (relația de ordine).

Dacă x_A și x_B sunt două numere raționale, atunci $x_A < x_B$ dacă și numai dacă, pe axa numerelor, punctul A este reprezentat în stânga punctului B.
Dacă x_A și x_B sunt două numere raționale, atunci $x_A > x_B$ dacă și numai dacă, pe axa numerelor, punctul A este reprezentat în dreapta punctului B.
Dacă x_A și x_B sunt două numere raționale, atunci $x_A \le x_B$ dacă și numai dacă, pe axa numerelor, punctul A este reprezentat în stânga punctului B sau coincide cu punctul B.
Dacă x_A și x_B sunt două numere raționale, atunci $x_A \ge x_B$ dacă și numai dacă, pe axa numerelor, punctul A este reprezentat în dreapta punctului B sau coincide cu punctul B.

Exemple

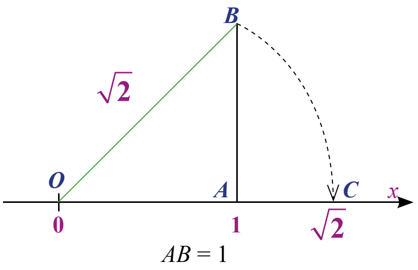
$2 < 5$ pentru că
$A(2)$ este reprezentat de axă în stânga punctului $B(5)$
$5{,}3 > 5{,}2$ pentru că
$B(5{,}3)$ este reprezentat de axă în dreapta punctului $A(5{,}2)$
$3{,}1 \le 3{,}5$ pentru că $3{,}1 < 3{,}5$
$3{,}1 \le 3{,}1$ pentru că $3{,}1 = 3{,}1$
$-13{,}4 \ge -13{,}9$ pentru că $-13{,}4 > -13{,}9$
$-13{,}4 \ge -13{,}4$ pentru că $-13{,}4 = -13{,}4$

Datorită faptului că $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, deducem că știm deja să comparăm și să ordonăm o infinitate de numere reale (pe cele naturale, întregi, raționale). Rămâne doar să vedem dacă această abordare poate fi extinsă și pentru numerele *iraționale*.

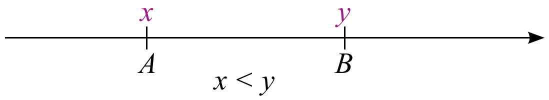
Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Unele numere iraționale pot fi reprezentate pe axa numerelor cu *fidelitate*. De exemplu, numărul $\sqrt{2}$ se poate reprezenta pe axă folosind compasul.

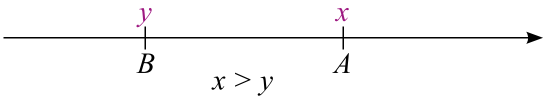
În general, însă, reprezentarea pe axa numerelor a numerelor iraționale se realizează folosind estimări ale poziției acestor numere pe axă. Am putut constata în lecțiile anterioare că punctul de reprezentare, pe axa numerelor, a oricărui număr irațional, este situat în *dreapta* punctului de reprezentare a *aproximării prin lipsă* și în *stânga* punctului de reprezentare a *aproximării prin adaos*, oricare ar fi ordinul de aproximare.



Este firească, acum, următoarea caracterizare. Considerăm numerele reale x, y și punctele $A(x)$ și $B(y)$.



Punctul A este situat în stânga punctului B dacă și numai dacă $x < y$.



Punctul A este situat în dreapta punctului B dacă și numai dacă $x > y$.

Deoarece fiecărui punct de pe axa numerelor îi corespunde un unic număr real, punctele A și B coincid dacă și numai dacă $x = y$.

Pentru orice două numere reale x și y are loc una și numai una din relațiile: $x < y$ sau $x = y$ sau $x > y$
A compara două numere reale x și y înseamnă a stabili care dintre cele trei relații de mai sus are loc.

Pe mulțimea numerelor reale, se păstrează rezultatele:
$(x < y \text{ sau } x = y) \Leftrightarrow x \le y$; $(x > y \text{ sau } x = y) \Leftrightarrow x \ge y$; $(x < y \text{ sau } x > y) \Leftrightarrow x \ne y$.

Exercițiu: Considerăm mulțimea $A=\{\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5}\}$. Determinați mulțimile B, C, D, E definite prin: $B=\{x\in A \mid x\leq 2\}$. $C=\{x\in A \mid x\geq 2\}$, $D=\{x\in A \mid x=2\}$, $E=\{x\in A \mid x\neq 2\}$.

Soluție: $\sqrt{2}=1{,}4\ldots\Rightarrow\sqrt{2}<2$; $\sqrt{3}=1{,}7\ldots\Rightarrow\sqrt{3}<2$; $\sqrt{4}=2$; $\sqrt{5}=2{,}2\ldots\Rightarrow\sqrt{5}>2$.

Obținem $B=\{\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4}\}$, $C=\{\sqrt{4},\sqrt{5}\}$, $D=\{\sqrt{4}\}$, $E=\{\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5}\}$.

Dacă între numerele reale x și y scriem unul dintre simbolurile $<, >, \leq, \geq, =$ sau $\neq$ astfel încât să obținem o propoziție adevărată, spunem că am stabilit **o relație** între numerele x și y.

Pe mulțimea numerelor reale, relația „≤” este dotată cu proprietățile: 1) este reflexivă ($x\leq x$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$), 2) este antisimetrică (dacă $x\leq y$ și $y\leq x$, atunci $x=y$) și 3) este tranzitivă (dacă $x\leq y$ și $y\leq z$, atunci $x\leq z$).

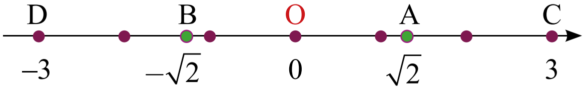
Aceste proprietăți ne vor ajuta să identificăm tehnici de comparare a numerelor reale.

Pe mulțimea numerelor reale, au loc:

Orice număr real negativ este mai mic decât orice număr real pozitiv.	$-15<1$; $-\sqrt{3}<\sqrt{0{,}2}$.
Orice număr real negativ este mai mic decât 0.	$-13{,}5\,(3)<0$; $-\sqrt{119}<0$.
Pentru $x<0$, $y<0$, avem echivalența: $x<y$ dacă și numai dacă $-x>-y$.	$-\sqrt{19}<-\sqrt{12}\Leftrightarrow\sqrt{19}>\sqrt{12}$.
Dacă $x, a, y\in\mathbb{R}$ sunt numere distincte, $x<a$ și $a<y$, atunci $x<y$.	$\frac{1}{\sqrt{5}}<\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Dacă x și y sunt numere reale pozitive, atunci $x\leq y\Rightarrow\sqrt{x}\leq\sqrt{y}$.	$4{,}9<5\Rightarrow\sqrt{4{,}9}<\sqrt{5}$.

Rezolvăm și observăm

1. Reprezentați pe axă, folosind, eventual, aproximări prin fracții zecimale, numerele: $0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, 3, -3$. Observați poziția punctelor corespunzătoare, apoi ordonați crescător aceste numere.



$D-B-O-A-C\Rightarrow -3<-\sqrt{2}<0<\sqrt{2}<3$.

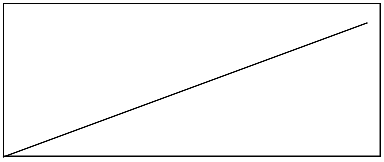
2. a) Folosind calculatorul, scrieți $\sqrt{5}$ cu două zecimale exacte.
   b) Comparați numerele $\sqrt{5}$ și 2,23.
   c) Comparați numerele 2,23 și 2,(2).
   d) Comparați numerele $\sqrt{5}$ și 2,(2).

a) $\sqrt{5}=2{,}23\ldots$.
b) $\sqrt{5}>2{,}23$;
c) $2{,}23>2{,}(2)$
d) $\sqrt{5}>2{,}23$ și $2{,}23>2{,}(2)$ rezultă $\sqrt{5}>2{,}(2)$.

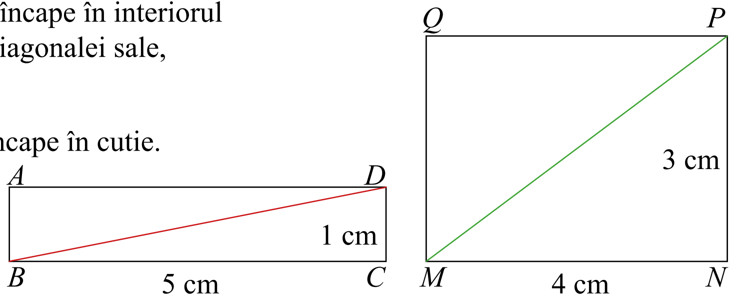
3. Comparați numerele: $x=3\sqrt{5}$ și $y=2\sqrt{11}$.

Soluție: Introducem factorii sub radicali și obținem:
$x=3\sqrt{5}=\sqrt{3^2\cdot 5}=\sqrt{45}$, $y=2\sqrt{11}=\sqrt{2^2\cdot 11}=\sqrt{44}$.
Deoarece $45>44\ \Rightarrow\ \sqrt{45}>\sqrt{44}\ \Rightarrow\ x>y$.

4. Decideți dacă se poate introduce o tijă metalică subțire cu lungimea de 58 cm, într-o cutie având baza dreptunghi, cu dimensiunile 50 cm, respectiv 30 cm, astfel încât tija să fie așezată în întregime pe baza cutiei.
Soluție: Lungimea maximă a tijei care încape în interiorul dreptunghiului este dată de lungimea diagonalei sale,
$d=\sqrt{50^2+30^2}=\sqrt{3400}=58{,}3\ldots$
Deoarece $58<\sqrt{3400}\Rightarrow 58<d$, tija încape în cutie.



5. Decideți care dintre dreptunghiurile $ABCD$ sau $MNPQ$ are diagonala mai mare.



Reținem!

- Dacă x_A și x_B sunt două numere reale, atunci $x_A < x_B$ dacă și numai dacă, pe axa numerelor, punctul A este reprezentat în stânga punctului B.
- Orice număr real negativ este mai mic decât 0 și decât orice număr real pozitiv.
- Dacă x și y sunt numere reale pozitive, atunci: $x \le y \Leftrightarrow \sqrt{x} \le \sqrt{y}$.
- Dacă $x < 0$, $y < 0$ și $x \ne y$, atunci $x < y$ dacă și numai dacă $-x > -y$.
- Pentru orice numere reale x și y are loc **una și numai una** din relațiile: $x < y$ sau $x > y$ sau $x = y$.
- **A compara** două numere reale x și y înseamnă a stabili care dintre relațiile $x < y$ sau $x > y$ sau $x = y$ are loc.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Reprezentați pe axa numerelor reale, apoi ordonați crescător, numerele de mai jos. Stabiliți cel mai mic și cel mai mare număr, în fiecare caz:

a) $-3{,}1$; $-3\frac{1}{4}$; $-\left(-3\frac{1}{2}\right)$; $\frac{19}{5}$;

b) $\sqrt{3}$; -2; $-\sqrt{2}$; $1-\sqrt{1{,}44}$; $1{,}6$.

2 Introduceți factorii sub radicali, apoi comparați numerele:

a) $2\sqrt{3}$ și $3\sqrt{2}$;

b) $8\sqrt{5}$ și $10\sqrt{3}$;

c) $-20\sqrt{2}$ și -28;

d) $-6\sqrt{6}$ și $-7\sqrt{5}$.

3 Completați unul dintre simbolurile $<$, $=$, $>$, pentru a obține propoziții adevărate:

a) $2\sqrt{6}$ ☐ 5

b) $3\sqrt{7}$ ☐ $5\sqrt{3}$;

c) $7\sqrt{10}$ ☐ $9\sqrt{6}$;

d) $4\sqrt{2}$ ☐ $\sqrt{32}$;

e) $\sqrt{196}$ ☐ $7\sqrt{4}$;

f) -5 ☐ $-2\sqrt{6}$;

g) $-2\sqrt{7}$ ☐ $-\sqrt{30}$;

h) $2\sqrt{5}$ ☐ $5\sqrt{2}$;

i) $\frac{4}{3}$ ☐ $\sqrt{\frac{5}{3}}$;

j) $\sqrt{48}$ ☐ 0;

k) 0 ☐ $-\sqrt{6}$;

l) -3 ☐ $-\sqrt{\frac{27}{3}}$;

m) $\sqrt{99}$ ☐ $-7\sqrt{2}$;

n) $-8\sqrt{7}$ ☐ $-2\sqrt{448}$.

4 Se consideră propozițiile:

p_1: „$3<\sqrt{7}$”

p_2: „$\sqrt{19}>5$”

p_3: „$\sqrt{120}<11<\sqrt{130}$”

p_4: „$\sqrt{8}<2{,}9$”

p_5: „$\sqrt{43}>6{,}55$”

p_6: „$-3\sqrt{6}>-4\sqrt{5}$”

p_7: „$\left|\frac{73}{5}-13{,}2\right|>\sqrt{2}$”

p_8: „$\sqrt{(-7)^2\cdot 99}<70$”

Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor de mai sus și enumerați elementele mulțimilor A și F știind că A este mulțimea propozițiilor adevărate, iar F este mulțimea propozițiilor false.

5 Ordonați crescător numerele:

a) $\sqrt{2}$; $1{,}41$; $1{,}(41)$;

b) $2\sqrt{6}$; 5; $3\sqrt{3}$.

6 Ordonați descrescător numerele:

a) 7; $2\sqrt{11}$; $4\sqrt{3}$; $3\sqrt{5}$;

b) -8; $-3\sqrt{7}$; $-6\sqrt{2}$; $-2\sqrt{15}$.

7 Determinați numărul întreg $n \in \mathbb{Z}$, pentru fiecare din situațiile:

a) $n<\sqrt{41}<n+1$;

b) $n<-\sqrt{8}<n+1$;

c) $\frac{9}{5}<\sqrt{n}<\frac{9}{4}$.

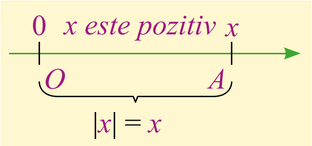
8 Scrieți:

a) trei numere raționale r, astfel încât $\sqrt{2}<r<\sqrt{3}$;

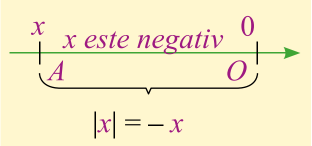
b) trei numere iraționale p, astfel încât $1<p<2$.

L3 Modulul unui număr real

Ne amintim

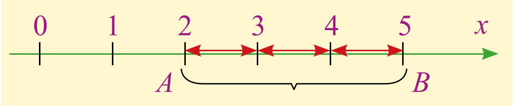


Modulul numărului $x \in \mathbb{Q}$ reprezintă distanța, pe axa numerelor, de la originea axei la punctul A, având abscisa x.
În desenele alăturate, $|x| = OA$.



Modulul numărului x se mai numește **valoarea absolută** a numărului x.
Abscisa punctului A se mai numește **coordonata** punctului A și se notează x_A.
Punctul A se numește **reprezentarea** pe axă a numărului x și se notează $A(x)$.

Distanța dintre punctele A și B, situate pe axa numerelor, având abscisele x_A respectiv x_B, este numărul unităților de măsură cuprinse între A și B. În desenul alăturat, $AB = 3$.
Observăm că $x_B - x_A = 5 - 2 = 3 = AB$,
apoi $x_A - x_B = 2 - 5 = -3$, deci $AB = 3 = -(x_A - x_B)$ sau $AB = x_B - x_A$.
În concluzie, $AB = |x_B - x_A|$ sau $AB = |x_A - x_B|$, oricare ar fi numerele reale x_A și x_B.



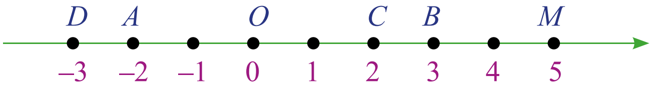
Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Definiție:* Modulul** unui număr real x este ***distanța, pe axa numerelor, de la originea axei la punctul $A(x)$.
Vom scrie $|x| = OA$, unde O este originea axei, iar A este punctul de reprezentare a numărului x pe axă.

Reprezentați pe axa numerelor punctele:
$A(-2)$, $B(3)$, $C(3^2 - 7)$, $D(-3)$.

a) Calculați OA, OB, OC, OD, apoi determinați $|-2|$, $|2|$, $|3|$, $|-3|$.

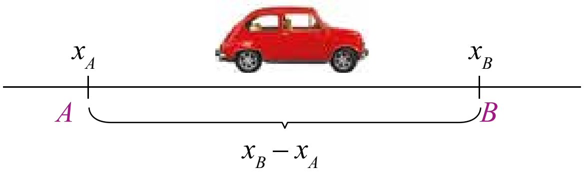
b) Identificați punctul $M(x)$ pentru care $|x - 5| = 0$.



$OA = 2 \Rightarrow |-2| = 2$; $OB = 3 \Rightarrow |\,3\,| = 3$; $OC = 2 \Rightarrow |2| = 2$;
$OD = 3 \Rightarrow |-3| = 3$.
$|x - 5| = 0 \Rightarrow x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow M(5)$.

Rezolvăm și observăm

Un automobil parcurge, pe autostradă, distanța dintre două borne kilometrice A și B.
Numerele înscrise pe aceste borne sunt:
$x_A = 43$ (km) și $x_B = 98$ (km).
Constatăm că $x_B > x_A$.
Considerând că autostrada este rectilinie, distanța parcursă de automobil este $AB = x_B - x_A = 98 - 43 = 55$ (km).

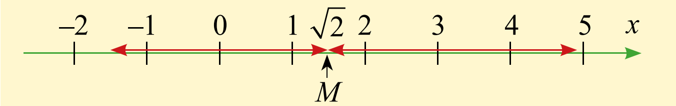


$$\boxed{AB = |x_B - x_A|}$$

Dacă nu știm care dintre numerele x_A și x_B este mai mare, atunci distanța dintre două puncte oarecare A și B, situate pe axa numerelor, este dată de: $AB = |x_B - x_A|$ sau $AB = |x_A - x_B|$.

Comentariu interdisciplinar: În fizică, punctul A, din care pleacă automobilul, se numește *punct inițial*, iar abscisa sa se notează cu x_i. Punctul B, în care ajunge automobilul, se numește *punct final*, iar abscisa sa se notează cu x_f. Diferența $x_B - x_A$ se notează $\Delta x = x_f - x_i$.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm



Privind *modulul diferenței a două numere reale* ca fiind **distanța dintre punctele de reprezentare** a acestor numere pe axă, determinați numerele întregi x cu proprietatea $\left|x-\sqrt{2}\right|<3$.

Soluție: Reprezentăm pe axa numerelor punctul $M\left(\sqrt{2}\right)$. Căutăm punctele situate pe axa numerelor, care au coordonate întregi, situate de o parte și de alta a punctului M, la distanță mai mică decât 3.
Observând axa numerelor, găsim soluțiile: –1, 0, 1, 2, 3, 4.

Proprietățile modulului, pe care le cunoaștem de la numere raționale, se păstrează și pentru numere reale.

$|x| = x$, oricare ar fi $x \geq 0$

$|x| = -x$, oricare ar fi $x < 0$

$|x| \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$

$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$|-x| = |x|$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$

$\sqrt{x^2} = |x|$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$

$|x+y| \leq |x| + |y|$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$

$|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$

$\left|x^n\right| = |x|^n$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

$\dfrac{|x|}{|y|} = \left|\dfrac{x}{y}\right|$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^*$

Scrierea $|a| = \begin{cases} a, & \text{pentru } a \geq 0 \\ -a, & \text{pentru } a < 0 \end{cases}$

se numește **explicitarea modulului**.

Exemple

$\left|\sqrt{7}\right| = \sqrt{7}$

$\left|-\sqrt{5}\right| = -\left(-\sqrt{5}\right) = \sqrt{5}$

$\left|\sqrt{3}\right| = \sqrt{3} \geq 0$, iar $\left|-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2} \geq 0$

$\left|-\sqrt{8}\right| = \left|\sqrt{8}\right|$

$\sqrt{\pi^2} = |\pi| = \pi$; $\sqrt{\left(-\sqrt{5}\right)^2} = \left|-\sqrt{5}\right| = \sqrt{5}$

$|0,5 + (-1,4)| \leq |0,5| + |-1,4| \Leftrightarrow 0,9 \leq 1,9$

$|0,5| \cdot |-1,4| = 0,5 \cdot 1,4 = 0,7$ și $|0,5 \cdot (-1,4)| = |-0,7| = 0,7$

$\left|(-0,5)^3\right| = |-0,125| = 0,125$ și $|-0,5|^3 = 0,5^3 = 0,125$

$\dfrac{|-1,4|}{|0,5|} = \dfrac{1,4}{0,5} = 2,8$ și $\left|\dfrac{-1,4}{0,5}\right| = |-2,8| = 2,8$

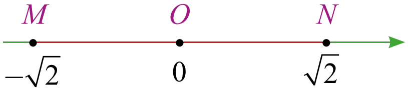
Dacă $x \geq 1$, atunci $x - 1 \geq 0$ și $|x-1| = x - 1$.

Dacă $x < 1$, atunci $x - 1 < 0$ și $|x-1| = -(x-1)$.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

1. Modulul unui număr real este cu atât mai mare, cu cât distanța de la origine la punctul de reprezentare este mai mare.
2. Pentru orice a, număr real pozitiv, există numere reale astfel încât $|x| < a$ și anume, toate numerele reale care se reprezintă pe axă între punctele $M(-a)$ și $N(a)$.
3. Pentru orice a, număr real pozitiv, există exact două numere reale astfel încât $|x| = a$ și anume:
   $x = a$ și $x = -a$.
4. Una dintre tehnicile de comparare a două numere reale negative se poate reformula, folosind modulul, astfel: Dacă $x < 0$, $y < 0$, atunci: $x < y$ dacă și numai dacă $|x| > |y|$.

Fie O originea axei numerelor, $x_A = -7$ și $x_B = +5$ abscisele punctelor A, respectiv B, pe axă. Atunci, $OA = 7$ și $OB = 5$, deci $OA > OB$ și $|-7| > |+5|$.



Numerele reale cu proprietatea $|x| = 2$ sunt +2 și –2, iar cele pentru care $|x| = \sqrt{3}$ sunt $\sqrt{3}$ și $-\sqrt{3}$.

Concluzie: $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ sau $x = -y$

Reținem!

- $|x| = \begin{cases} x, \text{ pentru } x \geq 0 \\ -x, \text{ pentru } x < 0 \end{cases}$
- Dacă $x \in \mathbb{R}$ este abscisa punctului A pe axa numerelor, atunci $|x| = OA$, unde O este originea axei.
- Dintre două numere reale pozitive, este mai mare cel care are modulul mai mare.
- Dintre două numere reale negative, este mai mare cel care are modulul mai mic.
- $AB = |x_B - x_A|$, unde x_A și x_B sunt abscisele punctelor A și B pe axa numerelor.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:
a) Dacă $a \in \mathbb{R}$ și $a > 0$, atunci $|a| = \ldots$.
b) Dacă $b = 0$, atunci $|b| = \ldots$.
c) Dacă $c \in \mathbb{R}$ și $c < 0$, atunci $|c| = \ldots$.

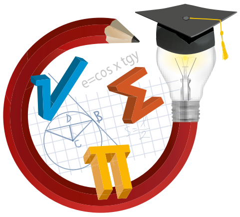
2 Calculați modulul numărului x și completați căsuțele libere din tabel.

x	5	2,8	$-\frac{7}{2}$	$\sqrt{10}$	$-\sqrt{16}$	$(-2)^3$	0
$-x$							
$\|x\|$							

3 Efectuați calculele:
a) $(|-0{,}1| + |0{,}2| - |-0{,}3|) : |-2019|$;
b) $\left|-2^3\right| + \left|(-3)^2\right| - \left|\sqrt{|-2 \cdot 3| \cdot |-3 \cdot (-2)|}\right|$.

4 Exprimați cu ajutorul modulului:
a) $x \in \{-5, 5\}$;
b) $-8 < x < 8$;
c) $-3 \leq x - 2 \leq -1$.

5 Determinați numărul real y pentru fiecare din situațiile:
a) $|y| = 4{,}5$ și $y > 0$;
b) $|y| = \sqrt{3}$ și $y < 0$;
c) $\left|y\sqrt{2}\right| = 0$
d) $|7y| = |y|$.



6 Determinați numărul elementelor mulțimii $M = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \left|x^3\right| < 1234\right\}$.

7 a) Pentru $x > 0$, calculați:
$E_1 = |x| + |-3\,| + |x + 27:3| - |2x|$;
b) Pentru $x < 0$, calculați:
$E_2 = |x| + |x - 1| - |2x - 2|$;
c) Pentru $x > 0$, calculați:
$E = |x| + |-3| + 4x - 1 - |2x|$

8 Completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:
a) Dacă $x \in \mathbb{N}$ și $|x| < \sqrt{5}$, atunci $x \in \{\ldots\}$.
b) Dacă $x \in \mathbb{Z}_-$ și $|x| < \sqrt{7}$, atunci $x \in \{\ldots\}$.
c) Dacă $x \in \mathbb{Z}^*$ și $\left|\frac{x}{3}\right| \leq 0,(3)$, atunci $x \in \{\ldots\}$.

9 Determinați elementele mulțimilor:

$$A = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \sqrt{(-3)^2} < x < |-5|\right\},$$

$$B = \left\{y \in \mathbb{Z} \,\middle|\, 2 \leq \sqrt{y^2} \leq 2^2\right\},$$

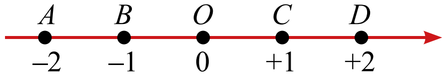
$$C = \left\{z \in \mathbb{R} \,\middle|\, \left|z + \frac{2}{5}\right| = \frac{3}{5}\right\},$$

$$D = \left\{t \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{7}{|t-1|} = 1\right\}.$$

Evaluare sumativă

Se acordă 10 puncte din oficiu.

I. *La cerințele următoare, alegeți litera care indică răspunsul corect; doar un răspuns este corect.*

5p	**1.** Rădăcina pătrată a numărului 8, cu aproximație de o zecime prin lipsă, este: A. 2,6 B. 2,7 C. 2,8 D. 2,9
5p	**2.** Rădăcina pătrată a numărului 10, cu aproximație de o sutime prin adaos, este: A. 3,17 B. 3,16 C. 3,18 D. 3,00
	3. Reprezentați pe axa numerelor (figura alăturată), punctele $M\left(-\sqrt{2}\right)$ și $P\left(\sqrt{3}\right)$, apoi rezolvați cerințele 3.1 și 3.2 
5p	**3.1.** Punctul M aparține segmentului: A. AB B. BO C. OC D. CD
5p	**3.2.** Punctul P aparține segmentului: A. AB B. BO C. OC D. CD
5p	**4.** Ordinea crescătoare a numerelor $a=\frac{\sqrt{3}}{2}, b=\frac{\sqrt{5}}{3}, c=\frac{\sqrt{7}}{4}$ este: A. a, b, c B. c, b, a C. b, a, c D. a, c, b
5p	**5.** Ordinea descrescătoare a numerelor $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}, y=-\frac{1}{\sqrt{3}}, z=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ este: A. x, z, y B. y, z, x C. z, y, x D. z, x, y
5p	**6.** Dacă $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ și $5<x<7$, atunci x poate fi: A. 6 B. $\sqrt{6}$ C. 36 D. $\sqrt{38}$
5p	**7.** Dacă $y \in \mathbb{Z}$ și $\sqrt{12}<y<\sqrt{22}$, atunci y poate fi: A. 20 B. 13 C. 5 D. 4

II. *Completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:*

5p	**a)** Dacă $\sqrt{x^2}=-x$, atunci x este un număr … .
5p	**b)** Dacă $\sqrt{y^6}=y^3$, atunci y este un număr … .

III. *La problemele următoare se cer rezolvări complete.*

15p	**1.** Se consideră numerele $a=\sqrt{(-2)^2}, b=\sqrt{(-3)^4}$ și $c=\sqrt{(-5)^6}$. Determinați numărul $a:\lvert -2^0\rvert + b:\lvert -3^1\rvert + c:\lvert -5^2\rvert$.
	2. Rezolvați următoarele cerințe:
5p	**a)** Stabiliți care dintre numerele 3 și $\sqrt{10}$ este mai mare.
5p	**b)** Stabiliți care dintre numerele 2 și $\sqrt{6}$ este mai mic.
10p	**c)** Fie numerele $a=\lvert 3-\sqrt{10}\rvert+\left(\sqrt{10}-3\right)$ și $b=\sqrt{\left(3-\sqrt{6}\right)^2}+\sqrt{\left(2-\sqrt{6}\right)^2}$. Arătați că $0<b-a<1$.

1.5 Operații cu numere reale. Raționalizarea numitorilor de forma $a\sqrt{b}$

L1 Adunarea, scăderea, înmulțirea și împărțirea numerelor reale

Știm deja că mulțimea numerelor reale este reuniunea dintre mulțimea numerelor raționale și mulțimea numerelor iraționale, ceea ce ne determină ca în studiul operațiilor pe mulțimea numerelor reale să ne bazăm pe ceea ce cunoaștem despre operațiile definite pe mulțimea numerelor raționale.

Ne amintim

Adunarea numerelor (naturale, întregi, raționale) este operația care face ca oricăror două numere (naturale, întregi, raționale) a și b, numite *termeni*, să le corespundă numărul (natural, întreg, rațional) $a + b$, numit *sumă*.

Înmulțirea numerelor (naturale, întregi, raționale) este operația care face ca oricăror două numere (naturale, întregi, raționale), numite **factori**, să le corespundă numărul (natural, întreg, rațional) $a \cdot b$, numit produs.

$$\underbrace{9 + 2}_{\text{termeni}} = \underbrace{11}_{\text{sumă}}$$

$$\underbrace{9 \cdot 2}_{\text{factori}} = \underbrace{18}_{\text{produs}}$$

Dacă a și b sunt două *numere raționale*, atunci **a scădea** numărul b din numărul a înseamnă a aduna numărul a cu opusul numărului b, adică $a - b = a + (-b)$.

Dacă a și b sunt două *numere raționale*, $b \neq 0$, atunci **a împărți** numărul a la numărul b înseamnă a înmulți numărul a cu inversul numărului b, adică $a : b = a \cdot \frac{1}{b}$.

Dacă a, b, $\in \mathbb{Q}$, atunci $a + b \in \mathbb{Q}$, $a \cdot b \in \mathbb{Q}$, $a - b \in \mathbb{Q}$.

Dacă a, b, $\in \mathbb{Q}$ și $b \neq 0$, atunci $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$.

Exemplu

Pentru $a = \frac{7}{2}$, $b = \frac{3}{5}$, obținem:

$$a + b = \frac{41}{10},\ a - b = \frac{29}{10},\ a \cdot b = \frac{21}{10},\ a : b = \frac{35}{6}$$

și toate sunt numere raționale.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Vom descoperi aspectele specifice operațiilor cu numere reale, pornind de la următoarele întrebări:

1) Ce fel de număr vom obține dacă adunăm sau înmulțim un număr rațional cu un numar irațional?

2) Ce fel de număr vom obține dacă adunăm sau înmulțim două numere iraționale?

Să găsim răspunsurile (unele dintre ele s-au conturat prin exemple oferite de lecțiile anterioare) și să și demonstrăm câteva.

1) Prima întrebare își găsește răspunsul în următoarele secvențe:

a) Dacă $q \in \mathbb{Q}$ este număr rațional și $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $q + \sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Demonstrație: Presupunem, prin reducere la absurd, că $q + \sqrt{x} = r \in \mathbb{Q}$, atunci, $\sqrt{x} = r - q \in \mathbb{Q}$, contradicție cu $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Presupunerea a fost falsă, deci $q + \sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exemple: Numerele $2 + \sqrt{7}$; $3 - \sqrt{5}$ sunt iraționale, deoarece:

$$2 \in \mathbb{Q}, \sqrt{7} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow 2 + \sqrt{7} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q};$$

$$3 \in \mathbb{Q}, -\sqrt{5} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow 3 + \left(-\sqrt{5}\right) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

b) Dacă $q \in \mathbb{Q}^*$ este număr rațional și $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $q \cdot \sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Demonstrație: Presupunem, prin reducere la absurd, că

$q \cdot \sqrt{x} = r \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{x} = \dfrac{r}{q} \in \mathbb{Q}$, contradicție cu $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Deci $q \cdot \sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, pentru orice $q \in \mathbb{Q}^*$ și $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exemple: Numerele $2\sqrt{7}$; $-3\sqrt{5}$; $-\dfrac{2}{7}\sqrt{12}$ sunt numere iraționale deoarece:

$2 \in \mathbb{Q}^*$, $\sqrt{7} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow 2 \cdot \sqrt{7} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

$-3 \in \mathbb{Q}^*$, $\sqrt{5} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow -3 \cdot \sqrt{5} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

$-\dfrac{2}{7} \in \mathbb{Q}^*$, $\sqrt{12} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow -\dfrac{2}{7} \cdot \sqrt{12} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Un exemplu foarte util este cel oferit de produsul dintre un număr natural nenul și un număr irațional.
Să observăm că $2\sqrt{5}$ se poate scrie $\sqrt{5} + \sqrt{5}$, apoi $3\sqrt{5} = \sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{5}$. În acest fel, produsul dintre un număr natural $n \in \mathbb{N}^*$ și un **număr irațional** de forma $\sqrt{x}$ este $n\sqrt{x} = \underbrace{\sqrt{x} + \sqrt{x} + \ldots + \sqrt{x}}_{n \text{ termeni}}$.

2) Considerăm două numere $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ și $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Deoarece un număr irațional este un număr a cărui scriere este o fracție zecimală infinită și neperiodică, rezultatul operațiilor cu acestea se definesc ca șiruri de aproximări succesive.

De exemplu, pentru numerele iraționale $\sqrt{3} = 1{,}732\ldots$ și $\sqrt{7} = 2{,}645\ldots$, definim **suma** acestora, $\sqrt{3} + \sqrt{7}$, ca fiind acel **număr** cuprins între *suma aproximărilor prin lipsă și suma aproximărilor prin adaos*, ale celor două numere, la același ordin de mărime.

$$\begin{array}{ccccc}
1 < \sqrt{3} < 2 & & 2 < \sqrt{7} < 3 & & 3 < \sqrt{3} + \sqrt{7} < 5 \\
1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8 & \text{și} & 2{,}6 < \sqrt{7} < 2{,}7 & \text{rezultă} & 4{,}3 < \sqrt{3} + \sqrt{7} < 4{,}5 \\
1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74 & & 2{,}64 < \sqrt{7} < 2{,}65 & & 4{,}37 < \sqrt{3} + \sqrt{7} < 4{,}39 \\
1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733 & & 2{,}645 < \sqrt{7} < 2{,}646 & & 4{,}377 < \sqrt{3} + \sqrt{7} < 4{,}379
\end{array}$$

În mod similar, **produsul** a două numere iraționale este acel **număr** cuprins între *produsul aproximărilor prin lipsă și produsul aproximărilor prin adaos* ale celor două numere, la același ordin de mărime.
Vom folosi scrierea $\sqrt{3} + \sqrt{7}$ pentru valoarea exactă a sumei dintre $\sqrt{3}$ și $\sqrt{7}$, neexistând o scriere mai succintă pentru aceasta, iar pentru valoarea exactă a produsului lor, vom folosi una din formele $\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}$ sau $\sqrt{21}$.
Să vedem acum ce fel de număr (rațional sau irațional) este suma și ce fel de număr este produsul a două numere iraționale.

Analizăm exemplele: Fie $a = 2\sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt{3}$, $d = -\sqrt{2}$, toate iraționale. Obținem $a + b = 3\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ și $b + d = 0 \in \mathbb{Q}$, apoi $a \cdot b = \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4 \in \mathbb{Q}$ și $b \cdot c = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Concluzie:
Dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ și $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, , atunci $a + b$ și $a \cdot b$ pot fi numere raționale sau numere iraționale.

Analizând modul de definire a operațiilor pe mulțimea numerelor reale, deducem că proprietățile acestora se extind de la mulțimea numerelor raționale.

Adunarea este asociativă:
$(a + b) + c = a + (b + c)$, oricare ar fi $a, b, c, \in \mathbb{R}$.

$$\left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right) + \left(-\sqrt{3}\right) = \sqrt{5} + \left[\sqrt{3} + \left(-\sqrt{3}\right)\right]$$

Adunarea este comutativă:
$a + b = b + a$, oricare ar fi $a, b, \in \mathbb{R}$.

$$\left(-\sqrt{2}\right) + 5\sqrt{2} = 5\sqrt{2} + \left(-\sqrt{2}\right)$$

Numărul 0 este element neutru pentru adunare:
$a + 0 = 0 + a = a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

$$0 + \left(1 - \sqrt{3}\right) = \left(1 - \sqrt{3}\right) + 0 = 1 - \sqrt{3}$$

Orice număr $a \in \mathbb{R}$ are un număr *opus*, $-a \in \mathbb{R}$:
$a + (-a) = (-a) + a = 0$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

$$3\sqrt{7}+\left(-3\sqrt{7}\right)=\left(-3\sqrt{7}\right)+3\sqrt{7}=0$$

Înmulțirea este asociativă:
$(a \cdot b) \cdot c = a\,(b \cdot c)$, oricare ar fi $a, b, c, \in \mathbb{R}$.

$$(6{,}17 \cdot 25) \cdot 4 = 6{,}17 \cdot (25 \cdot 4)$$
$$\left(3\cdot\sqrt{7}\right)\cdot\sqrt{7} = 3\cdot\left(\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}\right)$$

Înmulțirea este comutativă:
$a \cdot b = b \cdot a$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\left(1+\sqrt{5}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)=\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(1+\sqrt{5}\right)$$

Numărul 1 este element neutru pentru înmulțire:
$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

$$1\cdot\sqrt{6{,}8}=\sqrt{6{,}8}\cdot 1=\sqrt{6{,}8}$$

Orice număr $a \in \mathbb{R}^*$ are un număr *invers* $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}^*$
$a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1$.

$$3\sqrt{7}\cdot\left(\frac{1}{3\sqrt{7}}\right)=\left(\frac{1}{3\sqrt{7}}\right)\cdot 3\sqrt{7}=1$$

Înmulțirea este distributivă față de adunare:
$a(b + c) = ab + ac$ și $(a + b)c = ac + bc$, oricare ar fi $a, b, c, \in \mathbb{R}$.

$$9\cdot\left(4+\sqrt{2}\right)=9\cdot 4+9\sqrt{2}$$
$$\left(4+\sqrt{3}\right)\sqrt{5}=4\sqrt{5}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$$

Scăderea și împărțirea numerelor reale sunt similare celor din mulțimea numerelor raționale, adică:
1) Pentru orice două numere reale a și b, avem $a - b = a + (-b)$.
2) Pentru orice două numere reale a și b, cu $b \neq 0$, are loc $a : b = a \cdot b^{-1}$ sau $\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}$.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Dacă $a, b \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{x} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ și $a+b\sqrt{x}=0$, atunci $a = 0$ și $b = 0$.

Demonstrație: Dacă ar fi $b \neq 0$, din $a+b\sqrt{x}=0 \Rightarrow b\sqrt{x}=-a \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{x}=-\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$ fals pentru că $\sqrt{x}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Deci $b = 0$.
Cum $a+b\sqrt{x}=0$, obținem $a = 0$.

Dacă $a, b \in \mathbb{Q}$ și
$2a-3+(b-8)\sqrt{5}=0$,
atunci $2a - 3 = 0$ și $b - 8 = 0$.
Deci $a = 1{,}5$ și $b = 8$.

Consecință: Dacă $a, b, a', b' \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{x}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ și $a+b\sqrt{x}=a'+b'\sqrt{x}$, atunci $a = a'$ și $b = b'$.

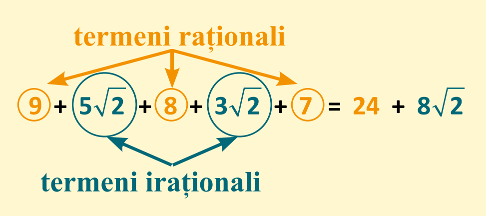
Demonstrație: $a+b\sqrt{x}=a'+b'\sqrt{x} \Rightarrow (a-a')+(b-b')\sqrt{x}=0$
$\Rightarrow a - a' = 0$ și $b - b' = 0$, deci $a = a'$ și $b = b'$.

Dacă $a, b \in \mathbb{Q}$ și
$17-b\sqrt{3}=a+4\sqrt{3}$,
atunci $a = 17$ și $b = -4$.

Tehnici de calcul în mulțimea numerelor reale

Adunarea și scăderea numerelor de forma $a+b\sqrt{x}$, cu $x > 0$.

Adunarea numerelor reale este asociativă și comutativă. Aceste proprietăți ne permit schimbarea ordinii termenilor și gruparea lor în mod convenabil.



Scăderea a două numere este interpretată ca adunarea dintre primul număr și opusul celui de-al doilea. Astfel, gruparea termenilor în mod convenabil poate fi făcută și în cazul scăderilor. (Trebuie doar să fim atenți la semnul fiecărui termen.)

Adunarea și scăderea termenilor asemenea:

$a\sqrt{x}+b\sqrt{x}=(a+b)\sqrt{x}$ și $a\sqrt{x}-b\sqrt{x}=(a-b)\sqrt{x}$, $x>0$.

Doi termeni care sunt numere raționale sunt termeni asemenea.

Doi termeni care pot fi scriși sub forma $a\sqrt{x}$ și $b\sqrt{x}$, $a, b \in \mathbb{Q}$ și $\sqrt{x} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, sunt termeni asemenea.

$7\sqrt{3}+8\sqrt{3}=15\sqrt{3}$ și $7\sqrt{3}-5\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

29 și 11 sunt termeni asemenea

$5\sqrt{2}$ și $3\sqrt{2}$ sunt termeni asemenea

29 și $5\sqrt{2}$ *nu* sunt termeni asemenea

$\sqrt{7}$ și $\sqrt{5}$ *nu* sunt termeni asemenea

Pentru termenii care nu sunt asemenea, se poate doar aproxima rezultatul adunării și rezultatul scăderii. $\sqrt{3}+\sqrt{7}$ nu se poate restrânge la o expresie de forma $a\sqrt{x}$, dar se poate aproxima $\sqrt{3}+\sqrt{7}\approx 1,73+2,64=4,37$.

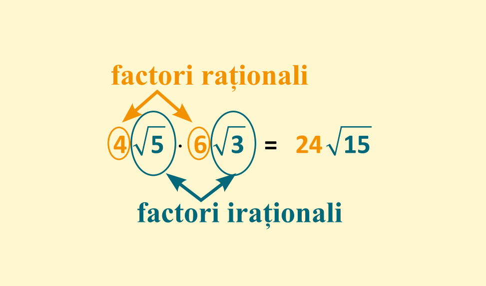
Înmulțirea și împărțirea numerelor de forma $a\sqrt{x}$

Dacă $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $x \geq 0$ și $y > 0$, atunci:

$a\sqrt{x}\cdot b\sqrt{y}=ab\sqrt{xy}$ și $\dfrac{a\sqrt{x}}{b\sqrt{y}}=\dfrac{a}{b}\sqrt{\dfrac{x}{y}}$;

Exemple:

$6\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{2}=18\sqrt{10}$; $\dfrac{6\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}=\dfrac{6}{3}\sqrt{\dfrac{5}{2}}=2\sqrt{2,5}$



Reținem!

• Opusul numărului real x este $-x$.	$x+(-x)=(-x)+x=0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
• Inversul numărului real nenul x este $\dfrac{1}{x}$.	$x\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x}\cdot x=1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}^*$.
• Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, $x-y=x+(-y)$.	Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$, $x:y=x\cdot\dfrac{1}{y}$
• Metoda factorului comun (consecință a distributivității înmulțirii față de adunare):	$ab+ac=a(b+c)$ și $ab-ac=a(b-c)$, oricare ar fi $a, b, c, \in \mathbb{R}$
• Semnul minus în fața unei paranteze schimbă semnele fiecărui termen din paranteză (echivalează cu înmulțirea numărului -1 cu suma scrisă în paranteză, folosind distributivitatea).	$-(a-b+c)=-a+b-c$, oricare ar fi $a, b, c, \in \mathbb{R}$
• Produsul a două numere reale cu *același semn* este un *număr pozitiv.*	Dacă $x, y, \in \mathbb{R}^*$, atunci $(-x)\cdot(-y)=x\cdot y$ și $x\cdot(-y)=(-x)\cdot y=-x$;
• Produsul a două numere reale cu *semne contrare* este un *număr negativ*.	$-\dfrac{x}{y}=\dfrac{-x}{y}=\dfrac{x}{-y}$ și $\dfrac{-x}{-y}=\dfrac{x}{y}$.
• Dacă $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ și $x \geq 0$, atunci $a\sqrt{x}+b\sqrt{x}=(a+b)\sqrt{x}$ și $a\sqrt{x}-b\sqrt{x}=(a-b)\sqrt{x}$	Dacă $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ și $x \geq 0$ și $y > 0$, atunci $a\sqrt{x}\cdot b\sqrt{y}=ab\sqrt{xy}$ și $\dfrac{a\sqrt{x}}{b\sqrt{y}}=\dfrac{a}{b}\sqrt{\dfrac{x}{y}}$.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Efectuați calculele:

a) $-1{,}2 + 3{,}6$; c) $-\frac{1}{4}+2\frac{1}{8}$;

b) $-4{,}3 -(-2{,}95)$; d) $-\frac{7}{3}-\left(-2{,}(3)\right)$.

2 Efectuați calculele:

a) $\sqrt{2}+\sqrt{2}$; g) $\sqrt{6}+2\sqrt{6}+3\sqrt{6}$;

b) $2\sqrt{5}+3\sqrt{5}$; h) $4\sqrt{10}-3\sqrt{10}-3\sqrt{10}$;

c) $\sqrt{3}+\left(-\sqrt{3}\right)$; i) $4\sqrt{2}+\left(-3\sqrt{2}\right)+\left(-5\sqrt{2}\right)$;

d) $\sqrt{5}-\sqrt{5}$; j) $2\sqrt{3}-\left(-3\sqrt{3}\right)-\left(-4\sqrt{3}\right)$;

e) $7\sqrt{7}-2\sqrt{7}$; k) $8\sqrt{5}-\sqrt{5}-\sqrt{5}$.

f) $\sqrt{6}-3\sqrt{6}$;

3 Efectuați calculele, apoi aproximați rezultatul cu două zecimale exacte:

a) $5\sqrt{2}+7\sqrt{2}-10\sqrt{2}+3\sqrt{2}-4\sqrt{2}$;

b) $9\sqrt{3}-7\sqrt{3}+5\sqrt{3}-\sqrt{3}-7\sqrt{3}$;

c) $4\sqrt{5}+\left(6\sqrt{5}-11\sqrt{5}\right)$;

d) $-10\sqrt{7}-\left(19\sqrt{7}-6\sqrt{7}-22\sqrt{7}\right)$.

4 Calculați $x + y$ și $x - y$, pentru fiecare din situațiile:

a) $x=3\sqrt{5}+2\sqrt{2}$, $y=8\sqrt{2}-5\sqrt{5}$;

b) $x=7\sqrt{3}-8\sqrt{6}$, $y=3\sqrt{3}+7\sqrt{6}$;

c) $x=2\sqrt{2}+3\sqrt{3}-5\sqrt{5}$, $y=4\sqrt{5}-3\sqrt{3}+2\sqrt{2}$.

5 Stabiliți dacă rezultatul sumei $x + y + z$ este un număr rațional:

a) $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $y=-2\sqrt{3}+8\sqrt{2}$,
$z=-9\sqrt{2}+\sqrt{3}$;

b) $x=2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+5\sqrt{5}$, $y=6\sqrt{3}-7\sqrt{5}-8\sqrt{2}$,
$z=2\sqrt{5}-3\sqrt{3}+6\sqrt{2}$.

6 Efectuați calculele:

a) $1+\left(2+\sqrt{3}\right)$; c) $7+\left(\sqrt{5}-7\right)$;

b) $4-\left(3+\sqrt{2}\right)$; d) $3^2-\left(\sqrt{11}+9\right)$;

e) $1+\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\left(-3\sqrt{2}\right)+\left(-4\sqrt{3}\right)$;

f) $\left(3\sqrt{5}-5\right)+7+\left(-2\sqrt{5}-6\right)+\sqrt{5}+4$.

7 Știind că $x=1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}$, $y=4\sqrt{2}-5\sqrt{3}+6$, $z=2\sqrt{3}-6\sqrt{2}-21$, arătați că suma $x + y + z$ este un număr întreg.

8 Calculați lungimea segmentului AB, știind că abscisele punctelor sunt $x_A=-\sqrt{2}+1$ și $x_B=\sqrt{2}+1$.
Reprezentați segmentul pe axa numerelor.

9 Scoateți factorii de sub radicali, apoi efectuați calculele:

a) $\sqrt{2}+\sqrt{8}$;

b) $\sqrt{3}+\sqrt{12}$;

c) $\sqrt{5}-\sqrt{20}$;

d) $3\sqrt{2}+\sqrt{18}-\sqrt{32}$;

e) $7\sqrt{3}+\sqrt{27}-\sqrt{48}$;

f) $\sqrt{28}+\sqrt{63}-\sqrt{175}$.

10 Calculați $x + y$ și $x - y$, pentru numerele:

a) $x=\sqrt{8}-\sqrt{50}+\sqrt{27}$ și
$y=\sqrt{48}+\sqrt{98}-\sqrt{200}$;

b) $x=\sqrt{49}-3\sqrt{20}+\sqrt{28}$ și
$y=\sqrt{180}-\sqrt{112}+\sqrt{64}$.

11 a) Calculați lungimile segmentelor AB, BC, CD știind că sunt situate pe axa numerelor și au coordonatele:
$A\left(\sqrt{2}\right)$, $B\left(\sqrt{3}\right)$, $C\left(\sqrt{8}\right)$, $D\left(2\sqrt{3}\right)$;

b) Completați unul din simbolurile <, =, >, astfel încât relația obținută să fie adevărată:
$AB + BC + CD$ ... 2.

12 Efectuați înmulțirile:

a) $5 \cdot 0{,}44$; d) $\frac{5}{3}\cdot\left(-6\sqrt{2}\right)$;

b) $-\frac{7}{3}\cdot\left(-1\frac{2}{7}\right)$; e) $\frac{\sqrt{3}}{9}\cdot\left(-\frac{27}{2}\right)$;

c) $-9 \cdot 1{,}(3)$; f) $\left(4^2-16\right)\cdot 3\sqrt{3}$.

13 Efectuați înmulțirile:

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$; d) $-\sqrt{5}\cdot\sqrt{11}$;

b) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$; e) $\left(-\sqrt{13}\right)\cdot\left(-\sqrt{2}\right)$;

c) $\sqrt{5}\cdot\left(-\sqrt{7}\right)$; f) $-\sqrt{2}\cdot\left(-\sqrt{3}\right)\cdot\left(-\sqrt{5}\right)$.

14 Efectuați înmulțirile și stabiliți dacă produsul este un număr rațional sau un număr irațional:

a) $2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$;

b) $\left(-3\sqrt{3}\right)\cdot\left(5\sqrt{5}\right)$;

c) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$;

d) $6\sqrt{3}\cdot\left(-2\sqrt{3}\right)$;

e) $\left(-7\sqrt{2}\right)\cdot\left(-2\sqrt{5}\right)$;

f) $\left(0,3\sqrt{3}\right)\cdot\left(10\sqrt{10}\right)$;

g) $\frac{1}{2}\sqrt{7}\cdot\left(-\frac{4}{3}\sqrt{5}\right)$;

h) $-\frac{1}{3}\sqrt{3}\cdot\left(-6\sqrt{2}\right)$;

i) $\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{5}{\sqrt{3}}$;

j) $\frac{\sqrt{2}}{10}\cdot\frac{5}{3\sqrt{2}}$;

k) $\frac{\sqrt{3}}{10}\cdot\left(-\frac{20}{2\sqrt{3}}\right)$;

l) $\frac{\sqrt{5}}{25}\cdot\frac{5}{2\sqrt{5}}$.

15 Calculați produsul $x\cdot y$ pentru:

a) $x=3\sqrt{2}+4\sqrt{2}$ și $y=16\sqrt{3}-11\sqrt{3}$;

b) $x=-8\sqrt{2}+\sqrt{50}$ și $y=\sqrt{32}+\sqrt{8}$;

c) $x=\sqrt{63}-3\sqrt{28}$ și $y=\sqrt{20}-2\sqrt{45}$.

16 Demonstrați că numărul $A=1,(2)\cdot\sqrt{24}\cdot\left(-1,2\cdot\sqrt{12}\right)\cdot\left(-\frac{10}{11}\cdot\sqrt{8}\right)$ este cubul unui număr rațional.

17 Arătați că $B=\sqrt{2^{50}+2^{50}}\cdot\frac{\sqrt{8}}{512^{3}}$ este număr natural.

18 Calculați, folosind distributivitatea înmulțirii față de adunare și scădere:

a) $2\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$;

b) $3\cdot\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$;

c) $\sqrt{2}\cdot\left(5+\sqrt{2}\right)$;

d) $\frac{8\sqrt{5}}{3}\cdot\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}-\frac{9\sqrt{2}}{4}\right)$;

e) $\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5})+\sqrt{3}(\sqrt{5}-\sqrt{2})+\sqrt{5}(\sqrt{2}-\sqrt{3})$;

f) $\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)$;

g) $2\sqrt{3}\cdot\left(3\sqrt{2}+4\sqrt{3}\right)$;

h) $-5\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{6}-\sqrt{8}\right)$.

19 Efectuați calculele:

a) 6,(3) : (–38)

b) $-1\frac{3}{4}:\left(-4\frac{2}{3}\right)$;

c) $4\sqrt{2}:2$;

d) $20\sqrt{3}:(-4)$;

e) $-0,5\sqrt{5}:5$.

20 Efectuați calculele:

a) $\sqrt{50}:\sqrt{5}$;

b) $\sqrt{15}:\left(-\sqrt{3}\right)$;

c) $-\sqrt{35}:\left(-\sqrt{7}\right)$;

d) $4\sqrt{21}:\sqrt{7}$;

e) $\left(-9\sqrt{14}\right):\sqrt{2}$;

f) $\left(16\sqrt{42}\right):\left(-8\sqrt{7}\right)$.

21 Calculați aria unui pătrat al cărui perimetru este $\sqrt{512}$ cm.

22 Determinați numerele naturale de două cifre, $\overline{ab}$, cu proprietatea $\sqrt{a}=\frac{b}{4}$.

23 Calculați *x* : *y*, știind că:

a) $x=7\sqrt{10}-25\sqrt{10}$ și $y=3\sqrt{2}-12\sqrt{2}$;

b) $x=4\sqrt{60}-\sqrt{135}$ și $y=-\sqrt{375}$;

c) $x=\sqrt{24}-\frac{\sqrt{54}}{2}+\frac{\sqrt{150}}{4}$ și $y=-\frac{\sqrt{63}}{\sqrt{16}}$.

24 Comparați numerele:

$a=\left(\sqrt{32}+\sqrt{128}+\sqrt{288}\right):4$ și

$b=\sqrt{32}:4+\sqrt{128}:4+\sqrt{288}:4$.

25 Efectuați calculele:

a) $\left(20\sqrt{2}-30\sqrt{3}\right):10$;

b) $\left(14\sqrt{2}+21\sqrt{8}\right):\left(-7\sqrt{2}\right)$;

c) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{2^{3}}+\sqrt{2^{5}}+\sqrt{2^{7}}+\sqrt{2^{9}}\right):\sqrt{2}$;

d) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{3^{3}}+\sqrt{3^{5}}-\sqrt{3^{7}}\right):\left(-\sqrt{3}\right)$;

e) $\sqrt{6^{10}+6^{10}+6^{11}}:\sqrt{3^{10}+3^{10}+3^{11}+3^{11}}$.

26 a) Urmăriți modelul următor și identificați proprietățile operațiilor de adunare și de înmulțire folosite:

$$\left(5+2\sqrt{3}\right)\left(4+7\sqrt{2}\right)=\left(5+2\sqrt{3}\right)\cdot4+\left(5+2\sqrt{3}\right)\cdot\left(7\sqrt{2}\right)=5\cdot4+\left(2\sqrt{3}\right)\cdot4+5\cdot\left(7\sqrt{2}\right)+\left(2\sqrt{3}\right)\cdot\left(7\sqrt{2}\right)=$$

$$=20+8\sqrt{3}+35\sqrt{2}+14\sqrt{6}.$$

b) Folosind distributivitatea înmulțirii față de adunare și față de scădere, urmând modelul de la subpunctul anterior, calculați produsul $x\cdot y$, pentru $x=5+2\sqrt{6}$ și $y=5-2\sqrt{6}$.

c) Folosind rezultatul obținut la subpunctul b), scrieți inversul numărului *x* și inversul numărului *y*.

L2 Ridicarea la putere a numerelor reale

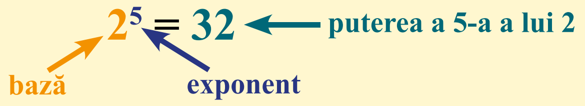
Pentru orice număr rațional nenul, s-a definit puterea cu exponent întreg și s-au precizat, iar apoi s-au aplicat, proprietățile acestora (regulile de calcul cu puteri). Pentru numărul 0, s-au definit puteri cu exponent natural, nenul. Observăm că operația de înmulțire a numerelor reale are aceleași proprietăți ca și operația de înmulțire a numerelor raționale.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Definiție: Pentru $n \in \mathbb{N}$ și $a \in \mathbb{R}^*$, se numește **puterea** a n-a a numărului a, numărul real $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}$. Numărul a se numește **baza puterii**, iar numărul n este **exponentul puterii**.

Dacă $a = 0$, atunci $0^n = 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Scrierea 0^0 **nu are sens**.



Dacă $a \in \mathbb{R}^*$, atunci $\frac{1}{a} \overset{not}{=} a^{-1}$ și obținem $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Regulile de calcul cu puteri, cu exponent întreg, învățate la numere raționale, se păstrează și pe mulțimea numerelor reale.

$x^1 = x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $\sqrt{7}^1 = \sqrt{7}$; $\left(-\sqrt{2}\right)^1 = -\sqrt{2}$; $\left(4-\sqrt{5}\right)^1 = 4-\sqrt{5}$

$x^0 = 1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$ $\qquad$ $\sqrt{17}^0 = 1$; $\left(3-2\sqrt{5}\right)^0 = 1$; $\left(-\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^0 = 1$

$0^n = 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ $\qquad$ $0^2 = 0$; $0^{2019} = 0$

Pentru $a, b \in \mathbb{R}^*$ și $n, p \in \mathbb{Z}$, au loc: $a^n \cdot a^p = a^{n+p}$ $\qquad$ $(a^n)^p = a^{n \cdot p}$ $\qquad$ $a^n : a^p = a^{n-p}$ sau $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ $\qquad$ $a^n : b^n = (a : b)^n$ sau $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Modul de aplicare a acestor reguli, în situația în care $a, b \in \mathbb{R}^*$, va fi prezentat parțial în această lecție, urmând să fie completat în anii următori.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Se consideră $x \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}$, iar x și n nu sunt simultan nule.

$\sqrt{x}^2 = x$, oricare ar fi $x \geq 0$ $\qquad$ $\left(\sqrt{17}\right)^2 = 17$, $\left(\sqrt{2+8\sqrt{3}}\right)^2 = 2+8\sqrt{3}$

$\left(\sqrt{x}\right)^n = \sqrt{x^n}$, oricare ar fi $x \geq 0$ $\qquad$ $\left(\sqrt{3}\right)^{11} = \sqrt{3^{11}}$; $\sqrt{7^2} = \left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$

$\sqrt{x^n} = \sqrt{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \ldots \cdot \sqrt{x} = \left(\sqrt{x}\right)^n$ $\qquad$ $\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2 = \sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)^2} = \left|3-\sqrt{5}\right| = 3-\sqrt{5}$

Dacă $n = 2k$ (număr par), atunci
$\left(\sqrt{x}\right)^n = \left(\sqrt{x}\right)^{2k} = \sqrt{x^{2k}} = x^k$, oricare ar fi $x \geq 0$ $\qquad$ $\left(\sqrt{3}\right)^8 = 3^4$; $\left(\sqrt{0,2}\right)^6 = 0,2^3$

Dacă $n = 2k+1$ (număr impar), atunci
$\left(\sqrt{x}\right)^n = \left(\sqrt{x}\right)^{2k+1} = \sqrt{x^{2k+1}} = x^k\sqrt{x}$, oricare ar fi $x \geq 0$ $\qquad$ $\left(\sqrt{5}\right)^9 = \left(\sqrt{5}\right)^8 \cdot \sqrt{5} = 5^4\sqrt{5} = 625\sqrt{5}$

$(a\sqrt{x})^n = a^n(\sqrt{x})^n$, oricare ar fi $x \ge 0$ și $a \in \mathbb{R}$

$$(3\sqrt{2})^4 = 3^4\sqrt{2}^4 = 3^4\cdot 2^2 = 81\cdot 4 = 324;$$

$$(2\sqrt{5})^5 = 2^5\sqrt{5}^5 = 32\cdot 5^2\sqrt{5} = 800\sqrt{5}.$$

Dacă $n = 2k$ (număr par), atunci $(-x)^n = x^n$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}^*$

$$(-\sqrt{3})^{28} = \sqrt{3}^{28}$$

Dacă $n = 2k + 1$ (număr impar), atunci $(-x)^n = -x^n$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}^*$

$$(-\sqrt{6})^{75} = -\sqrt{6}^{75}$$

Se consideră $x \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}$.

$$x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$(\sqrt{5})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}},\ (-8)^{-1} = \frac{1}{-8}$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$(5\sqrt{3})^{-2} = \frac{1}{(5\sqrt{3})^2} = \frac{1}{75}$$

Reținem!

$(\sqrt{x})^2 = x$, oricare ar fi $x \ge 0$.

$(\sqrt{x})^n = \sqrt{x^n}$, oricare ar fi $x \ge 0$.

$x^{-1} = \frac{1}{x}$, oricare ar fi x, număr real nenul.

Dacă $n = 2k$ (număr par), atunci $(-x)^n = x^n$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}^*$.

Dacă $n = 2k + 1$ (număr impar), atunci $(-x)^n = -x^n$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}^*$.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:

a) Dacă $x \in \mathbb{Q}$ și $n \in \mathbb{N}$, atunci $x^n \in \ldots$;

b) Dacă $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ și $n \in \mathbb{N}$, atunci $x^n \in \ldots$ sau $x^n \in \ldots$

c) Dacă $x = a\sqrt{b}$, $b \ge 0$ și $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $x^n = \ldots$

d) Dacă $a \ge 0$ și $x = \sqrt{a}$, atunci $x^2 = \ldots$

e) Pentru fiecare din propozițiile a) – d), probați corectitudinea răspunsului dat, prin câte un exemplu.

2 Calculați:

a) 13^2; c) $\left(\frac{7}{3}\right)^2$; e) $(-4{,}63)^1$;

b) $(-2)^4$; d) $(-2)^3$; f) $\left[1+\frac{7}{2}+5,(7)\right]^0$.

3 Calculați:

a) $(\sqrt{7})^2$; d) $(\sqrt{3})^5$; g) $-\sqrt{4^2}$;

b) $(-\sqrt{5})^2$; e) $(2\sqrt{3})^2$; h) $(-\sqrt{6})^6$;

c) $(\sqrt{2})^3$; f) $(-3\sqrt{5})^3$; i) $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right)^2$.

4 Calculați x^2, pentru:

a) $x = \sqrt{2} + \sqrt{8}$;

b) $x = 2\sqrt{500} - \sqrt{3}\cdot\sqrt{1500}$;

c) $x = 4\sqrt{20} - 3\sqrt{45}$.

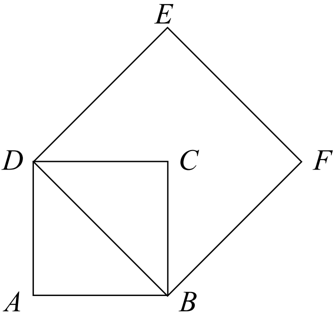
5 Determinați numerele naturale a, b, c, știind că are loc egalitatea:

$$\sqrt{2} + \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^3 + \ldots + \sqrt{2}^9 + \sqrt{2}^{10} = a\cdot(b + \sqrt{c}).$$

6 În desenul de mai jos, sunt reprezentate pătratele $ABCD$ și $BDEF$, iar $AB = 2\sqrt{3}$.

a) Demonstrați, prin calcul, că $\mathcal{A}_{BDEF} = 2\cdot\mathcal{A}_{ABCD}$

b) Refaceți calculele pentru $AB = a$, $a \in \mathbb{R}_+$ și demonstrați că egalitatea are loc pentru orice a, număr real pozitiv.



L3 Raționalizarea numitorilor de forma $a\sqrt{b}$

În aplicații, este necesar ca unele fracții de forma $\frac{x}{a\sqrt{b}}$, unde x este număr real nenul, a și b sunt numere naturale nenule și b nu se divide la niciun pătrat perfect diferit de 1, să fie înlocuite cu alte fracții, echivalente cu acestea, dar care au **numitorul număr rațional**. De asemenea, rezultatele, numere iraționale ale unor calcule, se exprimă, de regulă, **prin fracții cu numitorul rațional**.

Ne amintim

1) Se pot obține fracții echivalente cu o fracție dată prin amplificarea sau prin simplificarea acesteia cu un număr nenul.
2) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}=x$, pentru orice $x\geq 0$. $\qquad \sqrt{7}\cdot\sqrt{7}=7$; $\left(2\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{2}=2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2=2\cdot 2=4$.
3) $\sqrt{x}:\sqrt{x}=1$, pentru orice $x>0$. $\qquad \sqrt{7}:\sqrt{7}=1$; $2\cdot\sqrt{2}:\sqrt{2}=2\cdot\left(\sqrt{2}:\sqrt{2}\right)=2$.

Prin *scoaterea factorilor de sub radical*, numărul $\sqrt{n}$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, va fi scris sub forma $a\sqrt{b}$, unde b este un număr **liber de pătrate**, adică b este un număr natural care nu se divide la niciun pătrat perfect diferit de 1.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Dacă numitorul este de forma $a\sqrt{b}$, cu $a, b\in\mathbb{N}^*$, amplificând fracția cu $\sqrt{b}$, numitorul devine număr natural, deci rațional.

$$\frac{{}^{\sqrt{b})}1}{a\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{b}}{ab},\ a, b\in\mathbb{N}^*$$

Observație: În relația de mai sus, de regulă, se dorește ca b să fie liber de pătrate (adică nu se mai pot scoate factori naturali de sub radical). Această condiție nu este, însă, obligatorie; se folosește doar pentru simplificarea calculelor și pentru frumusețea rezultatelor.

Transformarea unei fracții într-o *fracție echivalentă* cu aceasta, dar care are numitorul un număr rațional, se numește **operația de raționalizare** a numitorului.

$$\frac{{}^{\sqrt{30})}1}{\sqrt{30}}=\frac{\sqrt{30}}{30},\quad \frac{{}^{\sqrt{2})}1}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}.$$

Raționalizarea numitorilor fracțiilor este o operație utilă în efectuarea unor operații, care ne ajută să comparăm și să ordonăm numerele reale reprezentate prin fracții cu numitorii iraționali.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Dacă b este număr liber de pătrate, pentru raționalizarea numitorului fracției $\frac{c}{a\sqrt{b}}$, se amplifică fracția cu $\sqrt{b}$.

$$\frac{{}^{\sqrt{3})}2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3};\quad \frac{{}^{\sqrt{7})}7}{5\sqrt{7}}=\frac{7\sqrt{7}}{5\cdot 7}=\frac{\sqrt{7}}{5}$$

Dacă b nu este număr liber de pătrate, pentru raționalizarea numitorilor, parcurgem următorii pași:

Pasul I – scoatem factorii de sub radical și scriem numitorul în forma $a'\sqrt{b'}$, cu b' liber de pătrate;

$$\frac{1}{5\sqrt{18}}=\frac{1}{5\cdot 3\sqrt{2}}=\frac{1}{15\sqrt{2}};$$

Pasul II – amplificăm fracția cu $\sqrt{b'}$.

$$\frac{{}^{\sqrt{2})}1}{15\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{15\cdot 2}=\frac{\sqrt{2}}{30},\ \text{deci}\ \frac{1}{5\sqrt{18}}=\frac{\sqrt{2}}{30}.$$

Pentru efectuarea unei adunări sau a unei scăderi, de multe ori, este indicată raționalizarea numitorilor fracțiilor înaintea aducerii la același numitor.

$$\frac{{}^{\sqrt{3})}1}{2\sqrt{3}}+\frac{{}^{\sqrt{5})}2}{3\sqrt{5}}=\frac{{}^{5)}\sqrt{3}}{2\cdot 3}+\frac{{}^{3)}\sqrt{5}}{3\cdot 5}=\frac{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{30}$$

Pentru efectuarea unei înmulțiri sau împărțiri, de regulă, este indicată raționalizarea numitorilor după efectuarea operațiilor (unii numitori pot deveni numere raționale).

$$\frac{2}{5\sqrt{15}}\cdot\frac{7}{\sqrt{6}}=\frac{14}{5\sqrt{90}}=\frac{^{\sqrt{10})}14}{5\cdot 3\sqrt{10}}=\frac{14\sqrt{10}}{150}=\frac{7\sqrt{10}}{75}$$

$$\frac{16}{3\cancel{\sqrt{5}}}\cdot\frac{7\cancel{\sqrt{5}}}{12}=\frac{16\cdot 7^{(4}}{3\cdot 12}=\frac{4\cdot 7}{3\cdot 3}=\frac{28}{9}$$

Reținem!

Transformarea unei fracții date, având numitorul irațional, într-o *fracție echivalentă* cu aceasta, dar care are *numitorul un număr rațional*, se numește **operația de raționalizare** a numitorului.

$$\frac{^{\sqrt{b})}1}{a\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{b}}{ab},\ a,b\in\mathbb{N}^*$$

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Amplificați fracțiile astfel încât numitorii obținuți să fie numere raționale.

$$\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{2}{\sqrt{3}},\ \frac{-5}{\sqrt{5}},\ \frac{9}{\sqrt{6}},\ \frac{10}{\sqrt{10}},\ \frac{-24}{\sqrt{30}}.$$

2 Scoateți factorii de sub radicali, simplificați fracțiile, dacă este posibil, apoi raționalizați numitorii.

$$\frac{3}{\sqrt{8}},\ \frac{6}{\sqrt{12}},\ -\frac{8}{\sqrt{20}},\ \frac{2}{\sqrt{24}},\ \frac{16}{\sqrt{32}},\ \frac{4}{\sqrt{28}},\ \frac{2a}{\sqrt{a^2\cdot b}},$$

unde $a > 0$ și $b > 0$.

3 Raționalizați numitorii fracțiilor:

$$\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{3}},\ \frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{2}},\ -\frac{7\sqrt{15}}{\sqrt{20}},\ \frac{8\sqrt{15}}{\sqrt{20}},\ \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{125}},\ \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{63}},\ \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}.$$

4 Scrieți următoarele numere reale sub formă de fracții cu numitorii reprezentați prin numere raționale:

$$\sqrt{3\frac{1}{5}},\ \sqrt{0,8(3)},\ \sqrt{10\frac{2}{3}},\ \sqrt{\frac{81}{24}},\ \sqrt{\frac{27}{2}},\ \sqrt{\sqrt{\frac{400}{121}}},\ \sqrt{\frac{a^2b}{b^3c}},$$

unde $b \neq 0$ și $c > 0$.

5 Raționalizați numitorii, apoi comparați numerele x și y:

a) $x=\frac{4}{\sqrt{2}}$ și $y=\sqrt{10}$;

b) $x=-\frac{12}{\sqrt{3}}$ și $y=-\frac{10}{\sqrt{2}}$;

c) $x=\frac{7}{\sqrt{7}}+\sqrt{28}$ și $y=\frac{24\sqrt{3}}{\sqrt{27}}$.

6 Efectuați calculele și scrieți rezultatul sub formă de fracție cu numitorul rațional:

a) $\frac{7}{2\sqrt{6}}-\frac{4}{3\sqrt{6}}-\frac{2}{\sqrt{6}}$;

b) $\frac{2}{3\sqrt{2}}+\frac{5}{\sqrt{8}}-\left(-\frac{3}{\sqrt{18}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

c) $\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{2}{3\sqrt{5}}+\frac{3}{5\sqrt{5}}$;

d) $\frac{3\sqrt{5}}{5}-\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{3}{2\sqrt{5}}$.

7 Efectuați calculele:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{8}}+\frac{3}{\sqrt{18}}$;

b) $\frac{6}{\sqrt{3}}-\frac{8}{\sqrt{12}}+\frac{9}{\sqrt{27}}$;

c) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{20}}+\frac{1}{\sqrt{45}}-\frac{1}{\sqrt{125}}\right)\cdot\left(2-\frac{1}{38}\right)$;

d) $\left(\sqrt{54}-\frac{6}{\sqrt{6}}\right)\cdot\left(\frac{48}{\sqrt{6}}-\frac{15}{\sqrt{24}}\right)$.

8 Efectuați calculele și demonstrați că numărul $A=\left(\frac{1}{\sqrt{12}}+\frac{3}{\sqrt{48}}-\frac{5}{\sqrt{108}}\right)\cdot\frac{\sqrt{27}}{10}$ este rațional.

9 Determinați numerele naturale nenule a și b pentru care $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{a}}{b}$, $a,b\in\mathbb{N}^*$.

L4 Ordinea efectuării operațiilor

Folosirea corectă a proprietăților operațiilor care intervin în calcule ne oferă posibilitatea utilizării unui algoritm care se referă la ordinea efectuării acestor operații. Corectitudinea rezultatului oricărui calcul cu numere reale (așa cum știm și de la celelalte mulțimi de numere) depinde fundamental de respectarea cu strictețe a acestui algoritm.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

A. Dacă exercițiul nu conține paranteze, atunci:

1) se efectuează ridicările la putere și extragerea rădăcinii pătrate, dacă este posibil;
2) se efectuează înmulțirile și împărțirile, în ordinea în care apar;
3) se efectuează adunările și scăderile, în ordinea în care apar.

Observații: a) Operațiile cu puteri, scoaterea factorilor de sub radical și introducerea factorilor sub radical se pot efectua în etapa pregătitoare, *înainte* de pasul 1) sau *pe parcursul rezolvării*, atunci când dorim să optimizăm modul de calcul, scrierea unor numere într-o anumită formă ducând la simplificarea calculelor.

b) Raționalizarea numitorilor unor fracții se efectuează în orice etapă a rezolvării, dacă este necesară.

În cazul în care raționalizarea nu creează o situație avantajoasă, va fi folosită doar în final, pentru eleganța prezentării rezultatului.

B. Dacă exercițiul conține și paranteze, atunci:

1) se efectuează calculele din parantezele rotunde, respectând ordinea descrisă la A;
2) se transformă parantezele pătrate în paranteze rotunde, acoladele se transformă în paranteze pătrate;
3) se efectuează calculele din noile paranteze rotunde, respectând ordinea descrisă la A.

Se continuă, în acest mod, până se elimină toate parantezele, apoi se efectuează calculele fără paranteze.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Exemplul 1. Calculați: $4\cdot(-0{,}5)^3+\sqrt{22}^2:11-9:\left(-\sqrt{6}\right)^4$

Pasul 1: $4\cdot(-0{,}5)^3+\sqrt{22}^2:11-9:\left(-\sqrt{6}\right)^4=$ $=4\cdot(-0{,}125)+22:11-9:36=$	Se efectuează ridicările la putere: $(-0{,}5)^3=-0{,}125$; $\sqrt{22}^2=22$ și $\left(-\sqrt{6}\right)^4=36$
Pasul 2: $=4\cdot(-0{,}125)+22:11-9:36=$ $=-0{,}5+2-0{,}25=$	Se efectuează înmulțirile și împărțirile, în ordinea în care apar: $4\cdot(-0{,}125)=-0{,}5$; $22:11=2$ și $9:36=0{,}25$
Pasul 3: $=1{,}5-0{,}25=1{,}25$	Se efectuează adunările și scăderile, în ordinea în care apar.

Exemplul 2. Calculați valoarea expresiei:

$E=5\sqrt{12}+42:\sqrt{196}-2\sqrt{15}:\sqrt{20}+\sqrt{25}$	1) Extragem rădăcina pătrată din pătratele perfecte: $\sqrt{196}=14$ și $\sqrt{25}=5$. Scoatem factorul de sub radical: $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$. Introducem factorul sub radical: $2\sqrt{15}=\sqrt{60}$.
$E=5\cdot2\sqrt{3}+42:14-\sqrt{60}:\sqrt{20}+5$	2) Efectuăm înmulțirile și împărțirile: $5\cdot2\sqrt{3}=10\sqrt{3}$; $42:14=3$; $\sqrt{60}:\sqrt{20}=\sqrt{3}$

$E = 10\sqrt{3} + 3 - \sqrt{3} + 5$	3) Efectuăm adunările și scăderile, grupând termenii raționali și termenii iraționali.
$E = 8 + 9\sqrt{3}$	Am obținut rezultatul final.

Exemplul 3: Calculați expresia $E = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}^3 - \sqrt{17}^8 : \sqrt{17}^6 - \left(\sqrt{3}^{12}\right)^4 : 3^{23}$

- $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}^3 = \sqrt{5}^4$; $\sqrt{17}^8 : \sqrt{17}^6 = \sqrt{17}^2$ și $\left(\sqrt{3}^{12}\right)^4 = \sqrt{3}^{48} \Rightarrow E = \sqrt{5}^4 - \sqrt{17}^2 - \sqrt{3}^{48} : 3^{23}$.
- $\sqrt{5}^4 = 25$; $\sqrt{17}^2 = 17$; $\sqrt{3}^{48} = 3^{24} \Rightarrow E = 5^2 - 17 - 3^{24} : 3^{23}$.
- $3^{24} : 3^{23} = 3 \Rightarrow E = 25 - 17 - 3 = 5$.

Acest exemplu ne oferă posibilitatea de a observa justețea faptului că operațiile cu puteri se pot efectua atât la început, cât și pe parcursul rezolvării.

Exemplul 4:

a) $\frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{7}{\sqrt{5}} - \frac{19}{\sqrt{5}} = \frac{{}^{\sqrt{5})}-9}{\sqrt{5}} = \frac{-9\sqrt{5}}{5}$;

b) $\frac{{}^{6)}5}{\sqrt{3}} - \frac{{}^{3)}7}{2\sqrt{3}} + \frac{{}^{2)}1}{3\sqrt{3}} = \frac{{}^{\sqrt{3})}11}{6\sqrt{3}} = \frac{11\sqrt{3}}{18}$

c) $\frac{{}^{\sqrt{3})}4}{\sqrt{3}} - \frac{7\sqrt{3}}{6} = \frac{{}^{2)}4\sqrt{3}}{3} - \frac{7\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6}$;

d) $\frac{{}^{\sqrt{2})}10\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{{}^{\sqrt{6})}12}{\sqrt{6}} = \frac{10\sqrt{6}}{2} + \frac{12\sqrt{6}}{6} =$
$= 5\sqrt{6} + 2\sqrt{6} = 7\sqrt{6}$

Observații:
a) Operațiile cu puteri, scoaterea factorilor de sub radical și introducerea factorilor sub radical se pot efectua în etapa pregătitoare, sau pe parcursul rezolvării, atunci când scrierea unor numere, într-o anumită formă, duce la simplificarea calculelor.
b) Raționalizarea numitorilor unor fracții se efectuează în orice etapă a rezolvării, dacă este necesară. Se recomandă ca rezultatul final să fie prezentat sub formă de fracție cu numitorul rațional, iar factorul rațional se recomandă să fie în formă ireductibilă.

Reținem!

A. Dacă exercițiul **nu conține paranteze**, atunci:
1) se efectuează ridicările la putere și extragerea rădăcinii pătrate, dacă este posibil.
2) se efectuează înmulțirile și împărțirile, în ordinea în care apar.
3) se efectuează adunările și scăderile, în ordinea în care apar.

B. Dacă exercițiul **conține și paranteze**, atunci:
1) se efectuează calculele din parantezele rotunde, respectând ordinea descrisă la A.
2) se transformă parantezele pătrate în paranteze rotunde, acoladele se transformă în paranteze pătrate.
3) se continuă algoritmul până la obținerea rezultatului final.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Efectuați calculele, respectând ordinea efectuării operațiilor:

a) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{15}$;

b) $\sqrt{26}:\sqrt{13}-2\sqrt{10}:\sqrt{5}$;

c) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}:\sqrt{10}$;

d) $3\cdot\left(2-\sqrt{7}\right)+2\left(\sqrt{7}-3\right)$;

e) $2\sqrt{3}+\left(3\sqrt{6}\right)\cdot\left(2\sqrt{2}\right)$;

f) $\left(2\sqrt{2}\right)^3+40\sqrt{6}:\left(-2\sqrt{3}\right)$.

2 Efectuați calculele, respectând ordinea efectuării operațiilor:

a) $\sqrt{6^2\cdot 8^2}-\sqrt{6^2+8^2}$

b) $\sqrt{0,4}-\sqrt{1,6}+\sqrt{0,9}$

c) $\sqrt{0,04}-\sqrt{1,69}+\sqrt{0,25}$

d) $\sqrt{0,(2)}-\sqrt{0,(8)}+\sqrt{3,(5)}$

e) $\left(\sqrt{(-2)^{38}}+\sqrt{2^{38}}\right):16^{\sqrt{25}}$

f) $\sqrt{2^{2048}}-2^{2^{10}}+\left(\sqrt{2\frac{7}{9}}-\frac{7}{9}\right):\sqrt{2\cdot\frac{8}{9}}$

g) $2\sqrt{15}+2\sqrt{5}\cdot\left[9\sqrt{2}-3\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\right]$

h) $\dfrac{\sqrt{(39\cdot 46+41\cdot 43)^2}+\sqrt{(39\cdot 46-41\cdot 43)^2}}{13\cdot 23}$

3 Efectuați calculele, respectând ordinea efectuării operațiilor:

a) $2\sqrt{3}\cdot\left(2\sqrt{2}+\sqrt{12}\right)-\sqrt{96}$;

b) $2\sqrt{8}\cdot\left(\sqrt{200}-\sqrt{648}+\sqrt{162}\right)$;

c) $3\sqrt{20}+2\sqrt{5}\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)-8\sqrt{5}+3\sqrt{10}$;

d) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\left(-\dfrac{2\sqrt{10}}{5}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{4}-\sqrt{56}:\sqrt{7}$;

e) $0,5\sqrt{24}-\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{2}+2\right)+\sqrt{54}:\left(3\sqrt{2}\right)$;

f) $\left(-\sqrt{40}-\sqrt{90}+2\sqrt{250}\right)^3:\left(-\sqrt{3125}\right)$;

g) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^3+\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{8}}:\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{0,1(6)}:\left(2\sqrt{2}\right)$;

h) $\left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{18}}-\dfrac{3+2\sqrt{2}}{6\sqrt{2}}\right):\left(2-\dfrac{6-\sqrt{32}}{3}\right)$.

4 Efectuați calculele și stabiliți dacă numărul a este pozitiv, negativ sau nul, unde

$a=\sqrt{63}\cdot\left[5\sqrt{27}-3\cdot\left(5\sqrt{3}+\sqrt{28}\right)\right]+11^2$.

5 Pentru $b=8\sqrt{6}:\left(2\sqrt{3}\right)-2\cdot\left(1+\sqrt{8}\right)$, calculați $1+b^{-1}+b^{-2}$.

6 Se consideră numerele:

$c=\left(\sqrt{200}+\sqrt{150}\right):\left(5\sqrt{2}\right)$ și

$d=\left[\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{6}-2\right)+\left(\sqrt{6}+\sqrt{12}\right):\sqrt{3}\right]:2-\sqrt{8}$.

Demonstrați că suma $c+d$ este un număr natural.

7 Determinați elementele mulțimii $M=\left\{x\in\mathbb{Z}\mid a<x<b\right\}$ știind că

$a=\left[\sqrt{15}\cdot\left(\sqrt{75}-\sqrt{45}+10\sqrt{3}\right)\right]:(-15)-\sqrt{3}$ și

$b=0,75\cdot\sqrt{72}-\dfrac{\sqrt{32}}{8}+0,1(6)\cdot\sqrt{18}$.

8 Efectuați calculele, apoi ordonați crescător numerele a, b, c, d:

$a=0,4\cdot\sqrt{20}-\sqrt{4,05}+\dfrac{\sqrt{10}:\sqrt{2}}{5}$

$b=\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{12}-4\right)+\sqrt{450}:\left(-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{18}+\dfrac{\sqrt{384}}{5}\right)$

$c=\left[\left(\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)\cdot\sqrt{8}-\dfrac{5\sqrt{6}}{6}-\dfrac{2\sqrt{300}}{5}\right]\cdot 0,6$

$d=\left(\dfrac{\sqrt{24}}{3}-\dfrac{\sqrt{54}}{4}\right)\cdot\left(\sqrt{120}-\sqrt{1080}+0,5\cdot\sqrt{750}\right)$.

9 Determinați cel mai mare număr natural mai mic decât $x=\left(\sqrt{2}\right)^3\cdot\left(\sqrt{2}\right)^5:\left(\sqrt{2}\right)^7+\left(\sqrt{2}\right)^9$.

10 Determinați cel mai mic număr întreg mai mare decât $y=\left(-\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{12}\cdot\sqrt{18}\right)^3:\left(\sqrt{6}\right)^{12}$.

11 Efectuați calculele necesare și demonstrați că:

a) $\sqrt{\dfrac{49+49^2}{50+50^2}}<\sqrt{\dfrac{50+50^2}{51+51^2}}$

b) $\sqrt{\dfrac{16+\sqrt{192}}{18+\sqrt{243}}}>\sqrt{\dfrac{7+\sqrt{147}}{8+\sqrt{192}}}$

12 Aduceți la forma cea mai simplă expresiile:

a) $2\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)-2\sqrt{18}+2\sqrt{15}$

b) $5\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)-\sqrt{16-3\cdot 2}+10\sqrt{3}$

c) $2\sqrt{12}-2\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{30}:\sqrt{5}-\sqrt{5}\right)-\sqrt{40}$

d) $-\sqrt{32}+\sqrt{216}+3\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{6}-2\sqrt{2}\right)$

e) $\dfrac{6-\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}-\dfrac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}-\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

f) $\left(\dfrac{11}{15\sqrt{2}}+\dfrac{3}{5\sqrt{2}}-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right):\dfrac{5}{48\sqrt{6}}$

g) $\left(\dfrac{7}{2\sqrt{3}}-\dfrac{13}{4\sqrt{3}}+\dfrac{5}{6\sqrt{3}}\right):\dfrac{13}{24\sqrt{3}}$

h) $\left(\dfrac{8}{5\sqrt{7}}-\dfrac{3}{4\sqrt{7}}-\dfrac{1}{10\sqrt{7}}\right)\cdot\dfrac{4\sqrt{35}}{3}$

i) $\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}+\sqrt{0,(2)}\right)^3\cdot\sqrt{2}$

13 Calculați $x=30\cdot a+b$ și $y=a:b$, unde

$a=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{5}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2}+\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$

$b=\sqrt{2}^5-\sqrt{3}^5+\sqrt{5}^3$

14 Comparați numerele *a* și *b*:

a) $a=\dfrac{1}{\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{20}}$ și $b=\dfrac{\sqrt{5}}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

b) $a=\ 2\sqrt{32}-6:\sqrt{18}$ și $b=\dfrac{49}{\sqrt{8}+\sqrt{50}}$

c) $a=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1}+\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-1}+\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)^{-1}$ și $b=\sqrt{2^{2^2}}$

15 Stabiliți care din următoarele numere sunt raționale

a) $\dfrac{6-\sqrt{3}}{\sqrt{27}}-\dfrac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{12}}-\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

b) $\dfrac{\sqrt{2}-10}{5\sqrt{2}}-\dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{8}}+\dfrac{9-2\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$

c) $\left|5-3\sqrt{3}\right|-\left|4\sqrt{3}-7\right|-7\sqrt{3}$

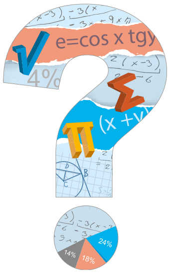
d) $\dfrac{\sqrt{1}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{15}}+\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{35}}+\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{9}}{\sqrt{63}}$

e) $\sqrt{3^{10}+3^8-10^7}:\sqrt{3^8-10^6}$

f) $\sqrt{\left(2\sqrt{3}+4\right)^2}-\sqrt{\left(-\sqrt{3}-2\right)^2}$

g) $\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}-\sqrt{\left(4\sqrt{3}-7\right)^2}$

h) $\left(8\sqrt{2}\right)^{-1}+\left(2\sqrt{2}\right)^{-3}-\sqrt{2}^{\,-5}$



Evaluare sumativă

Se acordă 10 puncte din oficiu.

I. *La cerințele următoare, alegeți litera care indică răspunsul corect; doar un răspuns este corect.*

5p	**1.** Rezultatul calculului $\sqrt{5}+2\sqrt{5}-\left(-3\sqrt{5}+4\sqrt{5}\right)+5\sqrt{5}$ este egal cu: A. $5\sqrt{5}$ B. $7\sqrt{5}$ C. $9\sqrt{5}$ D. $3\sqrt{5}$
5p	**2.** Efectuând $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{42}:\sqrt{7}-\sqrt{54}$, se obține: A. $-\sqrt{6}$ B. $-2\sqrt{6}$ C. $-3\sqrt{6}$ D. $\sqrt{6}$
5p	**3.** Numărul $a=\sqrt{576}:\sqrt{144}-\sqrt{(-5)^4:5^2}$ este: A. număr natural B. număr rațional pozitiv C. număr rațional negativ D. număr irațional
5p	**4.** Numărul $b=2\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{5}\right)^{-3}$ este: A. număr întreg negativ B. număr rațional negativ C. număr întreg pozitiv D. număr rațional pozitiv
10p	**5.** Dacă $a=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{12}}+\frac{1}{\sqrt{27}}$ și $b=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}}+\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{32}}$, atunci $a\cdot b$ este: A. $\frac{5}{12}$ B. $\frac{7}{12}$ C. $\frac{11}{18}$ D. $\frac{5}{18}$
10p	**6.** Dacă $\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{8}}{b}$ și $\frac{\sqrt{3c}}{\sqrt{15}}=\frac{1}{\sqrt{5d}}$, atunci $a\cdot b-c\cdot d$ este: A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
5p	**7.** Numărul x care verifică egalitatea $x\sqrt{27}-\sqrt{12}=\sqrt{300}$ este: A. 2 B. 3 C. 4 D. 5
5p	**8.** Numărul y care verifică egalitatea $\sqrt{4\cdot y}+\sqrt{72}=\sqrt{128}$ este: A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

II. *La problemele următoare se cer rezolvări complete.*

	1. Rezolvați următoarele cerințe:
5p	**a)** Arătați că numărul $\frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ este rațional.
20p	**b)** Fie numerele $a=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{6}-\sqrt{3}$ și $b=\frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+2+\sqrt{3}$. Demonstrați că $\frac{6}{5}<\frac{b}{a}<\frac{5}{4}$.
15p	**2.** Se consideră expresia $E(x)=10-\left(x+\sqrt{5}\right)^2$. Calculați $E\left(-\sqrt{5}\right)+E\left(\sqrt{5}\right)$ și precizați dacă rezultatul calculului este un număr pozitiv, un număr negativ sau nul.

1.6 Media aritmetică ponderată a n numere reale, $n \geq 2$. Media geometrică a două numere reale pozitive.

L1 Media aritmetică ponderată a n numere reale, $n \geq 2$.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Începând cu clasa a V-a, evaluarea rezultatelor învățării se realizează prin note. La sfârșitul fiecărui semestru, se calculează media notelor la fiecare disciplină, după cum urmează:

1. La disciplinele la care nu se dă teză, se calculează media aritmetică a numerelor înscrise în catalog, în rubrica *Note*. Numărul obținut se rotunjește la unități și se înscrie în catalog ca *medie*.

Modul de calcul este dat de următoarea definiție:

Definiție: Dacă se dau n numere reale $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, atunci media lor aritmetică simplă, numită pe scurt *media aritmetică*, este: $m_a = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$.

Vlad, elev de clasa a VII-a, a obținut la geografie, în semestrul I, următoarele note: 10, 8, 9, 10. Media lui Vlad, la geografie, va fi $m_a = \dfrac{10+10+9+8}{4} = 9{,}25$.
Prin rotunjire, în catalog se va completa media 9.

2. La disciplinele la care se dă teză (notăm cu T nota obținută la teză), media se face în două etape:

a) Se calculează media aritmetică a notelor înscrise în rubrica *Note*, cu excepția tezei, și se exprimă sub formă de fracție zecimală, cu două zecimale exacte. Să considerăm M această medie.

Vlad a obținut la matematică, în semestrul I, notele: 9, 9, 10, 9, 10, iar la teză, a luat 10.

Să-i calculăm media:

$$M = m_a = \frac{9+9+10+9+10}{5} = 9{,}4$$

Observație: Unele numere se pot repeta de mai multe ori în calculul mediei aritmetice. De exemplu, în problema de mai sus, Vlad are la matematică două note de 10 și trei note de 9. Calculul mediei ar fi fost mai rapid și mai practic în felul următor: $M = \dfrac{2 \cdot 10 + 3 \cdot 9}{2+3} = 9{,}4$, adică folosind media ponderată. Ponderea notei 10 este 2, iar ponderea notei 9 este 3. Evident, *numărul total* al notelor este *suma ponderilor*.

b) Se calculează media aritmetică a numerelor M și T, având **ponderile** 3, respectiv 1.

Definiție: Se numește media aritmetică ponderată a n numere reale $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ cu ponderile $p_1, p_2, ... , p_n$ numărul $m_p = \dfrac{p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + ... + p_n \cdot x_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n}$.
O vom numi, pe scurt, **media ponderată** a celor n numere.

Media semestrială la matematică va fi: $m_p = \dfrac{3M+T}{4} = \dfrac{3 \cdot 9{,}4 + 10}{4} = 9{,}55$.
Prin rotunjire, în catalog, se va scrie media 10.

În exemplul dat, vom spune că media M are ponderea 3, iar nota T are ponderea 1, sau că M are ponderea 75**%**, iar nota T are ponderea 25%. $m_p = \dfrac{3M+T}{4} = \dfrac{75}{100} \cdot M + \dfrac{25}{100} \cdot T$.

Când se calculează media aritmetică a unui număr mare de numere este foarte potrivită folosirea mediei ponderate. Formula pentru media ponderată este doar o sistematizare a formulei pentru media aritmetică simplă, folosind comutativitatea și asociativitatea adunării numerelor reale.

Cei **20 de elevi** ai unei clase au obținut, la ultima evaluare sumativă, notele din tabelul alăturat. Dorim să aflăm media clasei la acest test de evaluare.

Nota	**7**	**8**	**9**	**10**
Numărul elevilor care au obținut această notă	3	6	7	4
Ponderea notei	**3**	**6**	**7**	**4**

$$m_a=\frac{(10+10+10+10)+(9+9+9+9+9+9+9)+(8+8+8+8+8+8)+(7+7+7)}{20}=8{,}6$$ (media aritmetică simplă) sau $m_p=\dfrac{4\cdot\mathbf{10}+7\cdot\mathbf{9}+6\cdot\mathbf{8}+3\cdot\mathbf{7}}{4+7+6+3}=\dfrac{172}{20}=8{,}6$ (media ponderată).

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Proprietăți ale mediei aritmetice:

1. Media aritmetică a două sau mai multe numere este cel puțin egală cu cel mai mic dintre numere și cel mult egală cu cel mai mare dintre numere.

Fie *n* numere reale, dintre care *a* este cel mai mic, iar *b*, cel mai mare. Atunci, $a=\dfrac{n\cdot a}{n}\le m_a\le\dfrac{n\cdot b}{n}=b$.

În exemplul al doilea, $7<8{,}6<10$.

2. Media ponderată a două numere este mai apropiată de numărul care are ponderea mai mare.

În calculul mediei semestriale la matematică, media $\boldsymbol{M}$ are ponderea mai mare decât $\boldsymbol{T}$, iar $m_p-\boldsymbol{M}<\boldsymbol{T}-m_p$

$M=9{,}4$, $T=10$ și $\dfrac{3M+T}{4}=9{,}55$

3. Pentru aceleași numere, media aritmetică poate fi diferită, în funcție de ponderile numerelor.

Sorana și Dragoș au același număr de note la istorie, numai de 9 și de 10. Totuși, cei doi au medii diferite:

$m_1=\dfrac{3\cdot9+10}{4}=9{,}25$, iar $m_2=\dfrac{3\cdot10+9}{4}=9{,}75$.

Reținem!

- Dacă se dau *n* numere reale $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, atunci media lor aritmetică simplă, numită pe scurt **medie aritmetică**, este $m_a=\dfrac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$.
- Se numește media aritmetică ponderată a *n* numere reale $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ cu ponderile $p_1, p_2, ... , p_n$, numărul

$$m_p=\frac{p_1\cdot x_1+p_2\cdot x_2+...+p_n\cdot x_n}{p_1+p_2+...+p_n}.$$

1. Media aritmetică a două sau mai multe numere este cel puțin egală cu cel mai mic dintre numere și cel mult egală cu cel mai mare dintre numere.

2. Media ponderată a două numere este mai apropiată de numărul care are ponderea mai mare.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Calculați media aritmetică a numerelor reale a și b în fiecare din situațiile:

a) $a = 2$, $b = 18$;

b) $a = 7{,}25$, $b = 22{,}75$;

c) $a = 5{,}5$, $b = 1{,}8(3)$;

d) $a = 1 - \frac{4}{5}$, $b = 1 + 0{,}8$;

e) $a = 2\sqrt{6}$, $b = 8\sqrt{6}$;

f) $a = 3\sqrt{5}$, $b = 17\sqrt{5}$;

g) $a = \sqrt{63} - 2\sqrt{2}$, $b = \sqrt{7} + \sqrt{8}$;

h) $a = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $b = 2 + \sqrt{12} + \sqrt{50}$.

2 Calculați media aritmetică a numerelor a, b, c:
$a = 3\sqrt{20} - \sqrt{48}$; $b = \sqrt{108} - 3\sqrt{8}$; $c = \sqrt{72} - \sqrt{12}$.

3 Media aritmetică a numerelor a, b, c este $4 + 8\sqrt{2}$.

a) Știind că $a = 3 + \sqrt{32}$, $b = 5 + \sqrt{72}$, aflați numărul c;

b) Determinați cele trei numere, dacă $2a = 3b = 6c$.

4 În clasa a VII-a C, sunt 25 de elevi, dintre care 9 băieți. Media înălțimii băieților este 170 cm, iar media înălțimii fetelor este 165 cm. Calculați media înălțimii elevilor clasei a VII-a C.

5 Lorena a cumpărat struguri din două magazine diferite. Din primul magazin, a cumpărat 1,5 kg de struguri și a plătit 13,5 lei, iar din celălalt magazin a cumpărat 2,25 kg de struguri și a plătit 15,75 lei.

a) Aflați prețul cu care se vând strugurii (suma încasată pentru 1 kg de struguri) în fiecare dintre cele două magazine.

b) Aflați prețul mediu pe care l-a plătit Lorena pe struguri.

6 Măsurând temperatura aerului, la ora 9 dimineața, în cele șapte zile ale unei săptămâni, un meteorolog a consemnat valorile din tabelul următor. În primele trei zile ale săptămânii următoare, s-au înregistrat, la ora 9, aceeași temperatură pe care o considerăm x grade Celsius.

ziua	L	Ma	Mi	J	V	S	D	L	Ma	Mi
T	7°C	8°C	9°C	12°C	15°C	15°C	18°C	x°C	x°C	x°C

a) Calculați temperatura medie din prima săptămână.

b) Știind că temperatura medie a celor 10 zile este 13,5 °C, aflați numărul x.

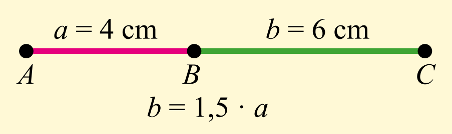
L2 Media geometrică a două numere reale pozitive

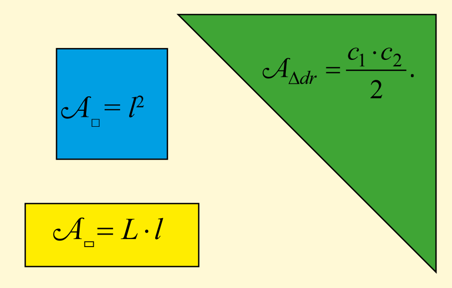
Ne amintim

Pentru orice două numere reale pozitive a și b, se poate considera raportul $\frac{b}{a} = k$, relație care se poate scrie și în forma $b = a \cdot k$.

Exemplu: Segmentul AB are lungimea de 4 cm, iar segmentul BC are lungimea de 6 cm. Scriem $\frac{BC}{AB} = \frac{6}{4}$ sau $BC = \frac{6}{4} \cdot AB$ sau $BC = 1{,}5 \cdot AB$.

Aria pătratului cu latura l este $\mathcal{A}_{\square} = l^2$.
Aria dreptunghiului, având lungimea L și lățimea l este $\mathcal{A}_{\square} = L \cdot l$.
Aria triunghiului dreptunghic este $\mathcal{A}_{\Delta dr} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2}$.





Descoperim, înțelegem, exemplificăm

1. Fie A, B, C, D puncte coliniare în această ordine, astfel încât $AB = a$, $BC = b$ și $CD = c$. Se știe că $BC = k \cdot AB$ și $CD = k \cdot BC$.

a) Formați o proporție folosind numerele pozitive a, b, c.

b) Exprimați numărul pozitiv b în funcție de numerele pozitive a și c.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{b}{a}=k\\[2mm] \dfrac{CD}{BC}=\dfrac{c}{b}=k\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{c}{b}\Leftrightarrow b^2=a\cdot c\Leftrightarrow b=\sqrt{a\cdot c}$$

Vom spune că numărul b este **media geometrică** a numerelor a și c.

2. Considerăm dreptunghiul $ABCD$, cu $AB = 9$ și $BC = 25$.

a) Calculați aria dreptunghiului.

b) Determinați lungimea laturii pătratului care are aria egală cu aria dreptunghiului dat.

Fie a lungimea laturii pătratului. $\mathcal{A}_{ABCD} = AB \cdot BC = 9 \cdot 25$, $\mathcal{A}_{pătrat} = a^2 \Rightarrow a^2 = 9 \cdot 25$, deci $a = \sqrt{9 \cdot 25} = 15$.

Vom spune că latura pătratului este ***media geometrică*** a dimensiunilor dreptunghiului cu aceeași arie.

Definiție: **Media geometrică** a două numere reale pozitive x și y este numărul pozitiv $m_g = \sqrt{x \cdot y}$.

Pornind de la echivalența $\dfrac{m_g}{x} = \dfrac{y}{m_g} \Leftrightarrow m_g = \sqrt{x \cdot y}$, media geometrică a numerelor x și y se mai numește și *media proporțională* a numerelor x și y. Datorită multiplelor aplicații în geometrie, denumirea de medie geometrică este mai des întâlnită.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

A. 1. Se consideră șirul de numere pozitive: 2, 4, 8, 16, 32, … (fiecare termen, începând cu al doilea, se obține din termenul precedent prin înmulțire cu 2).

a) Scrieți următorii 3 termeni ai șirului.

b) Să observăm că $4^2 = 2 \cdot 8$ sau $4 = \sqrt{2 \cdot 8}$. Identificați alte două astfel de relații între termenii șirului.

2. Compuneți o problemă asemănătoare celei de mai sus, folosind alte numere.

B. Proprietăți ale mediei geometrice a două numere pozitive x și y:

1. Media geometrică a două numere pozitive este cel puțin egală cu cel mai mic dintre numere și cel mult egală cu cel mai mare dintre numere; dacă numerele sunt egale, atunci media geometrică este egală cu fiecare dintre ele.

Fie $0 < x < y$, atunci $x = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x \cdot y} \leq \sqrt{y^2} = y$ Cum $m_g = \sqrt{x \cdot y}$, obținem $x \leq m_g \leq y$.

Pentru $x = y$ obținem $m_g = \sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x \cdot x} = x$.

2. Media geometrică a două numere pozitive este mai mică sau egală decât media aritmetică a acelorași numere.

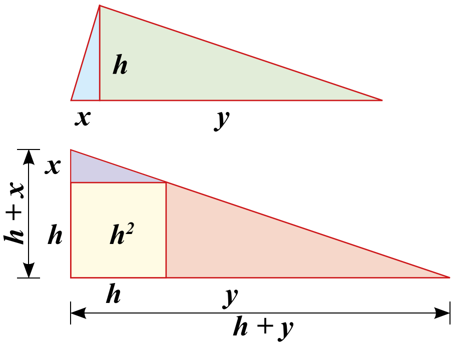
Oricare ar fi $x > 0$ și $y > 0$, $\sqrt{x \cdot y} \leq \dfrac{x+y}{2}$. **Exemple:** $\sqrt{2 \cdot 18} = 6 < 10 = \dfrac{2+18}{2}$; $\sqrt{9 \cdot 10} \approx 9{,}4868 < 9{,}5 = \dfrac{9+10}{2}$.

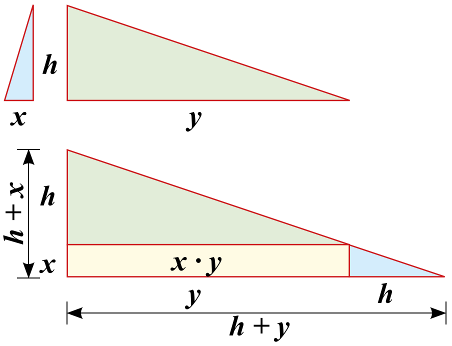
3. Dacă x și y sunt numere pozitive, atunci $\sqrt{x \cdot y} = \dfrac{x+y}{2} \Leftrightarrow x = y$.

Aplicație practică

La această aplicație, lucrați în echipe de cel puțin doi elevi.
Aveți nevoie de: carton, markere, instrumente geometrice, foarfece.

1. Desenați pe carton un triunghi dreptunghic.
2. Construiți înălțimea corespunzătoare ipotenuzei. Notați cu h înălțimea, apoi notați cu x și y segmentele determinate de ea pe ipotenuză.
3. Hașurați, folosind culori diferite, cele două triunghiuri dreptunghice formate.
4. Decupați triunghiurile obținute.
5. Desenați și apoi decupați un pătrat cu latura h și un dreptunghi cu dimensiunile x, respectiv y.
6. Alăturați, pe un carton mai mare, cele două triunghiuri și pătratul astfel încât să obțineți un triunghi. Desenați, apoi decupați triunghiul mare care se formează.
7. Așezați cele două triunghiuri mici împreună cu dreptunghiul pregătit, astfel încât să formați un triunghi dreptunghic. Ce constatați?
8. Comparați materialele realizate cu imaginile alăturate și observați relațiile obținute.





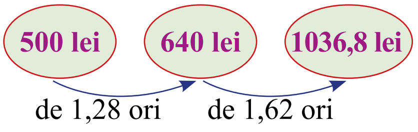
Când alăturăm triunghiurile și pătratul cu aria h^2, obținem un triunghi dreptunghic cu catetele $h + x$, respectiv $h + y$.
Prin alăturarea celor două triunghiuri mici cu dreptunghiul de arie $x \cdot y$, obținem un triunghi dreptunghic congruent cu primul.
Concluzie: Aria pătratului și cea a dreptunghiului sunt egale, adică $h^2 = x \cdot y \Rightarrow h = \sqrt{x \cdot y}$, deci înălțimea corespunzătoare ipotenuzei este medie proporțională (geometrică) a lungimilor segmentelor determinate de ea pe ipotenuză.

Observație: Prin această aplicație, ați demonstrat un rezultat foarte important pentru geometria triunghiului dreptunghic, numit *Teorema înălțimii*. Ne vom ocupa de acest rezultat la geometrie.

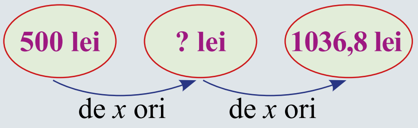
Este important să identificăm, în practică, necesitatea folosirii mediei geometrice în rezolvarea problemelor.

Exemple

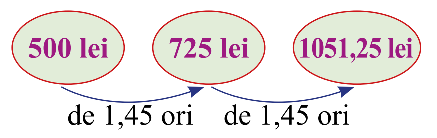
Tatăl lui Mihnea face parte din echipa de marketing a unui magazin. Un produs din acest magazin costă 500 de lei. Își propune să realizeze, în viitor, două scumpiri succesive ale acestuia. Vrea să mărească prețul, mai întâi, de 1,28 ori și după 6 luni să mărească noul preț de 1,62 ori. După ce face calculele necesare, constată că produsul va costa, în final 1036,8 lei.



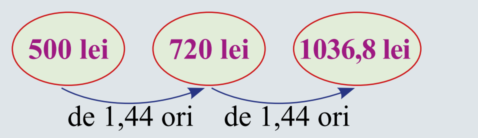
Mihnea îi propune ca prețurile să crească, în cele două etape, de același număr de ori, notat cu x, astfel ca în final să obțină același preț.
Tatăl îl felicită pe Mihnea pentru idee și întreabă:
Cum calculăm numărul x?



Mihnea calculează media aritmetică a numerelor care reprezintă cele două măriri: $\frac{1,28+1,62}{2}=1,45$. Dar, își dă seama că *nu obține același preț*.



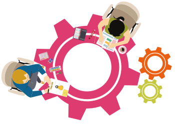
După ce se gândește mai bine, Mihnea își dă seama că este necesar să folosească media geometrică: $x=\sqrt{1,28\cdot 1,62}=1,44$.
Explicați de ce trebuie folosită media geometrică.



Reținem!

Media geometrică sau *media proporțională* a două numere reale pozitive x și y este numărul pozitiv $m_g=\sqrt{x\cdot y}$.

1. Pentru orice $0<x<y$, $x\le m_g\le y$.
2. Dacă $x>0$ și $y>0$, atunci $\sqrt{x\cdot y}\le\frac{x+y}{2}$, adică $m_g\le m_a$.
3. Dacă x și y sunt numere pozitive, atunci $\sqrt{x\cdot y}=\frac{x+y}{2}\Leftrightarrow x=y$, adică $m_g=m_a$ dacă și numai dacă $x=y$.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Calculați media geometrică a numerelor reale pozitive a și b:
a) $a=2$, $b=18$;
b) $a=3$, $b=12$;
c) $a=\frac{14}{5}$, $b=\frac{10}{7}$;
d) $a=112$, $b=\frac{4}{7}$;
e) $a=1,2$, $b=3,(3)$.

2 Calculați media geometrică a numerelor reale pozitive a și b:

a) $a=6\sqrt{2}$, $b=3\sqrt{2}$;

b) $a=3\sqrt{15}$, $b=5\sqrt{15}$;

c) $a=\sqrt{3}+\sqrt{12}$, $b=\sqrt{48}-\sqrt{3}$;

d) $a=\sqrt{98}+\sqrt{32}-\sqrt{50}$, $b=\sqrt{162}-\sqrt{72}$.

3 Media geometrică a două numere pozitive este $4\sqrt{2}$, iar unul dintre ele este $2\sqrt{2}$. Aflați cel de-al doilea număr.

4 Media geometrică a două numere pozitive este $5\sqrt{3}$, iar unul dintre ele este $\sqrt{5}$. Calculați media aritmetică a celor două numere.

5 Se consideră numerele $a=\sqrt{5\sqrt{625}}$, $b=4\sqrt{5}$. Calculați media aritmetică m_a și media geometrică m_g a celor două numere. Comparați numerele m_a și m_g.

6 a) Determinați două numere naturale a căror medie geometrică este $\sqrt{101}$.
b) Găsiți două numere naturale a căror medie geometrică este 5.

7 Determinați numerele naturale de forma $\overline{ab}$, știind că media geometrică a numerelor 2^a și 4^b este 8.

8 Media geometrică a numerelor pozitive 8 și x este 12.
a) Aflați numărul x.
b) Aflați cu cât trebuie mărit numărul x pentru ca media geometrică să se dubleze.

9 Raportul numerelor pozitive a și b este $\frac{4}{9}$, iar media lor geometrică este 18. Aflați numerele a și b.

Evaluare sumativă

Se acordă 10 puncte din oficiu.

I. *La cerințele următoare, alegeți litera care indică răspunsul corect; doar un răspuns este corect.*

5p	**1.** Tudor are la limba engleză o notă de 7, trei note de 8 și câte două note de 9 și două note 10. După rotunjire, media lui Tudor la limba engleză este: A. 7 B. 8 C. 9 D. 10
5p	**2.** Media geometrică a numerelor 6 și 54 este: A. 18 B. 16 C. 14 D. 12
5p	**3.** Media ponderată a numerelor $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ și $\frac{3}{4}$, cu ponderile 8,12, respectiv 16, este: A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{5}$
5p	**4.** Media geometrică a numerelor x și 12 este 18. Numărul x este: A. 24 B. 27 C. 30 D. 36
5p	**5.** Media geometrică a numerelor 3 și y este $5\sqrt{3}$. Numărul y este: A. 20 B. 24 C. 25 D. 50
5p	**6.** Media geometrică a numerelor $\overline{ab}$ și $\overline{ac}$ este $6\sqrt{6}$. Media aritmetică a acestor numere este: A. 10 B. 12 C. 15 D. 18
10p	**7.** Numărul pozitiv x din proporția $\frac{0{,}3}{x} = \frac{x}{\sqrt{23{,}04}}$ este: A. 1,5 B. 1,4 C. 1,3 D. 1,2
10p	**8.** Dacă $\frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{27}}{b} = \frac{\sqrt{48}}{c}$, atunci produsul dintre media geometrică a numerelor a și c și media geometrică a numerelor a și b este: A. $6\sqrt{3}$ B. $3\sqrt{6}$ C. $4\sqrt{3}$ D. $3\sqrt{2}$

II. *La problemele următoare se cer rezolvări complete.*

 10p **10p** **5p**	**1.** Se consideră numerele naturale a și b, cu $0 < a < b$. **a)** Calculați media geometrică a numerelor a și b știind că media aritmetică a acestora este egală cu 2. **b)** Calculați media aritmetică a numerelor a și b știind că media geometrică a acestora este egală cu 3. **c)** În condițiile punctului b), calculați media ponderată a numerelor a și b știind că au ponderile $2b$ și $7a$.
	2. Fie numerele x și y astfel încât $\sqrt{\left(x-2\sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{\left(6\sqrt{3}-y\right)^2} \le 0$.
10p **5p**	**a)** Aflați numerele x și y. **b)** Comparați numerele $\frac{2}{x+y}$ și $\frac{1}{\sqrt{xy}}$.

1.7 Ecuații de forma $x^2 = a$, unde $a \in \mathbb{R}$

Ne amintim

1. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, au loc relațiile: $x^2 = (-x)^2$.	a) $7^2 = 49$ și $(-7)^2 = 49$ b) $\sqrt{5}^2 = 5$ și $\left(-\sqrt{5}\right)^2 = 5$; c) $\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 12$ și $\left(-2\sqrt{3}\right)^2 = 12$.
2. *Pătratul* oricărui număr real este un număr real *pozitiv* sau *nul*.	a) $\left(2\sqrt{3}\right)^2 > 0$; b) $\left(-2\sqrt{3}\right)^2 > 0$; c) $0^2 = 0$.
3. Pentru fiecare număr real nenegativ a, se definește rădăcina pătrată a acestuia, notată $\sqrt{a}$, care este, de asemenea, *număr real nenegativ*, rațional sau irațional.	a) $\sqrt{9} = 3$; c) $\sqrt{6,25} = 2,5$; e) $\sqrt{5} \approx 2,23$. b) $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$; d) $\sqrt{3} \approx 1,73$;
4. Orice număr negativ este mai mic decât orice număr pozitiv și decât 0.	Dacă $a < 0$ și $b \geq 0$, atunci $a < b$.
5. Dacă $a \geq 0$ și $b \geq 0$, atunci $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$.	Dacă $a \geq 0$ și $b \geq 0$, atunci $a = b \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b}$.

Rezolvăm și observăm

Să rezolvăm următoarea **problemă**:
Se consideră mulțimea $M = \{-6, -5, -4, 2, 5\}$.

a) Determinați numerele reale x aparținând mulțimii M, pentru care $x^2 = 25$.

b) Determinați numerele reale x pentru care $x^2 = 25$.

Soluție: a) $M = \{-6, -5, -4, 2, 5\}$. Pentru fiecare element x al mulțimii M, calculăm x^2 și obținem:
$(-6)^2 = 36 \neq 25$; $(-5)^2 = 25$; $(-4)^2 = 16 \neq 25$;
$2^2 = 4 \neq 25$; $5^2 = 25$. În concluzie, singurele numere, elemente ale mulțimii M, care verifică egalitatea, sunt 5 și –5.

b) Din a) rezultă că numerele 5 și –5 verifică egalitatea, deci sunt ***soluții ale problemei*** noastre.

Se constată ușor că: 1) Dacă $x > 5$ sau $x < -5$, atunci $x^2 > 25$, deci nu verifică egalitatea.

2) Dacă $x > -5$ și $x < 5$, atunci $x^2 < 25$, deci nu verifică egalitatea.

Rezultă că singurele numere reale, ***soluții ale problemei***, sunt 5 și –5.

Problema rezolvată poate fi reformulată astfel:
Se consideră mulțimea
$M = \{-6, -5, -4, 2, 5\}$.

a) Rezolvați, în mulțimea M, ecuația $x^2 = 25$.

b) Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $x^2 = 25$.

Soluție: Vom spune că ecuația dată are ***necunoscuta*** x.
Am demonstrat că numerele 5 și –5 verifică ecuația, deci sunt soluțiile ecuației date, atât în mulțimea M, cât și în mulțimea $\mathbb{R}$.
Mulțimea $S = \{-5, 5\}$ este ***mulțimea soluțiilor*** ecuației date, în ambele cazuri.
Demersul realizat în scopul determinării tuturor soluțiilor unei ecuații se numește *rezolvarea ecuației.*

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

O **ecuație** de forma $x^2 = a$, cu $a \in \mathbb{R}$ conduce la determinarea tuturor numerelor reale care verifică egalitatea.

- *Necunoscuta* ecuației este x.
- Fiecare valoare atribuită necunoscutei, număr real, care verifică ecuația, se numește *soluție* a acesteia.
- Mulțimea valorilor reale ale neunoscutei x care verifică egalitatea se numește *mulțimea soluțiilor* ecuației.
- *A rezolva* o ecuație înseamnă a determina toate soluțiile sale.

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x^2 = 256$.
Numărul 16 este soluție a ecuației, deoarece $16^2 = 256$.
De asemenea, numărul -16 este soluție a ecuației, deoarece $(-16)^2 = 256$. Dacă $x > 16$ sau $x < -16$, atunci $x^2 > 256$, deci nu verifică egalitatea. Dacă $x > -16$ și $x < 16$, atunci $x^2 < 256$, deci nu verifică egalitatea. În concluzie, 16 și -16 sunt singurele soluții ale ecuației.
Vom scrie $x_1 = 16$ și $x_2 = -16$. Mulțimea soluțiilor va fi: $S = \{-16, 16\}$.
Observație: Numărul 16 este rădăcina pătrată a numărului 256, iar -16 este opusul numărului 16.
Putem scrie: $x_1 = \sqrt{256} = 16$ și $x_2 = -\sqrt{256} = -16$.

Rezolvarea ecuației de forma $x^2 = a$, cu $a \in \mathbb{R}$.

1) Dacă $a > 0$, ecuația $x^2 = a$ se poate scrie $|x| = \sqrt{a}$, egalitate care are loc dacă și numai dacă $x = \sqrt{a}$ sau $x = -\sqrt{a}$.
Vom spune că ecuația are soluțiile reale $x_1 = \sqrt{a}$ și $x_2 = -\sqrt{a}$.
Mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \left\{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\right\}$.

a) $x^2 = 64 \Rightarrow x_1 = \sqrt{64} = 8$ și $x_2 = -\sqrt{64} = -8$, deci $S = \{-8, 8\}$;

b) $x^2 = 15 \Rightarrow x_1 = \sqrt{15}$ și $x_2 = -\sqrt{15}$, deci $S = \left\{-\sqrt{15}, \sqrt{15}\right\}$;

c) $x^2 = 18 \Rightarrow x_1 = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ și $x_2 = -\sqrt{18} = -3\sqrt{2}$, deci $S = \left\{-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right\}$.

2) Ecuația $x^2 = 0$ are doar soluția $x = 0$, iar $S = \{0\}$.

a) $(2x)^2 = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ și $S = \{0\}$.
b) $(2x - 10)^2 = 0 \Rightarrow 2x - 10 = 0 \Rightarrow x = 5$ și $S = \{5\}$.

3) Ecuația $x^2 = a$, unde $a < 0$, nu are nicio soluție, număr real, pentru că $x^2 \geq 0$ și $a < 0$, deci $x^2 \neq a$, oricare ar fi numărul real x. Mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \varnothing$.

a) Ecuația $x^2 = -16$ nu are nicio soluție și $S = \varnothing$.
b) Ecuația $x^2 = -1$ nu are nicio soluție și $S = \varnothing$.

Observație: 1) Necunoscuta unei ecuații se poate nota și cu alte litere. De exemplu, ecuația $t^2 = 16$ cu necunoscuta t, are soluțiile $t_1 = -4$ și $t_2 = 4$, iar mulțimea soluțiilor va fi $S = \{-4, 4\}$, ca și în cazul ecuației $x^2 = 16$ sau $m^2 = 16$ sau chiar $a^2 = 16$.
2) Se recomandă ca rezolvarea unei ecuații să se încheie cu scrierea mulțimii soluțiilor sale.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Ne amintim că două ecuații pentru care necunoscuta aparține aceleiași mulțimi și care au aceleași soluții, se numesc *ecuații echivalente*. Vom numi **transformări echivalente** acele transformări prin care se obțin ecuații echivalente. Putem folosi, în acest sens, următoarele transformări:

1) adunăm sau scădem la ambii membri ai ecuației același număr real;
2) înmulțim sau împărțim ambii membri ai ecuației cu același număr real nenul;
3) dacă $a \geq 0$ și $b \geq 0$, atunci $a = b$ dacă și numai dacă $\sqrt{a} = \sqrt{b}$.

Multe dintre ecuațiile propuse spre rezolvare sunt prezentate într-o altă formă, dar prin transformări echivalente, putem obține ecuații de forma $x^2 = a$.

Exemple

a) $2x^2+5=133 \,\big|-5$

$2x^2=128 \,\big|:2$

$x^2=64$

$|x|=\sqrt{64} \Leftrightarrow |x|=8$

$x_1=-8,\ x_2=8$

$S=\{-8, 8\}.$

b) $(x-9)^2=144$

$|x-9|=\sqrt{144} \Leftrightarrow |x-9|=12$

$x-9=-12$ sau $x-9=12$

$x_1=-3$ sau $x_2=21$

$S=\{-3, 21\}.$

c) $(2x-9)^2=25$

$|2x-9|=\sqrt{25} \Leftrightarrow |2x-9|=5$

$2x-9=-5$ sau $2x-9=5$

$2x=4$ sau $2x=14$

$x_1=2$ sau $x_2=7$

$S=\{2; 7\}$

Reținem!

1) Dacă $a>0$, atunci $x^2=a \Leftrightarrow |x|=\sqrt{a} \Leftrightarrow x=\sqrt{a}$ sau $x=-\sqrt{a}$. $S=\{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$

2) $x^2=0$ dacă și numai dacă $x=0$. S = {0}.

3) Dacă $a<0$, atunci $x^2 \neq a$, oricare ar fi numărul real x. S = ∅.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Rezolvați în $\mathbb{N}$ ecuațiile:

a) $x^2=625$;
b) $x^2=256$;
c) $2\cdot x^2=800$;
d) $-7\cdot x^2=-343$;
e) $3\cdot x^2+1=76$.

2 Scrieți toate perechile (a^2, a), știind că:

a) $a^2 \in \{16,81,400\}$ și $a \in \mathbb{N}$;
b) $a^2 \in \{25,49,144\}$ și $a \in \mathbb{Z}$;
c) $a^2 \in \{16,81,400\}$ și $a \in \mathbb{Q}_-$.

3 Determinați soluțiile reale ale ecuațiilor:

a) $x^2=36$;
b) $x^2=3,24$;
c) $x^2=\dfrac{25}{4}$;
d) $x^2=-9$;
e) $x^2+7=907$
f) $4\cdot x^2+1=9^2$.

4 Rezolvați, în $\mathbb{R}$, ecuațiile:

a) $5x^2=320$;
b) $\dfrac{4}{3}\cdot x^2=\dfrac{16}{27}$;
c) $(x-1)^2=2,(7)$;
d) $\dfrac{x}{20}=\dfrac{45}{x}$;
e) $\dfrac{21}{8x}=\dfrac{3x}{14}$;
f) $\dfrac{2m-1}{3}=\dfrac{27}{2m-1}$.

5 Determinați soluțiile reale negative ale ecuațiilor:

a) $2x^2+7=105$;
b) $\dfrac{14}{15x}=\dfrac{x}{105}$.

6 Determinați soluțiile reale negative ale ecuațiilor:

a) $x^2+15=51$;
b) $\dfrac{2}{3}\cdot x^2+0,(6)=\sqrt{1\dfrac{7}{9}}$.

7 Rezolvați în mulțimea $M=\{x\in\mathbb{Z} \mid 94\le x^2\le 169\}$ ecuațiile:

a) $x^2+15=51$;
b) $\dfrac{2}{3}\cdot x^2+0,(6)=\sqrt{1\dfrac{7}{9}}$.

8 Rezolvați, în $\mathbb{R}$, ecuațiile:

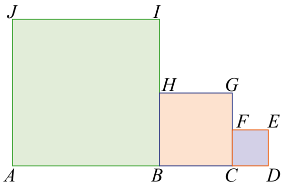
a) $x^2=5$;
b) $t^2=\dfrac{1}{2}$;
c) $2\cdot x^2=0$;
d) $12x^2+7=\dfrac{25}{3}$;
e) $x^2+3^3=(-2)^4$;
f) $\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}=1,(6)$.

9 Fie mulțimea: $M=\left\{0,81; \dfrac{1}{4}; -1; 0; 2; -9; 225\right\}$.

Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare, un număr a din mulțimea M, ecuația $x^2=a$ să admită:

a) soluții raționale;
b) soluții întregi;
c) soluții reale;
d) o singură soluție reală.

10 Desenul alăturat reprezintă schița unui teren format prin alăturarea a trei suprafețe pătratice *ABIJ*, *BCGH* și *CDEF*. Punctul *H* este mijlocul segmentului *BI*, iar *F* este mijlocul segmentului *CG*. Știind că întreaga suprafață are 0,035 ha, calculați lungimile laturilor celor trei pătrate.



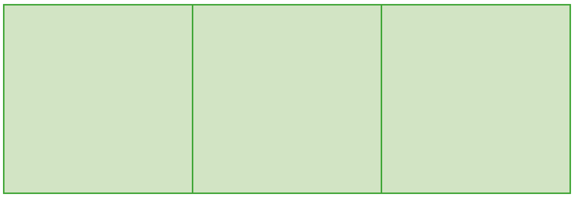
Evaluare sumativă

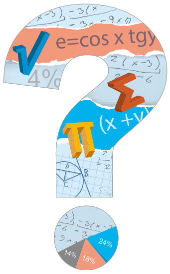
Se acordă 10 puncte din oficiu.

I. *La cerințele următoare, alegeți litera care indică răspunsul corect; doar un răspuns este corect.*

5p	**1.** Mulțimea soluțiilor ecuației $x^2 - 81 = 0$ este: A. $\{-81, 81\}$ B. $\{-3, 3\}$ C. $\{-9, 9\}$ D. $\{-27, 27\}$
5p	**2.** Mulțimea soluțiilor ecuației $-4x^2 + 25 = 0$ este: A. $\left\{-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right\}$ B. $\left\{-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\}$ C. $\left\{-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right\}$ D. $\{-0{,}25; 0, 25\}$
5p	**3.** Dacă $x > 0$ și $(x - 3)^2 = 36$, atunci x este: A. -3 B. 3 C. 6 D. 9
5p	**4.** Dacă $x < 0$ și $(x-1)^2 = \left(1-\sqrt{5}\right)^2$, atunci x este: A. $2-\sqrt{5}$ B. $-2-\sqrt{5}$ C. $\sqrt{5}-2$ D. $\sqrt{5}-3$
10p	**5.** Numărul natural a pentru care $a \cdot (a + 6) = 6 \cdot (a + 1{,}5)$ este: A. 6 B. 3 C. 1,5 D. 9
10p	**6.** Numărul întreg negativ b pentru care $\frac{b-1}{21} = \frac{27}{7b-7}$, este: A. 8 B. 10 C. -8 D. -10

II. *La problemele următoare se cer rezolvări complete.*

10p	**1.** Un teren are formă de pătrat. Dacă se mărește latura cu 25 m, se obține un teren cu suprafața de 0,5625 ha. Determinați latura pătratului.
 10p **5p** **5p**	**2.** În figura alăturată este reprezentată schița unui teren format prin alăturarea a trei suprafețe pătratice cu aceeași arie. Aria suprafeței terenului este 2187 m^2. **a)** Aflați latura unui pătrat. **b)** Determinați dimensiunile dreptunghiului. **c)** Calculați lungimea unui gard care ar înprejmui complet terenul. 
20p	**3.** În camera lui Călin, pe un perete cu dimensiunile 6 m și 2,4 m, este lipit un poster cu formă pătratică, având latura exprimată printr-un număr natural, în metri. Știind că suprafața posterului depășește $\frac{1}{4}$ din suprafața peretelui, calculați dimensiunile posterului.



2 Ecuații și sisteme de ecuații liniare

Competențe specifice:

1.2 **2.2** **3.2** **4.2** **5.2** **6.2**

2.1 Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități

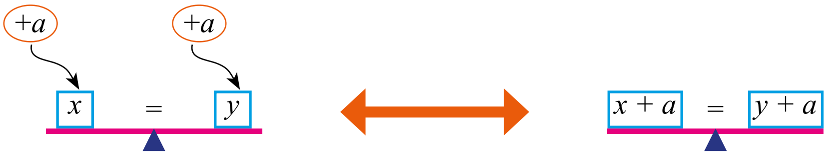
Ne amintim

1) Relația de egalitate, pe mulțimea numerelor reale, are proprietățile:
   a) Orice număr real este egal cu el însuși, adică $x = x$.
   b) Dacă $x = y$, atunci $y = x$.
   c) Dacă $x = y$ și $y = z$, atunci $x = z$.
2) Într-o egalitate, expresia scrisă în partea stângă a semnului „=” se numește *membrul stâng* al egalității, iar expresia scrisă în membrul drept al semnului „=” se numește *membrul drept* al acesteia.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

- În rezolvarea problemelor, observăm că o informație poate fi comunicată în mai multe moduri, prin enunțuri aparent diferite.

De exemplu, enunțurile „$x + 3 = 7$”, „$x – 2 = 2$” și „$x = 4$” sunt formulate diferit, dar ne oferă aceeași informație și anume că numărul 4 este singura valoare a necunoscutei x pentru care are loc egalitatea.
Despre astfel de enunțuri, vom spune că sunt echivalente.
Vom scrie: „$x + 3 = 7 \Leftrightarrow x – 2 = 2$” sau „$x + 3 = 7 \Leftrightarrow x = 4$” sau „$x – 2 = 2 \Leftrightarrow x = 4$”.



A. Pornind de la o egalitate, se pot obține egalități echivalente prin următoarele transformări:
1) Se adună sau se scade, din ambii membri ai egalității, același număr real.
2) Se înmulțesc sau se împart ambii membri ai egalității, cu același număr real nenul.
3) Dacă cei doi membri ai egalității sunt numere pozitive, se pot obține egalități echivalente și astfel:
   a) se ridică la puterea n, număr întreg, ambii membri ai egalității.
   b) se extrage radical din ambii membri ai egalității.

În limbaj matematic, transformările enumerate pot fi formulate astfel:

1) $x = y \Leftrightarrow x + a = y + a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$;
   $x = y \Leftrightarrow x - a = y - a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.
2) $x = y \Leftrightarrow x \cdot a = y \cdot a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}^*$;
   $x = y \Leftrightarrow \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{a}$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}^*$.
3) Dacă $x > 0$ și $y > 0$, atunci $x = y \Leftrightarrow x^n = y^n$, $n \in \mathbb{Z}^*$;
   Dacă $x \geq 0$ și $y \geq 0$, atunci $x = y \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y}$.

Exemple

1) $x = y \Leftrightarrow x + 3 = y + 3$
   $x = y \Leftrightarrow x - 5 = y - 5$
2) $x = y \Leftrightarrow x \cdot 2{,}5 = y \cdot 2{,}5$
   $x = y \Leftrightarrow \dfrac{x}{-3} = \dfrac{y}{-3}$
3) $1{,}5 = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 1{,}5^2 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2$
   $1{,}2 = \dfrac{6}{5} \Leftrightarrow \sqrt{1{,}2} = \sqrt{\dfrac{6}{5}}$

Pentru redactarea unor transformări echivalente, observați următoarele exemple:

a) $$\begin{aligned} 5x-6=5y-6 &\mid +6 \\ 5x=5y &\mid :5 \\ x=y & \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 3-x=3-y &\mid -3 \\ -x=-y &\mid \cdot(-1) \\ x=y & \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x=y &\mid :7 \\ \frac{x}{7}=\frac{y}{7} & \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} \frac{x}{5}=\frac{y}{9} &\mid \cdot(5\cdot 9) \\ 9x=5y & \end{aligned}$$

B. Fiind date două egalități, se pot obține noi egalități utile, folosind una dintre următoarele transformări:

1) Se adună, membru cu membru, cele două egalități.
2) Se scad, membru cu membru, cele două egalități.
3) Se înmulțesc, membru cu membru, cele două egalități.
4) Se împart, membru cu membru, cele două egalități.
5) Se ridică la putere, membru cu membru, cele două egalități.

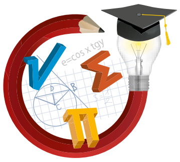
$$\begin{array}{r|l} x=y & \\ a=b & (+) \\ \hline x+a=y+a & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x=y & \\ a=b & (-) \\ \hline x-a=y-b & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x=y & \\ a=b & (\cdot) \\ \hline x\cdot a=y\cdot b & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x=y & \\ a=b & (:) \\ \hline \frac{x}{a}=\frac{y}{b} & \\ a\neq 0,\ b\neq 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x=y & \\ a=b & \\ \hline x^a=y^b & \\ a,b\in\mathbb{Z}^* & \end{array}$$

C. Numim **identitate matematică** o egalitate care conține una sau mai multe variabile și care este adevărată pentru orice set de valori atribuite variabilelor.

Exemple

1. a) $x+0=x$; b) $9x-7x=2x$; c) $x\cdot(x+3)=x^2+3x$; d) $\sqrt{x^2}=|x|$
sunt egalități care au loc pentru orice $x\in\mathbb{R}$, deci sunt identități cu o singură variabilă.
2. $a^n\cdot a^p=a^{n+p}$, pentru orice $a\in\mathbb{R}^*$ și $n,p\in\mathbb{N}$, deci este o identitate cu trei variabile.
3. $1+2+3+.....+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

1) Calculați $a+b+x+y$, știind că $x+b=27$ și $y+a=4$.

Soluție: $$\begin{array}{r|l} x+b=27 & \\ y+a=4 & (+) \\ \hline a+b+x+y=31 & \end{array}$$

3) Dacă $a=b$ și $x=y$, unde $x\geq 0,\ y\geq 0$, arătați că $a\sqrt{x}=b\sqrt{y}$.

Soluție: $x=y \Leftrightarrow \sqrt{x}=\sqrt{y}$
$$\begin{array}{r|l} a=b & \\ \sqrt{x}=\sqrt{y} & (\cdot) \\ \hline a\sqrt{x}=b\sqrt{y} & \end{array}$$

2) Dacă $3x+2y=7x$, demonstrați că y este dublul lui x.

Soluție: $$\begin{aligned} 3x+2y=7x &\mid -3x \\ 2y=4x &\mid :2 \\ y=2x & \end{aligned}$$

4) Calculați $7a+4b+7x+4y$ știind că $a+x=10$ și $b+y=8$.

Soluție: $$\begin{aligned} a+x=10 &\mid \cdot 7 \\ 7a+7x=70 & \end{aligned} \quad \text{și} \quad \begin{aligned} b+y=8 &\mid \cdot 4 \\ 4b+4y=32 & \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} 7a+7x=70 & \\ 4b+4y=32 & (+) \\ \hline 7a+4b+7x+4y=102 & \end{array}$$

5) Dacă $a + b = 14$ și $x + y = 17$, calculați $a + b - x - y$.

Soluție: $x + y = 17 \mid \cdot(-1)$

$$-x - y = -17$$

$$\begin{array}{r|l} a + b = 14 & \\ -x - y = -17 & (+) \\ \hline a + b - x - y = -3 & \end{array}$$

6) Dacă $a + b = 5$ și $b + c = 7$, calculați $7a + 10b + 3c$ și $7a + 4b - 3c$.

Soluție: $a + b = 5 \mid \cdot 7$ și $b + c = 7 \mid \cdot 3$

$$7a + 7b = 35 \qquad 3b + 3c = 21$$

$$\begin{array}{r|l} 7a + 7b = 35 & \\ 3b + 3c = 21 & (+) \\ \hline 7a + 10b + 3c = 56 & \end{array} \qquad \text{și} \qquad \begin{array}{r|l} 7a + 7b = 35 & \\ 3b + 3c = 21 & (-) \\ \hline 7a + 4b - 3c = 14 & \end{array}$$

Temă de portofoliu

1) Pentru fiecare dintre transformările descrise la **A.** și la **B.**, formulați câte un exemplu, urmând modelele prezentate.

2) a) Dacă $\frac{a}{b} = \frac{8}{3}$ și $\frac{b}{c} = \frac{3}{2}$, calculați $\frac{a}{c}$. b) Dacă $a \cdot c = 38$ și $b \cdot c = 19$, calculați $\frac{a}{b}$ și $\frac{a+b}{a-b}$.

Reținem!

Pornind de la o egalitate, se pot obține egalități echivalente prin următoarele transformări:

- Se adună sau se scade, din ambii membri ai egalității, același număr real.
- Se înmulțesc sau se împart ambii membri ai egalității cu același număr real nenul.
- Dacă cei doi membri ai egalității sunt numere **pozitive**, atunci se pot obține egalități echivalente și astfel:
  - a) Se ridică la puterea n, număr întreg, ambii membri ai egalității.
  - b) Se extrage radical din ambii membri ai egalității.

Numim **identitate matematică** o egalitate care conține una sau mai multe variabile și care este adevărată pentru orice set de valori atribuite variabilelor.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Dacă $a = 7$ și $b + c = 77$, calculați:
a) $77 \cdot a + 3 \cdot b + 3 \cdot c$; b) $88 \cdot a - 7 \cdot b - 7 \cdot c$.

2 Calculați numărul n știind că $a - b - 1 = 5$ și $n = -3 \cdot a + 19 + 3 \cdot b$.

3 Se știe că $x + 4 \cdot y = 3 \cdot y + 2 \cdot z = 14$.
Aflați numărul $m = 5 \cdot x + 11 \cdot y - 6 \cdot z$.

4 Numerele x și y verifică egalitatea $x \cdot (y + 3) + y = 98$.
Aflați numerele naturale x, y știind că $x < y$.

5 Au loc egalitățile $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$, $\frac{c}{b} = \frac{7}{5}$, $\frac{c}{d} = \frac{7}{11}$, $\frac{d}{x} = \frac{11}{183}$. Comparați numerele $\frac{a}{x}$ și 62^{-1}.

6 Fie $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ cu $a \cdot b = 6$, $b \cdot c = 12$, $c \cdot a = 8$.
Aflați $a \cdot b \cdot c$ și $a^2b^2c + ab^2c^2 + a^2bc^2$.

7 Calculați $7a + 4b + 7x + 4y$ știind că $a + x = 10$ și $b + y = 8$.

8 Dacă $a + b = 21$ și $x + y = 15$, calculați $a + b - x - y$.

9 Dacă $a + b = 15$ și $b + c = 23$, calculați $7a + 10b + 3c$ și $7a + 4b - 3c$.

10 Dacă $a - 2b = 1$, $2b - 3c = 2$, $3c - 4d = 2$ și $4d - 5e = 1$ calculați $a - 5e$.

2.2 Ecuații de forma $a \cdot x + b = 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Mulțimea soluțiilor unei ecuații. Ecuații echivalente

Ne amintim

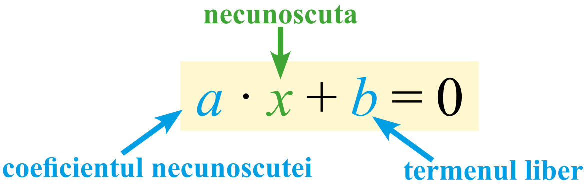
1) Am învățat să rezolvăm, în mulțimea numerelor raționale sau în submulțimi ale acesteia, ecuații de forma $a \cdot x + b = 0$, cu coeficienți raționali.

Exemple

1) În $\mathbb{Q}$, ecuația $6 \cdot x + 3 = 0$ are soluția $x = -0,5$.
2) În $\mathbb{Z}$, ecuația $3 \cdot x + 6 = 0$ are soluția $x = -2$.
3) În $\mathbb{N}$, ecuația $2 \cdot x + 6 = 0$ nu are soluții.

Numerele a și b se numesc **coeficienți** ai ecuației, iar x se numește **necunoscuta** ecuației.

Numărul b se mai numește **termenul liber** al ecuației.



2) Două ecuații sunt echivalente dacă au același domeniu și aceleași soluții.

a) Ecuațiile $2x - 7 = 5, x \in \mathbb{Z}$ și $8 - x = 2, x \in \mathbb{Z}$ sunt echivalente, deoarece au aceeași soluție, $x = 6$.
b) Ecuațiile $2x = 8, x \in \mathbb{Q}$ și $x - 3 = 4, x \in \mathbb{Q}$ nu sunt echivalente, deoarece prima are soluția $x = 4$, iar a doua are soluția $x = 7$.

Ne propunem să rezolvăm, în mulțimea numerelor reale sau în submulțimi ale mulțimii numerelor reale, ecuații de forma $a \cdot x + b = 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

	A. Problemă	**B. Ecuație**
1	Fie $D = \{-1, \sqrt{2}, 3\}$. Determinați numerele $x \in D$, pentru care are loc egalitatea $\sqrt{2} \cdot x + 2 = 0$.	Rezolvați în mulțimea $D = \{-1, \sqrt{2}, 3\}$ ecuația $\sqrt{2} \cdot x - 2 = 0$.
2	Determinați numerele reale x, pentru care are loc egalitatea $-\sqrt{3} \cdot x + 2\sqrt{3} = 0$.	Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $-\sqrt{3} \cdot x + 2\sqrt{3} = 0$.

Mulțimea D căreia se dorește să aparțină soluțiile sau mulțimea pe care expresiile care apar în formularea ecuației au sens se numește **domeniul** ecuației.

Fiecare valoare, element al domeniului, pentru care se obține egalitate, se numește **soluție** a ecuației.
Observație: Mulțimea soluțiilor unei ecuații este o submulțime a domeniului acesteia.
A rezolva ecuația înseamnă a determina mulțimea S a tuturor soluțiilor.

Copiați pe caiet tabelul, apoi completați-l folosind modelul prezentat:

Problema	domeniul	coeficienții	termenul liber	necunoscuta
Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația: $-\sqrt{3} \cdot x + 2\sqrt{3} = 0$	$\mathbb{Z}$	$-\sqrt{3}$ și $2\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	x
Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $\sqrt{2} \cdot t + 2 = 0$				t
Rezolvați în ... ecuația:	$\mathbb{R}$	-7 și $0,3$	$0,3$	y
Rezolvați în ... ecuația:	$\mathbb{Q}$	$\sqrt{2}$ și $-2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	z

Rezolvăm și observăm

A. Pentru identificarea soluțiilor ecuațiilor este foarte important **domeniul** D, în care se cere rezolvarea. Dacă nu se precizează explicit care este domeniul unei ecuații, acesta se consideră ca fiind mulțimea formată din toate valorile pentru care ecuația are sens. La majoritatea ecuațiilor pe care le vom întâlni pe parcursul clasei a VII-a, domeniul ecuației este $\mathbb{R}$.

1) Rezolvați, în $A=\{-1,0,3\}$, ecuația $x-\sqrt{3}=0$	$-1-\sqrt{3}\neq 0$; $0-\sqrt{3}\neq 0$; $3-\sqrt{3}\neq 0$.
2) Rezolvați, în $\mathbb{Q}$, ecuația $x-\sqrt{3}=0$	Dacă $x\in\mathbb{Q}$, atunci $(x-\sqrt{3})\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, deci $x-\sqrt{3}\neq 0$
3) Rezolvați ecuația $x-\sqrt{3}=0$	Se observă ușor că $x=\sqrt{3}$ este singura soluție, număr real, a ecuației.
Concluzie: O ecuație poate să aibă soluții într-o mulțime și să nu aibă soluții în altă mulțime.	

B. Rezolvarea ecuației $a\cdot x+b=0$, unde $a, b\in\mathbb{R}$, în mulțimea numerelor reale.

1) Ne ocupăm, pentru început, de ecuațiile de forma $a\cdot x+b=0$, unde $a, b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$.

Folosind transformări echivalente, obținem: $a\cdot x+b=0 \mid -b \Leftrightarrow a\cdot x=-b \mid :a \Leftrightarrow x=-\frac{a}{b}$, care este un număr real și care este singura soluție a ecuației. Vom scrie $S=\left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

2) În practică, întâlnim situații în care unele ecuații se reduc, prin transformări echivalente, la ecuații de forma $a\cdot x+b=0$, iar despre a nu știm că este nenul.
Pentru $a=0$, ecuația $a\cdot x+b=0$ devine $0\cdot x+b=0$, $b\in\mathbb{R}$.
Sunt posibile următoarele cazuri:
a) $b=0$ și egalitatea are loc pentru orice valoare reală a lui x, deci $S=\mathbb{R}$.
b) $b\neq 0$ și egalitatea nu are loc pentru nicio valoare reală a necunoscutei, deci $S=\varnothing$.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Frecvent, ecuațiile pe care le avem de rezolvat nu sunt scrise în forma $a\cdot x+b=0$, dar sunt echivalente cu ecuații de această formă. Pentru a identifica coeficienții și pentru a aplica algoritmul de rezolvare, este necesar să fie efectuate mai multe transformări echivalente. Ecuația obținută în acest fel este echivalentă cu ecuația inițială și prin urmare, va avea aceleași soluții.

Parcurgem etapele:

1) Se aduce ecuația la forma $a\cdot x+b=0$, unde $a,b\in\mathbb{R}$.
2) Se aplică algoritmul de rezolvare a ecuației.
3) Se scrie mulțimea soluțiilor ecuației, având în vedere domeniul acesteia.

Observație: Dacă se dorește doar rezolvarea ecuației, algoritmul se poate reformula astfel:
a) Se separă termenii (în membrul stâng se vor găsi termenii care conțin necunoscuta, iar în membrul drept se vor afla numai termenii care nu conțin necunoscuta)
b) Se efectuează calculele în cei doi membri ai ecuației.
c) Se determină mulțimea soluțiilor ecuației.

Exemplul 1: Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $3(0{,}5x+1)-7=8$.

Soluția I:
$3(0{,}5x+1)-7=8 \mid +7 \Leftrightarrow$
$3(0{,}5x+1)=15 \mid :3 \Leftrightarrow$
$0{,}5x+1=5 \mid -1 \Leftrightarrow$
$0{,}5x=4 \mid \cdot 2 \Leftrightarrow$
$x=8 \Rightarrow S=\{8\}$

Soluția a II-a:
$3(0{,}5x+1)-7=8 \Leftrightarrow$
$1{,}5x+3-7=8 \Leftrightarrow$
$1{,}5x-4=8 \Leftrightarrow$
$1{,}5x=12 \Leftrightarrow$
$x=12:1{,}5 \Leftrightarrow$
$x=8 \Rightarrow S=\{8\}$

Exemplul 2: Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\frac{8x-1}{4}=\frac{6x+1}{3}$.
Soluție: $3(8x-1)=4(6x+1) \Leftrightarrow 24x-3=24x+4 \Leftrightarrow -3=4$, afirmație falsă, deci $S=\varnothing$.

Exemplul 3: Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $5(2x+1)-3=8-2(3-5x)$.
Soluție: $10x+5-3=8-6+10x \Leftrightarrow 2=2$, relație adevărată pentru orice valoare reală a necunoscutei x, deci $S=\mathbb{R}$.

Exemplul 4: Să se rezolve în $\mathbb{R}\setminus\{0;4\}$ ecuația $\frac{3}{x-4}=\frac{2}{x}$.
Soluție: Domeniul ecuației este $\mathbb{R}\setminus\{0;4\}$ pentru că valorile 0 și 4 atribuite necunoscutei conduc la anularea numitorilor și fracțiile nu ar avea sens.

$$\frac{3}{x-4}=\frac{2}{x} \Leftrightarrow 3\cdot x=2\cdot(x-4) \Leftrightarrow 3\cdot x=2\cdot x-8 \Leftrightarrow x=-8,\ \text{deci } S=\{-8\}.$$

Uneori, rezolvarea unor ecuații constă în rezolvarea mai multor ecuații de forma $a\cdot x+b=0$, unde $a,b\in\mathbb{R}$. Numărul soluțiilor depinde de domeniul în care se cere rezolvarea.

Exemplul 5: Rezolvați ecuația $(x-1)(2x-3)(x+4)=0$ în fiecare dintre mulțimile: $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$.

În rezolvarea ecuației, se va folosi următorul rezultat matematic:

Dacă a și b sunt numere reale și $a\cdot b=0$, atunci $a=0$ sau $b=0$.

$(x-1)(2x-3)(x+4)=0 \Leftrightarrow x-1=0$ sau $2x-3=0$ sau $x+4=0 \Leftrightarrow x=1$ sau $x=1{,}5$ sau $x=-4$.

a) În $\mathbb{R}$, $S=\{1;-4;1{,}5\}$. b) În $\mathbb{Q}$, $S=\{1;-4;1{,}5\}$. c) În $\mathbb{Z}$, $S=\{1;-4\}$. d) În $\mathbb{N}$, $S=\{1\}$.

Estimarea soluției unei ecuații

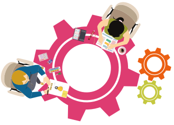
Să rezolvăm următoarea problemă: O navă de pescuit poate transporta cel mult 20 de tone de pește. După ce s-a încărcat la 95% din capacitatea sa, vasul s-a întors în port. Știind că greutatea medie a unui pește este de aproximativ 700 de grame, estimați, la ordinul miilor, numărul de pești pe care i-a transportat nava.

Soluție: Pentru a formula o ecuație, masa unui pește și masa întregii cantități de pește vor fi exprimate în aceeași unitate de măsură. Este optim să folosim kilogramul. 700 g = 0,7 kg; 20 t = 20 000 kg.

Notăm cu x numărul peștilor transportați. Vom estima soluția ecuației $0{,}7\cdot x=\frac{95}{100}\cdot 20\,000$.

Prin transformări echivalente, se obține $0{,}7\cdot x=19\,000 \Leftrightarrow x=\frac{190\,000}{7}$.

Aproximarea la ordinul miilor a numărului de pești este 27 000.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Numerele a, b, c, d sunt reale, $d\neq 0$ și $a=b$. Completați spațiile libere astfel încât să obțineți propoziții adevărate:

p_1: „$a+c=b+\ldots$”;
p_2: „$b-c=a-\ldots$”;
p_3: „$a\cdot c=b\cdot\ldots$”;
p_4: „$b:d=a:\ldots$”;
p_5: „$a^n=\ldots^n$”;
p_6: „Dacă $a\geq 0$, $b\geq 0$ atunci $\sqrt{a}=\ldots$”.

2 Se consideră ecuația $0{,}25\cdot x+2=0$.
a) Verificați dacă ecuația dată are soluții în mulțimea $A=\{-4,0,4\sqrt{2}\}$.
b) Decideți dacă ecuația dată are soluții întregi.

3 Decideți, prin verificare, care dintre ecuațiile următoare are soluția $x=-\sqrt{2}$.
a) $x+2=0$; b) $2-x=0$;
c) $2\cdot x+\sqrt{8}=0$; d) $\frac{x}{\sqrt{2}}+1=0$.

4 Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuațiile:

a) $x+\sqrt{2}=\sqrt{8}$; b) $4{,}5 \cdot x + 9 = 13{,}5$

c) $\sqrt{3}\cdot x-2=1$; d) $-3\frac{1}{2}\cdot x-1{,}5=\sqrt{2}^2$;

e) $\frac{x}{\sqrt{3}}+\sqrt{12}=\sqrt{27}$; f) $x\cdot\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{5}}=0$;

g) $\sqrt{18}\cdot x+9=0$; h) $\sqrt{24}\cdot x=0$.

5 Scrieți trei ecuații de forma $a \cdot x + b = 0$, care admit soluții în mulțimea

$$B=\left\{-1,\ 0,\ \sqrt{2},\ \frac{5}{2}\right\}.$$

6 Determinați mulțimile:

$$A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\sqrt{7}\cdot x+1=\sqrt{7}+1\right\};$$

$$B=\left\{x\in\mathbb{Q}\,\middle|\,\frac{2}{5}\cdot x+3=5{,}4\right\};$$

$$C=\left\{x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\,\middle|\,1+\sqrt{7}\cdot x=\sqrt{8}+1\right\};$$

$$D=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\frac{\sqrt{3}\cdot x}{3}-\frac{3}{\sqrt{3}}=0\right\}.$$

7 a) Rezolvați, în $\mathbb{R}$, ecuațiile $3x - 57 = 0$ și $-5x + 95 = 0$, apoi scrieți, S_1, mulțimea soluțiilor primei ecuații și S_2, mulțimea soluțiilor celei de-a doua ecuații.

b) Stabiliți relația între mulțimile S_1 și S_2.

8 Pentru $x \in \mathbb{R}$, demonstrați că următoarele perechi de ecuații sunt echivalente:

a) $-1{,}5\cdot x+0{,}75=0$ și $\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{4}=0$;

b) $\sqrt{2}\cdot x+\sqrt{8}=0$ și $-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot x-\frac{2\sqrt{3}}{3}=0$.

9 Demonstrați că următoarele perechi de ecuații nu sunt echivalente:

a) $3x - 6 = 0$ și $6x - 3 = 0$;

b) $\frac{x}{\sqrt{5}}+\sqrt{5}=0$ și $9x + 1{,}6 = 0$.

10 Determinați numărul real a astfel încât ecuațiile

$0{,}1\cdot x+\frac{6}{5}=0$ și $\frac{3}{4}\cdot x+a=0$, să fie echivalente.

11 Rezolvați, în $\mathbb{Z}$, ecuațiile:

a) $3x + 7 = x + 21$; b) $0{,}5x + 3 = 0{,}25x + 4$;

c) $2\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot x=\sqrt{48}$; d) $(x-2)\cdot\left(x+\sqrt{2}\right)=0$;

e) $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=2\cdot 3$; f) $-3 \cdot (x + 1) = 2 \cdot (x + 6)$;

g) $\frac{x-1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{x-5}{6}+\frac{1}{12}$.

12 Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuațiile:

a) $\sqrt{3}\cdot x+3=0$; b) $-\sqrt{5}\cdot x+10=\sqrt{20}\cdot x-20$;

c) $\frac{y-\sqrt{2}}{3}+\frac{y+\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}+y$;

d) $\left(y-\sqrt{3}\right)\cdot\left(y-\sqrt{5}\right)=0$; e) $\left|7-\sqrt{7}\cdot x\right|=14$.

13 Rezolvați, în $\mathbb{Q}$, ecuațiile:

a) $\frac{1}{2}\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}\cdot\left(x-\frac{1}{6}\right)$;

b) $\sqrt{3}\cdot x+1=x+\sqrt{3}$; c) $\frac{x-2}{3}=\frac{4-x}{2}$;

d) $\frac{x-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$;

e) $\frac{3y+7}{5}-0{,}1+\frac{3-2y}{2}=0{,}3\cdot(4y-5)$.

14 Determinați mulțimea soluțiilor reale pentru fiecare dintre ecuațiile următoare:

a) $\frac{7}{x-3}=\frac{8}{x-5}$; b) $\left(x+\sqrt{2}\right)^2=8$;

c) $|x-4|-|x+1|=0$;

d) $\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}+\frac{x+3}{4}+\ldots+\frac{x+9}{10}-9=0$.

15 a) Scrieți o ecuație care admite o singură soluție în mulțimea $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

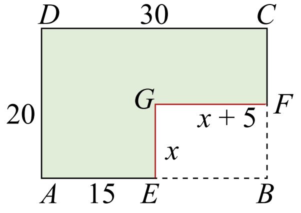
b) Scrieți o ecuație care admite o singură soluție în mulțimea $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$.

c) Scrieți o ecuație care admite o infinitate de soluții reale.

d) Scrieți o ecuație care nu admite nicio soluție reală.

16 Determinați numărul real m pentru care numărul -3 este soluție a ecuației $x - 2 = m \cdot x + 4$, având necunoscuta x.

17 a) Formulați o ecuație cu necunoscuta x, reductibilă la o ecuație de forma $a\cdot x+b=0$, folosind datele din figura de mai jos, știind că $ABCD$ și $BEGF$ sunt dreptunghiuri.



b) Rezolvați ecuația obținută la subpunctul a).

c) Determinați lungimile segmentelor GE și CF.

Evaluare sumativă

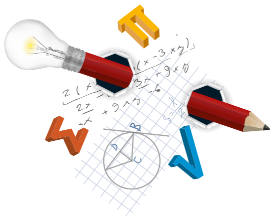
Se acordă 10 puncte din oficiu.

I. *La cerințele următoare alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.*

5p	**1.** Dintre ecuațiile următoare admite soluție numărul –2: A. $2 \cdot x - 4 = 0$ B. $\sqrt{3} \cdot x - \sqrt{12} = 0$ C. $\lvert -4 \rvert \cdot x = 8$ D. $5 \cdot x + 10 = 0$
5p	**2.** Ecuația $5 \cdot x + 3 = x - m$ admite soluția -1, pentru m egal cu: A. 1 B. 2 C. –1 D. –2
5p	**3.** Soluția ecuației $2 \cdot x - \frac{1}{2} = 3 \cdot x - \frac{1}{3}$ este numărul: A. 1 B. $-\frac{1}{3}$ C. 6 D. $-\frac{1}{6}$
5p	**4.** Valoarea numărului a, pentru care ecuațiile $8 - 3 \cdot x = 11$și $2 \cdot x + a = 3 \cdot a \cdot x + 10$ sunt echivalente, este: A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
5p	**5.** Soluția ecuației $\lvert 3 \cdot x - 1 \rvert + 1 = 6$ este mulțimea: A. $\left\{-\frac{4}{3}, 2\right\}$ B. $\left\{-\frac{3}{4}, 2\right\}$ C. $\left\{-\frac{4}{3}, -1\right\}$ D. $\left\{-\frac{3}{4}, -2\right\}$
5p	**6.** Dacă $\sqrt{x + 222} = 22$, atunci x este: A. 264 B. 262 C. –200 D. 200

II. *La problemele următoare se cer rezolvări complete.*

	1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:
10p	a) $5 \cdot \{4 \cdot [3 \cdot (2 \cdot x + 1) + 1] + 1\} - 44 = 876$
10p	b) $\frac{x-1}{4} + 1 = x - \frac{x-3}{2} + 0,25$
10p	c) $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (x - 2) + \sqrt{48} = \sqrt{12}$
10p	d) Stabiliți dacă printre cele trei ecuații există ecuații echivalente.
	2. Fie numerele $n = \frac{3 \cdot a + 19}{5}$ și $m = \frac{2 \cdot a + 91}{5}$, unde a este număr natural.
10p	a) Dacă $n \in \mathbb{N}$, arătați că și $m \in \mathbb{N}$.
10p	b) Determinați numărul $a \in \mathbb{N}$ pentru care n și m sunt numere naturale consecutive.



2.3 Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute. Rezolvarea prin metoda substituției și/sau prin metoda reducerii

L1 Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute

Rezolvăm și observăm

Problemă:
La o partidă de baschet, Adrian marchează în total 20 de puncte din aruncări de 3 puncte și din aruncări de 2 puncte (cel puțin una de fiecare fel).
Aflați câte aruncări de 3 puncte și câte aruncări de 2 puncte a reușit Adrian.

Reformulare:
Dacă vom nota cu x numărul aruncărilor reușite de 3 puncte și cu y numărul aruncărilor reușite de 2 puncte, atunci trebuie să aflăm valorile naturale nenule ale lui x și ale lui y pentru care are loc egalitatea $3x+2y=20$.

Soluție: Cum x și y sunt numere naturale nenule, deducem ușor că x este număr par și că $2 \le x \le 6$.
Vom obține: $x=2$ și $y=7$ sau $x=4$ și $y=4$ sau $x=6$ și $y=1$.
Această scriere a soluțiilor nu este una practică și poate fi înlocuită cu: (2, 7), (4, 4), (6, 1).

Analizând problema rezolvată, putem observa:

a) Ecuația $3x+2y=20$ stabilește dependența între punctajul total, de 20 de puncte, numărul aruncărilor reușite de 3 puncte și numărul aruncărilor reușite de 2 puncte.
b) Ecuația are mai multe soluții, deci și problema are mai multe soluții.
c) Fiecare valoare atribuită lui x realizează egalitatea (verifică ecuația) doar împreună cu o anumită valoare atribuită lui y. Deci fiecare soluție a ecuației (și a problemei) constă într-o pereche de numere, scrise în ordinea în care apar necunoscutele în ecuație (o *pereche ordonată*).

Se numește **ecuație liniară** cu două necunoscute o ecuație de forma $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$, unde a, b, c sunt numere reale.
Numerele reale a, b, c se numesc **coeficienții ecuației**, c se mai numește și **termenul liber** al ecuației, iar x și y, în această ordine, sunt **necunoscutele** ecuației.

***Observații*:**

a) Necunoscutele x și y desemnează numere reale sau elemente ale unor submulțimi de numere reale.
b) Necunoscutele se pot nota și cu alte litere. Este, însă, esențială ordinea în care acestea apar în ecuație.

Exemplu: Completați căsuțele libere ale tabelului:

Ecuația		necunoscutele	coeficienții	termenul liber
1) $2x+3y-8=0$		x și y	$a=2;\ b=3;\ c=-8$	$c=-8$
2) $9x-4{,}5y=1 \Leftrightarrow 9x-4{,}5y-1=0$				
3) $y\sqrt{3}+2t=-1 \Leftrightarrow$		y și t		
4) ………………….. = 0		x și y	$a=-1;\ b=\sqrt{2};\ c=1-\sqrt{2}$	$c=1-\sqrt{2}$

Ne propunem să răspundem la următoarele întrebări:

1) Ce reprezintă o soluție a unei ecuații liniare cu două necunoscute?
2) Câte soluții are o astfel de ecuație?

Rezolvăm și observăm

1) Determinați numerele naturale x și y pentru care $x - y = 5$.

Observăm că: $5 - 0 = 5$; $6 - 1 = 5$; $7 - 2 = 5$; $8 - 3 = 5$; $9 - 4 = 5$ …

Pentru fiecare număr natural $x \geq 5$, găsim numărul natural $y = x - 5$, astfel încât să aibă loc egalitatea. Fiecare pereche ordonată de numere **naturale** $(x,\ x - 5)$ va fi o soluție a ecuației.

2) Determinați numerele reale x și y pentru care $x - y = 5$.

Pe lângă perechile de numere identificate la **1)**, pentru fiecare număr real x, găsim numărul real $y = x - 5$, astfel încât să aibă loc egalitatea. Fiecare pereche ordonată de numere **reale** $(x,\ x - 5)$ va fi o soluție a ecuației.

Exemple de soluții: $(8{,}7;\ 3{,}7)$, $(5+\sqrt{2};\ \sqrt{2})$.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Comentariu: Să remarcăm faptul că *soluțiile ecuațiilor* liniare cu două necunoscute sunt perechi de numere.

Scriind că $(0, 7)$ este soluție a ecuației, vom înțelege că dacă primei necunoscute (de regulă x), i se atribuie valoarea 0, iar celei de-a doua necunoscute (de regulă y) i se atribuie valoarea 7, atunci se obține egalitate (este verificată ecuația).

a) Perechea (a, b) este ordonată dacă și numai dacă pentru $a \neq b$ are loc $(a, b) \neq (b, a)$.	**Exemplu:** $(1, 3) \neq (3, 1)$
b) Două perechi ordonate (a, b) și (c, d) **sunt egale** dacă și numai dacă $a = c$ și $b = d$.	**Exemplu:** Perechile $(4^2, 1^5)$ și $(2^4, 5^0)$ sunt egale
Se numește **soluție** a unei ecuații liniare cu două necunoscute *o pereche ordonată* de numere care verifică acea ecuație.	**Exemplu:** Perechile $(0, 7)$, $(1, 5)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$ sunt singurele soluții ale ecuației $2x + y = 7$, unde x și y sunt numere naturale scrise cu o cifră.
Dacă x și y desemnează numere reale, atunci ecuația de gradul întâi cu două necunoscute are o **infinitate de soluții**.	**Exemplu:** Orice pereche de forma $(\alpha, 7 - 2\alpha)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$, este soluție a ecuației $2x + y = 7$, unde $x, y \in \mathbb{R}$.
Dacă $a = 0$, ecuația devine $0 \cdot x + b \cdot y + c = 0$, iar soluțiile ecuației sunt de forma $\left(x, -\frac{c}{b}\right)$.	Dacă $b = 0$, ecuația devine $a \cdot x + 0 \cdot y + c = 0$, iar soluțiile ecuației sunt de forma $\left(-\frac{c}{a}, y\right)$.

Mulțimea tuturor perechilor ordonate care verifică ecuația se numește **mulțimea soluțiilor** ecuației.

O ecuație liniară cu două necunoscute se obține, de fapt, formulând matematic modul în care depind una de alta două mărimi.

***Problemă*:** Pe scara A a blocului în care locuiește Sorana, sunt 16 apartamente de câte 2 sau 3 camere, în total 36 de camere. Aflați câte apartamente au două camere și câte apartamente au trei camere.

Soluție: Considerăm x numărul apartamentelor cu două camere și y numărul apartamentelor cu 3 camere.
Atunci, $x + y = 16$ și $2x + 3y = 36$.
Cum x și y reprezintă numere naturale, este ușor să observăm că $x = 12$ și $y = 4$.

S-au stabilit următoarele convenții:

1) Se scriu ecuațiile una sub alta, asociate printr-o acoladă, înțelegând prin asta faptul că trebuie să fie satisfăcute simultan.
2) Ordinea termenilor este aceeași în cele două ecuații. Vom spune că am scris un sistem de două ecuații liniare, cu două necunoscute.
3) Scriem soluțiile sistemului, ca și la ecuațiile liniare, sub formă de perechi ordonate.

Două ecuații liniare cu două necunoscute formează un **sistem de ecuații liniare cu două necunoscute**. Forma generală a unui sistem de ecuații liniare cu două necunoscute este $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, unde $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$.

Numerele $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ se numesc coeficienții sistemului; a_1, b_1, a_2, b_2 se numesc **coeficienții necunoscutelor**, iar c_1, c_2 se numesc **termeni liberi.**

Definiție: **O pereche ordonată** de numere reale se numește **soluție a sistemului** dacă este soluție pentru ambele ecuații care formează sistemul.

Exemple:

1) $\begin{cases} x + 5y = 8 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x + 7y - 5 = 0 \\ 2x - 4y + 9 = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} -x\sqrt{2} - y = 1 \\ 2x\sqrt{2} + y = 1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$

Exemplu:
Pentru sistemul 3) de mai sus, $a_1 = 3,\ b_1 = 7,\ c_1 = 5,$ $a_2 = 2,\ b_2 = -4,\ c_2 = -9.$

Exemplu: $3 + 5 \cdot 1 = 8$ și $2 \cdot 3 + 1 = 7$, deci perechea (3,1) este soluție a sistemului $\begin{cases} x + 5y = 8 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$.

A rezolva un sistem înseamnă a găsi mulțimea tuturor soluțiilor sale. Mulțimea soluțiilor unui sistem de ecuații este intersecția mulțimilor soluțiilor celor două ecuații.

Două sisteme de ecuații liniare se numesc **echivalente** dacă au aceeași mulțime de soluții.

Observație: Dacă înlocuim o ecuație a sistemului cu o ecuație echivalentă cu ea, sau dacă înlocuim ambele ecuații ale sistemului cu ecuații echivalente, obținem un sistem echivalent cu cel inițial.
Exemplu: Fie sistemul:
$\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 7x - 6y = 20 \end{cases}$. Prin transformările $\begin{cases} 3x + 4y = 2 & \mid \cdot 3 \\ 7x - 6y = 20 & \mid \cdot 2 \end{cases}$ obținem sistemul echivalent $\begin{cases} 9x + 12y = 6 \\ 14x - 12y = 40 \end{cases}$.

Prin adunarea membru cu membru a ecuațiilor unui sistem se obține o nouă ecuație.

Dacă înlocuim una din ecuațiile sistemului cu această nouă ecuație, se obține un sistem echivalent cu cel inițial.

Exemplu: Fie sistemul $\begin{cases} -5x + 9y = 4 \\ 7x - 5y = 2 \end{cases}$. Adunând membru cu membru cele două ecuații obținem $2x + 4y = 6$.

Sistemele $\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 7x - 5y = 2 \end{cases}$ și $\begin{cases} -5x + 9y = 4 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$ sunt echivalente cu cel inițial. Este suficient să determinăm mulțimea soluțiilor unuia dintre ele.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Verificați care dintre perechile (4, 7), (3, –4), (2, –7), (7, 4) sunt soluții ale ecuației $4x - 2y = 20$.

2 Verificați care dintre perechile $(\sqrt{3}, 1), (1, \sqrt{3}), (2\sqrt{3}; -0{,}5), (-\sqrt{3}, 4)$ sunt soluții ale ecuației $x\sqrt{3} + 2y = 5$.

3 Arătați că perechea $(3 - 2m, m)$, unde $m \in \mathbb{R}$, este soluție a ecuației $x + 2y = 3$.

4 Verificați dacă perechea de numere $(2\sqrt{2}, 0)$ este soluție a sistemului de ecuații:
$\begin{cases} x\sqrt{2} - y = 4 \\ 0{,}5 \cdot x + 5y = \sqrt{2} \end{cases}$.

5 Se consideră sistemele de două ecuații liniare, cu necunoscutele x și y:

1) $\begin{cases} x + y = 9 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x - y = 1 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$.

Alegeți, prin verificare, sistemul pentru care perechea (5; 4) este soluție.

6 a) Determinați două perechi de numere naturale care verifică egalitatea $(2x + y - 4)^2 = 0$.

b) Scrieți într-un sistem, ecuațiile obținute din egalitatea $|x - y + 1| + (2x + y - 4)^2 = 0$.

c) Verificați dacă perechile găsite la subpunctul a) sunt soluții ale sistemului obținut.

L2 Metoda substituției și metoda reducerii

Ne amintim

Considerăm un sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute.

- Dacă înlocuim una sau ambele ecuații ale sistemului cu ecuații echivalente, obținem un sistem echivalent cu cel inițial.
- Prin adunarea membru cu membru a celor două ecuații ale sistemului se obține o nouă ecuație.
- Dacă înlocuim una din ecuațiile sistemului cu această nouă ecuație, se obține un sistem echivalent cu cel inițial.

A rezolva un sistem de ecuații liniare înseamnă a determina mulțimea tuturor soluțiilor sale.

Se folosesc, de regulă, **metoda reducerii** sau **metoda substituției** și tehnici de transformare a egalităților în egalități echivalente.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Metoda substituției - Algoritm de rezolvare

1. Se alege necunoscuta pe care vrem să o înlocuim (să o substituim).	Fie sistemul $\begin{cases} x-3y=2 \\ 2x-7y=3 \end{cases}$. Alegem să înlocuim necunoscuta *x*.
2. Folosind una dintre ecuații, se exprimă necunoscuta aleasă în funcție de cealaltă.	Din prima ecuație deducem $x = 2 + 3y$.
3. Se înlocuiește în ecuația rămasă necunoscuta aleasă, folosind relația găsită.	În ecuația $2x - 7y = 3$ vom înlocui pe *x* cu $2 + 3y$ și obținem $2(2 + 3y) - 7y = 3$
4. Se rezolvă ecuația obținută și se află una dintre necunoscute.	$4 + 6y - 7y = 3$ $-y = -1$ $y = 1$
5. Se înlocuiește valoarea găsită în una dintre ecuații și se află cealaltă necunoscută.	În relația $x = 2 + 3y$, înlocuim pe *y* cu 1 și obținem $x = 5$.
6. Se scrie soluția sistemului.	$x = 5$, $y = 1$, deci $S = \{(5, 1)\}$.

Metoda reducerii - Algoritm de rezolvare

1. Dacă este necesar, se rescriu ecuațiile astfel încât necunoscutele notate cu aceeași literă să fie plasate pe aceeași poziție (*x* sub *x* și *y* sub *y*).	Sistemul $\begin{cases} 7y+2x=8 \\ 3x-4y=5 \end{cases}$ se rescrie $\begin{cases} 2x+7y=8 \\ 3x-4y=5 \end{cases}$.
2. Se alege una dintre necunoscute cu scopul de a o reduce.	$\begin{cases} 2x+7y=8 \\ 3x-4y=5 \end{cases}$. Alegem necunoscuta *x*.
3. Dacă este necesar, se înmulțesc sau se împart ecuațiile cu numere nenule, astfel încât coeficienții necunoscutei alese să devină numere opuse, în cele două ecuații.	$\begin{cases} 2x+7y=8 & \vert\cdot 3 \\ 3x-4y=5 & \vert\cdot(-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x+21y=24 \\ -6x+8y=-10 \end{cases}$

4. Se adună cele două ecuații și se reduce necunoscuta aleasă.

$$\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 6x+21y=24 \\ -6x+8y=-10 \end{array}\right. \; (+) \\ \hline \quad 29y=14 \end{array}$$

5. Se rezolvă ecuația obținută.

$$y=\frac{14}{29}$$

6. Se reiau pașii 3, 4 și 5 pentru cealaltă necunoscută.

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+7y=8 \,|\cdot 4 \\ 3x-4y=5 \,|\cdot 7 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 8x+28y=32 \\ 21x-28y=35 \end{array}\right. (+)$$

$$29x=67 \Rightarrow x=\frac{67}{29}$$

7. Se scrie soluția sistemului.

$$x=\frac{67}{29},\; y=\frac{14}{29} \text{ și } S=\left\{\left(\frac{67}{29},\frac{14}{29}\right)\right\}$$

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Observație: În practică, pentru economie de timp, pasul 6 din algoritmul de rezolvare prin metoda reducerii poate fi înlocuit cu: „Se înlocuiește valoarea aflată într-una din ecuații și se află cealaltă necunoscută”.

Exemplu: $$\left\{\begin{array}{l} 5x-3y=7 \quad |\cdot 2 \\ 3x+2y=8 \quad |\cdot 3 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 10x-6y=14 \\ 9x+6y=24 \end{array}\right. \; (+) \\ \hline 19x \qquad =38 \Rightarrow x=2 \end{array}$$

Înlocuim pe x cu 2 în ecuația $3x+2y=8$ și obținem $6+2y=8$, deci $y=1$ și $S=\{(2,1)\}$.

Un sistem de ecuații liniare cu două necunoscute poate avea:

a) o singură soluție

a) Sistemul $\left\{\begin{array}{l} 3x+2y=8 \\ 5x-3y=7 \end{array}\right.$ are soluția unică $S=\{(2,1)\}$.

b) o infinitate de soluții

b) Sistemul $\left\{\begin{array}{l} x+2y=9 \\ -2x-4y=-18 \end{array}\right.$ are o infinitate de soluții.

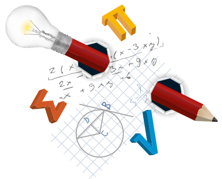
Ecuațiile care îl alcătuiesc sunt echivalente.

$$S=\left\{\left(m,\frac{9-m}{2}\right) \middle|\, m\in\mathbb{R}\right\} \text{ sau } S=\{(9-2a,a)\mid a\in\mathbb{R}\}$$

c) poate să nu aibă nicio soluție

c) Sistemul $\left\{\begin{array}{l} x+2y=8 \\ x+2y=5 \end{array}\right.$ nu are nicio soluție. Scăzând cele două ecuații, obținem o propoziție falsă: „$8-5=0$”. Deci $S=\varnothing$.

Observație: Dacă $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$, a' și b' fiind nenule, atunci sistemul $\left\{\begin{array}{l} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{array}\right.$ are soluție unică.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Se consideră sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} x = 2 \\ y + 1 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 4 \end{cases}$

Rezolvați sistemele și scrieți mulțimea soluțiilor pentru fiecare sistem.

2 Scrieți un sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute, care să admită soluția $(1; -1)$.

3 Scrieți următoarele sisteme de ecuații liniare într-o formă convenabilă, apoi rezolvați-le, prin metoda substituției.

a) $\begin{cases} 2x - 3y + 5 = 0 \\ 3x + y + 13 = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{2x + y - 1}{x + 2} = 2 \\ 5x - y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} = 2 \\ -x + y = 1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + y = 12 \\ \dfrac{1}{x} - 2y = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2(x + y - 1) - y = -3 \\ 3(x - y) - y = -3x \end{cases}$

4 Rezolvați prin metoda substituției:

a) $\begin{cases} 2(x + y + 1) - 3(2x - y - 3) = 12 \\ 4(2x - y - 1) + 3(3 - x - y) = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{2} \cdot x + \sqrt{5} \cdot y = 7 \\ \sqrt{5} \cdot x - \sqrt{2} \cdot y = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{x + 3}{y - 1} = \dfrac{x}{y - 8} \\ x - 4 \cdot y = 6 \end{cases}$

5 Se consideră numerele reale x, y care verifică simultan ecuațiile:

(1) $x + y = 101$ (2) $x - y = 23$

a) Adunați, membru cu membru, cele două egalități, rezolvați ecuația obținută și aflați valoarea reală a lui x.

b) Scădeți, membru cu membru, cele două egalități, rezolvați ecuația obținută și aflați valoarea reală a lui y.

c) Scrieți mulțimea soluțiilor sistemului format cu cele două ecuații liniare.

6 Rezolvați, prin metoda reducerii, următoarele sisteme de ecuații liniare:

a) $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 8x - 2y = -2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + 1 = 3y - 7 \\ 3(x - y) + 1 = x + y - 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y = -10 \\ -x + 2y = -5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 6x + 7y = 4 \\ -2x + 9y = -24 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y = 7{,}5 \\ 5x + y = -4{,}1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3x + 11y = -1 \\ -2x + 9y = 17 \end{cases}$

7 Rezolvați, prin metoda reducerii, următoarele sisteme de ecuații liniare:

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + y = 13 \\ -\dfrac{x}{2} + y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{x}{6} - \dfrac{y}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x + \dfrac{y}{3} = 0,(3) \\ \dfrac{x}{2} - y = -\dfrac{25}{18} \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3(x + y - 1) = 2x - y + 6{,}5 \\ -2x + 9y = -24 \end{cases}$

8 Determinați numerele reale a și b pentru fiecare din situațiile:

a) $|a - 1| + |a^2 - b^2| = 0$

b) $\left|\dfrac{a - 2}{b - 3} - \dfrac{1}{5}\right| + \left|\dfrac{a + 3}{b + 4} - \dfrac{2}{5}\right| = 0.$

9 Rezolvați următoarele sisteme de ecuații liniare, prelucrând mai întâi ecuațiile și alegând convenabil metoda de rezolvare.

a) $\begin{cases} 2 \cdot (x - 1) + 3 \cdot \left(y + \dfrac{1}{3}\right) = 4 \\ 12 - 6 \cdot \left(y - \dfrac{1}{3}\right) = 4 \cdot (x + 1) \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - \dfrac{3}{4} \cdot (x - y + 1) = y - 2 \\ y - \dfrac{2}{3} \cdot (y - x - 1) = x + 3 \end{cases}$

Evaluare sumativă

Se acordă 10 puncte din oficiu.

I. *La cerințele următoare alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.*

5p	**1.** Perechea (3, 1) este soluție a ecuației: A. $3 \cdot x + y = 11$ B. $3 \cdot x - y = 11$ C. $3 \cdot x + y = 10$ D. $3 \cdot x - y = 11$
5p	**2.** Sistemul $\begin{cases} a \cdot x + y = 5 \\ 2 \cdot x + b \cdot y = 7 \end{cases}$ admite soluția (–1, 3). Atunci, $a + b$ este: A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
5p	**3.** Soluția sistemului $\begin{cases} 4 \cdot x + y = 7 \\ 2 \cdot x - y = 5 \end{cases}$ este perechea de numere: A. (2, 1) B. (1, 2) C. (2, –1) D. (–1, 2)
5p	**4.** Numerele reale a și b care verifică egalitatea $\lvert a - b + 1 \rvert + \lvert a + 2 \cdot b - 3 \rvert = 0$, sunt: A. $a = \frac{4}{3}, b = \frac{1}{3}$; B. $a = -\frac{1}{3}, b = \frac{4}{3}$; C. $a = \frac{1}{3}, b = -\frac{4}{3}$; D. $a = \frac{1}{3}, b = \frac{4}{3}$.
5p	**5.** Numărul $\overline{ab}$ care are suma cifrelor 13 și verifică egalitatea $\overline{ab} - \overline{ba} = 27$, este: A. 85 B. 76 C. 49 D. 94
5p	**6.** Are loc egalitatea $2 \cdot a \cdot \sqrt{5} + b - 1 = b \cdot \sqrt{5} - 3 + a$ pentru: A. $a = -2, b = 4$ B. $a = -2, b = -4$ C. $a = 2, b = 4$ D. $a = 2, b = -4$

II. *La problemele următoare se cer rezolvări complete.*

20p 1. Fie ecuația $3x - 4y + 5 = 0$. Completați tabelul alăturat astfel încât fiecare pereche (x, y) să fie soluție a ecuației.

x	–3		0,6		$1+4\sqrt{2}$	
y		–1		1,4		a

20p **2.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul de ecuații $\begin{cases} x + \dfrac{5 \cdot y - 1}{3} = -\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{2 \cdot x + 3}{2} - 3 \cdot y = 10{,}5 \end{cases}$.

20p **3.** Aflați numerele reale a și b știind că $\frac{a+1}{b} = \frac{1}{4}$, $\frac{a}{b+1} = \frac{1}{5}$ și $b \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

2.4 Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau al sistemelor de ecuații liniare

Ne amintim

Multe dintre problemele întâlnite în practică pot fi rezolvate matematic, fie prin metode aritmetice, fie prin metode algebrice.

Atunci când problema poate fi reformulată printr-o ecuație liniară cu *o necunoscută* și cu *coeficienți raționali*, iar soluțiile problemei sunt numere raționale, rezolvarea problemei presupune respectarea algoritmului alăturat.

Pasul 1. Stabilirea necunoscutei

Pasul 2. Scrierea ecuației

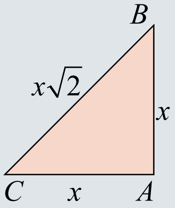
Pasul 3. Rezolvarea ecuației

Pasul 4. Verificarea soluției și interpretarea rezultatului

Vom deduce algoritmul de rezolvare a unei probleme în următoarele situații:

1) atunci când problema poate fi reformulată printr-o ecuație liniară cu *o necunoscută* și cu *coeficienți reali*, iar soluțiile problemei sunt numere reale;
2) atunci când problema poate fi reformulată printr-un set de *două ecuații liniare cu două necunoscute* și cu *coeficienți reali* (un sistem de două ecuații liniare, cu două necunoscute), iar soluțiile problemei sunt perechi de numere reale.

Problemă: Un triunghi dreptunghic isoscel are perimetrul $6+3\sqrt{2}$ (m). Aflați laturile triunghiului.



Soluție: Vom rezolva problema urmând algoritmul descris mai sus.

Pasul 1. Notăm cu x lungimea unei catete (*necunoscuta*).

Pasul 2. Folosind teorema lui Pitagora, lungimea ipotenuzei este $x\sqrt{2}$.

Perimetrul triunghiului este $\mathcal{P} = x + x + x\sqrt{2}$

Am identificat *ecuația*: $2x + x\sqrt{2} = 6 + 3\sqrt{2}$

Pasul 3. $2x + x\sqrt{2} = 6 + 3\sqrt{2} \Leftrightarrow x\left(2+\sqrt{2}\right) = 3\left(2+\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow x = 3$.

Pasul 4. $x = 3 \Rightarrow AB = AC = 3$ (m) și $BC = 3\sqrt{2}$ (m).

Verificare: $\mathcal{P} = x + x + x\sqrt{2} = 3 + 3 + 3\sqrt{2} = 6 + 3\sqrt{2}$ (m)

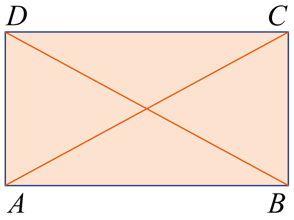
Să nu ne pripim!

Uneori, verificarea soluției este omisă, ea nefiind obligatorie.
Totuși, este foarte utilă, deoarece permite corectarea eventualelor greșeli.

Problema 1: Darius trebuie să realizeze un cadru dreptunghiular și diagonalele acestuia dintr-o tijă metalică cu lungimea de 10 m, folosind toată tija, ca în figura alăturată. Lungimea dreptunghiului este egală cu dublul lățimii.

a) Arătați că lungimea dreptunghiului este mai mică de doi metri.

b) Cu ajutorul calculatorului, exprimați lungimea dreptunghiului prin rotunjire, la două zecimale.



Soluție: a) Notăm cu x lățimea dreptunghiului, deci $AD = BC = x$ și $AB = DC = 2x$.

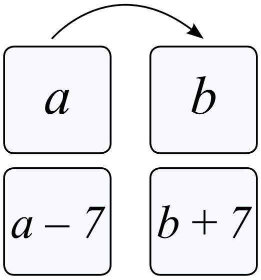
Din teorema lui Pitagora, se obține $AC = BD = x\sqrt{5}$.

Avem: $AB + BC + CD + AD + AC + BD = 10 \Rightarrow 6x + 2x\sqrt{5} = 10 \,\big|\, : 2 \Rightarrow 3x + x\sqrt{5} = 5$, adică $x = \dfrac{5}{3+\sqrt{5}}$.

Din $\sqrt{5} > 2,$, rezultă $3+\sqrt{5} > 5$, deci $x = \dfrac{5}{3+\sqrt{5}} < \dfrac{5}{5} = 1$ și $2x < 2$. Lungimea este $AB = 2x$, prin urmare este mai mică de 2 metri.

b) Cu ajutorul calculatorului, obținem lungimea dreptunghiului $AB = 2x \approx 1{,}91$.

Problema 2*:* Andrei și Bogdan au împreună 100 de lei. Dacă Andrei îi dă lui Bogdan 7 lei, Andrei va avea triplul sumei lui Bogdan. Ce sumă avea fiecare la început?



Soluție: Notăm cu a suma de bani pe care a avut-o Andrei și cu b suma pe care a avut-o Bogdan. Atunci, $a + b = 100$. După ce Andrei îi dă lui Bogdan 7 lei, sumele vor fi $a - 7$, respectiv $b + 7$. Deoarece suma lui Andrei devine egală cu triplul sumei lui Bogdan, avem $a - 7 = 3(b + 7)$.

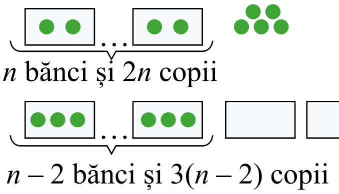
Obținem sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} a+b=100 \\ a-7=3(b+7) \end{cases}$. Rezolvând sistemul, obținem $a = 82$ și $b = 18$, adică Andrei a avut 82 de lei și Bogdan a avut 18 lei.

Problema 3*:* Dacă elevii unei clase se așază câte doi în bancă, vor rămâne cinci elevi în picioare. Dacă se așază câte trei într-o bancă, vor rămâne două bănci libere. Aflați numărul elevilor din clasă.

Soluție: Notăm x = numărul elevilor și n = numărul de bănci.

Obținem sistemul $\begin{cases} 2n+5=x \\ 3(n-2)=x \end{cases}$

$\Rightarrow 2n + 5 = 3(n - 2) \Rightarrow n = 11$ și $x = 27$



$\Rightarrow 2n + 5 = x$

$\Rightarrow 3(n - 2) = x$

Problema 4: Un bazin al unui ștrand poate fi umplut, folosind două robinete cu debit constant, în 5 ore. Dacă unul dintre robinete funcționează 7 ore singur, apoi este deschis și al doilea, atunci ar fi nevoie de încă trei ore pentru ca, împreună, să umple bazinul. Aflați în câte ore ar umple bazinul fiecare robinet.

Soluție: Notăm cu t_1 timpul (exprimat în ore) necesar umplerii bazinului prin funcționarea primului robinet și cu t_2 timpul necesar umplerii bazinului prin funcționarea celui de-al doilea robinet. Fie C capacitatea bazinului.

Cantitatea de apă care curge, într-o oră, prin fiecare dintre cele două robinete este $\dfrac{C}{t_1}$, respectiv $\dfrac{C}{t_2}$.

Se formează sistemul de ecuații: $\begin{cases} 5\cdot\dfrac{C}{t_1}+5\cdot\dfrac{C}{t_2}=C \;|:C \\ 7\cdot\dfrac{C}{t_1}+3\cdot\dfrac{C}{t_1}+3\cdot\dfrac{C}{t_2}=C \;|:C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5}{t_1}+\dfrac{5}{t_2}=1 \\ \dfrac{10}{t_1}+\dfrac{3}{t_2}=1 \end{cases}$

În exemplul nostru, notăm $\dfrac{1}{t_1}=x$ și $\dfrac{1}{t_2}=y$ și obținem sistemul $\begin{cases} 5x+5y=1 \\ 10x+3y=1 \end{cases}$, cu soluția $x=\dfrac{2}{35}$ și $y=\dfrac{1}{7}$.

Revenind, $t_1 = 17{,}5$ și $t_2 = 7$.
În concluzie, primul robinet poate umple bazinul în 17,5 ore, iar cel de-al doilea poate umple bazinul în 7 ore.

Observație: Unele probleme pot conduce la sisteme care nu au forma celor studiate de noi. Pentru rezolvarea acestora, se pot face unele transformări, artificii, notații care permit tratarea lor ca sisteme de ecuații liniare.

Problema 5: La festivitatea de absolvire a clasei a VII-a, s-au oferit premianților 18 buchete de flori, formate din 5 trandafiri albi sau din 7 trandafiri galbeni. Știind că, în total, au fost oferiți 116 trandafiri, aflați numărul buchetelor albe și numărul buchetelor galbene.

Soluție: Notăm cu x numărul buchetelor albe și cu y numărul buchetelor galbene. Rezultă $\begin{cases} x+y=18 \\ 5x+7y=116 \end{cases}$.

Rezolvând sistemul, obținem $x = 5$ și $y = 13$, deci s-au oferit 5 buchete albe și 13 buchete galbene.
Rezolvarea problemelor cu ajutorul ecuațiilor sau cu ajutorul sistemelor de ecuații liniare presupune parcurgerea algoritmului descris, sintetic, mai jos.

Reținem!

Pasul 1: Observarea și înțelegerea problemei Stabilirea și notarea necunoscutelor.	Se citește cu atenție enunțul. Se identifică ipoteza și concluzia. Se identifică mărimile necunoscute.
Pasul 2: „Traducerea” în limbaj matematic Scrierea ecuațiilor Scrierea sistemului de ecuații	Se exprimă cât mai clar legăturile dintre date, folosind desene, scheme, vizualizări. Se transpun în limbaj matematic relațiile dintre valorile mărimilor necunoscute.
Pasul 3: Realizarea raționamentului și redactarea Rezolvarea ecuației/sistemului de ecuații	Se rezolvă ecuația/sistemul de ecuații, folosind metoda substituției, metoda reducerii sau o variantă mixtă. Se redactează clar pașii parcurși, se scrie soluția sau mulțimea soluțiilor.
Pasul 4: Verificare și autoevaluare Verificarea soluției și interpretarea rezultatului	Se verifică soluția găsită, folosind ipoteza problemei. Se interpretează rezultatul.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Vlad și Dragoș au cumpărat un set de 60 de abțibilduri. Dragoș a cumpărat cu 12 abțibilduri mai multe decât Vlad. Determinați numărul abțibildurilor folosite de fiecare dintre cei doi copii, în două moduri.
a) cu ajutorul unei ecuații echivalente cu o ecuație de forma $a \cdot x + b = 0$;
b) cu ajutorul unui sistem de două ecuații liniare, cu două necunoscute.

2 Suma prețurilor de vânzare a două obiecte este 400 de lei. Dacă prețul primului obiect ar crește cu 15 lei, iar prețul celui de-al doilea s-ar micșora cu 5%, atunci suma prețurilor de vânzare ar rămâne neschimbată. Aflați prețul fiecărui obiect.

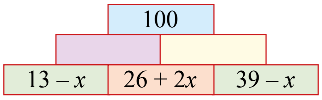
3 Dacă se micșorează un număr real a cu 10, apoi rezultatul se dublează, se obține același rezultat ca atunci când se împarte același număr la 3. Determinați numărul a.

4 Norma săptămânală a unui muncitor este de x piese. Dacă muncitorul ar realiza încă 40 de piese, acesta ar realiza triplul normei săptămânale. Aflați numărul x.

5 Un pahar are masa de 100 g, iar o cană are masa de 270 g. Aflați cum trebuie să distribuim 300 ml de apă în cele două recipiente, astfel încât, la final, acestea să aibă aceeași masă. (Considerăm că 1 l de apă cântărește 1 kg.)

6 Silviu locuiește în localitatea A, iar prietenul lui, Dan, locuiește în localitatea B. Distanța dintre localitățile A și B este de 12 km. Silviu și Dan au plecat, în același timp, din cele două localități, unul spre celălalt. În momentul în care cei doi prieteni s-au întâlnit, Silviu parcursese cu 800 de metri mai mult decât Dan. Aflați ce distanță a parcurs fiecare până în momentul întâlnirii.

7 În imaginea de mai jos, suma numerelor scrise în două căsuțe vecine este completată în căsuța situată deasupra lor.



a) Completați tabelul, apoi formulați ecuația corespunzătoare pentru a determina numărul *x*.

b) Rezolvați ecuația și scrieți în fiecare căsuță din tabel numerele descoperite.

8 Diferența a două numere naturale este 53. Împărțind pe unul dintre ele la celălalt, se obține câtul 3 și restul 1. Aflați cele două numere.

9 Într-o tabără, au sosit primii 400 de elevi, din care 60% sunt băieți. După 7 zile, câțiva băieți au plecat, numărul celor rămași fiind de două ori mai mare decât 60% din numărul fetelor. Aflați numărul băieților care au plecat din tabără.

10 În laboratorul de chimie, Cezara vrea să obțină un litru de soluție salină cu concentrația de 24%, prin amestec între o soluție cu concentrația de 20% și o altă soluție, cu concentrația de 30%. Determinați cantitățile de soluții (exprimate în litri) pe care trebuie să le folosească Cezara în acest scop.

11 Compuneți o problemă care să se rezolve:

a) cu ajutorul ecuației $\frac{x+5}{x}=\frac{4}{3}$;

b) cu ajutorul sistemului de ecuații $\begin{cases} x+3y=13 \\ 4x-y=11 \end{cases}$.

Evaluare sumativă

Se acordă 10 puncte din oficiu.

I. *La cerințele următoare alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.*

10p	**1.** Suma a cinci numere întregi impare consecutive este 2025. Cel mai mare dintre numere este: A. 407 B. 409 C. 411 D. 413
10p	**2.** Prețul unui obiect s-a redus cu 20 lei, apoi s-a mai redus o dată cu 20%. Ca să se ajungă la prețul inițial, ar trebui făcută o scumpire /majorare cu 30%. Prețul inițial a fost: A. 520 lei B. 525 lei C. 530 lei D. 540 lei
10p	**3.** Dan parcurge o distanță cu trei mijloace de transport astfel: $\frac{5}{6}$ din distanță cu trenul, $\frac{1}{9}$ din distanță cu feribotul și restul de 12 km cu taxiul. Distanța parcursă cu trenul este de: A. 220 km B. 210 km C. 230 km D. 216 km
10p	**4.** Pentru un spectacol s-au vândut 124 bilete de două categorii, bilete cu 12 lei și bilete cu 20 lei, încasându-se 1832 lei. Numărul biletelor cu 20 lei a fost: A. 41 B. 42 C. 43 D. 44

II. *La problemele următoare se cer rezolvări complete.*

10p	**1.** Numărătorul unei fracții ordinare este cu 4 mai mic decât numitorul. Dublând numărătorul și mărind numitorul cu 1 se obține o fracție echiunitară. Aflați fracția de la care se pornește.
20p	**2.** Ana și Maria au împreună o sumă de bani. Dacă Ana i-ar da Mariei o șesime din suma sa, atunci Maria ar avea jumătate din cât îi rămâne Anei. Dacă Maria i-ar da Anei o zecime din suma sa, atunci Ana ar avea cu 96 lei mai mult decât îi rămân Mariei. Aflați ce sumă de bani au împreună cele două fete.
20p	**3.** Suma inverselor a două numere raționale este $\frac{5}{6}$, iar diferența inverselor numerelor este $\frac{1}{6}$. Calculați suma și produsul numerelor.

3 Elemente de organizare a datelor

Competențe specifice:

1.3 2.3 3.3 4.3 5.3 6.3

3.1 Produsul cartezian a două mulțimi nevide. Sistem de axe ortogonale în plan

L1 Produsul cartezian a două mulțimi nevide

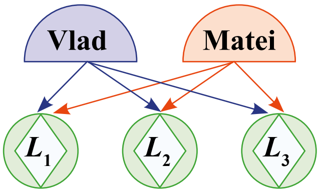
Ne amintim

Perechea (a, b) este ordonată dacă și numai dacă pentru $a \neq b$ are loc $(a, b) \neq (b, a)$.
Două perechi ordonate (a, b) și (c, d) **sunt egale** dacă și numai dacă $a = c$ și $b = d$.

Rezolvăm și observăm

Problema 1. În vacanță, Matei și Vlad își petrec diminețile în aceleași trei locuri de joacă din oraș, hotărând în fiecare zi, individual, unde doresc să meargă. Ei parcurg distanța până la locul de joacă pe trasee diferite.
a) Determinați numărul de trasee folosite de cei doi copii.
b) Determinați probabilitatea ca cei doi să meargă simultan în același loc de joacă.

Soluție: Notăm cu M locul în care este casa lui Matei și cu V locul în care este cea a lui Vlad. Notăm cu L_1, L_2, L_3 cele trei locuri de joacă. Vom avea traseele ilustrate în schița alăturată.



Fiecare drum determină o pereche ordonată, în care prima componentă este unul dintre copii, iar a doua componentă este locul de joacă spre care merge.
Fie $A = \{V, M\}$ și $B = \{L_1, L_2, L_3\}$. Identificăm mulțimea de perechi ordonate:
$\{(V, L_1), (V, L_2), (V, L_3), (M, L_1), (M, L_2), (M, L_3)\}$.
Notăm această mulțime $A \times B$ și citim: „Produsul cartezian al mulțimilor A și B”.
b) Sunt posibile următoarele cazuri de a merge la locurile de joacă:
$(L_1, L_1), (L_1, L_2), (L_1, L_3), (L_2, L_1), (L_2, L_2), (L_2, L_3), (L_3, L_1), (L_3, L_2), (L_3, L_3)$.
Dintre acestea, sunt favorabile cazurile: $(L_1, L_1), (L_2, L_2), (L_3, L_3)$.

Probabilitatea este $p = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} = 0,(3)$.

Problema 2. Sara și familia ei s-au mutat într-un apartament nou.
Pentru vopsirea celor patru pereți ai camerei, Sara are la dispoziție 2 culori: alb și mov.
Pentru a decide cum să coloreze pereții camerei, ea vrea să știe câte perechi există, astfel încât prima componentă să fie un perete al camerei, iar a doua componentă să fie culoarea asociată acestuia.

Soluție: Constatăm că fiecărui perete putem să-i asociem două culori, deci fiecare perete determină două perechi ordonate.
1) Notând cu p_1, p_2, p_3, p_4 cei patru pereți și cu a, respectiv m cele două culori, putem realiza tabelul:

peretele	p_1		p_2		p_3		p_4	
culoarea	a	m	a	m	a	m	a	m

2) Datele din tabel conduc la perechile: $(p_1, a), (p_1, m), (p_2, a), (p_2, m), (p_3, a), (p_3, m), (p_4, a), (p_4, m)$. Considerăm mulțimile $A = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ și $B = \{a, m\}$. Obținem mulțimea:
$\{(p_1, a), (p_1, m), (p_2, a), (p_2, m), (p_3, a), (p_3, m), (p_4, a), (p_4, m)\}$,
pe care o notăm cu $A \times B$.
Se pot forma 8 perechi ordonate corespunzătoare cerinței problemei.

Observație: În problemă, numărul perechilor ordonate care se pot forma *nu* reprezintă numărul posibilităților de colorare a camerei!
Fiecare posibilitate de colorare a camerei presupune să știm ce culoare va avea fiecare perete, numărul lor fiind 16 (cu regula produsului). Fiecare perete poate fi colorat în 2 moduri, deci pentru colorarea camerei (a celor 4 pereți) vom avea 2^4 posibilități.

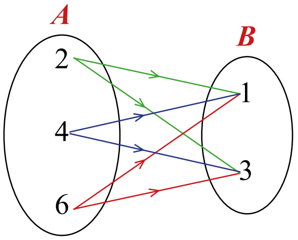
Descoperim, înțelegem, exemplificăm

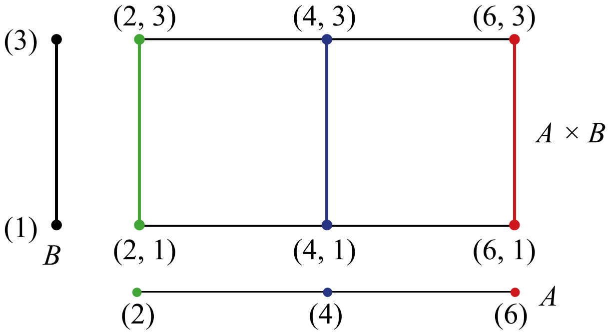
Definiție: Fie A și B două mulțimi nevide.
Se numește **produsul cartezian** al mulțimilor A și B și se notează $A \times B$ mulțimea perechilor (a, b) cu proprietatea că a este element al mulțimii A, iar b este element al mulțimii B.

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

Produsul cartezian poate fi reprezentat și sub forma unor diagrame care ilustrează atât asocierea, cât și sensul asocierii (ordinea componentelor perechilor).

Exemplu: Fie mulțimile $A = \{2, 4, 6\}$ și $B = \{1, 3\}$.
Atunci, $A \times B = \{(2,1), (2,3), (4,1), (4,3), (6,1), (6,3)\}$ se poate reprezenta sub forma următoarelor două diagrame.

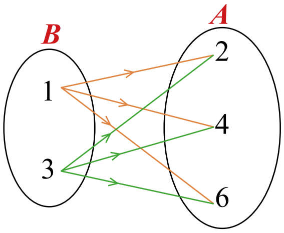




Numărul elementelor produsului cartezian $A \times B$ este $3 \cdot 2 = 6$.

Dacă A și B sunt mulțimi diferite, atunci $A \times B \neq B \times A$.

Exemplu: Pentru mulțimile $A = \{2, 4, 6\}$ și $B = \{1, 3\}$ de mai sus, avem:
$A \times B = \{(2,1), (2,3), (4,1), (4,3), (6,1), (6,3)\}$,
$B \times A = \{(1,2), (1,4), (1,6), (3,2), (3,4), (3,6)\}$.
Observați diagrama alăturată.



Dacă $A = B$ atunci $A \times A$ se notează și A^2. De exemplu $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

Fie mulțimile nevide A și B astfel încât card $A = a$ și card $B = b$. Observând exemplele de mai sus, deducem că fiecare dintre cele a elemente ale mulțimii A generează cu elementele mulțimii B exact $a \cdot b$ perechi.

Teoremă
Dacă A și B sunt mulțimi nevide și card $A = a$, card $B = b$, atunci card $A \times B = a \cdot b$.

$$\operatorname{card}(A \times B) = (\operatorname{card} A) \cdot (\operatorname{card} B)$$

Reținem!

- Pentru mulțimile nevide A și B se definește produsul lor cartezian $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$.
- Produsul cartezian se poate reprezenta și prin diagrame sau grafice.
- Dacă $A \neq B$, atunci $A \times B \neq B \times A$.
- Card $(A \times B) = (\text{card } A) \cdot (\text{card } B)$
- Card $(A \times B) = \text{card } (B \times A)$.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Fie A și B mulțimi nevide. Completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:

a) $A \times B = \{(a, b) \mid a \in \ldots, b \in \ldots\}$;

b) Dacă card $A = n$ și card $A = m$, atunci card $A \times B = \ldots$.

c) $A \times B \ldots B \times A$.

2 Fie mulțimile $A = \{-2; -1; 3\}$ și $B = \{0; 2\}$. Determinați $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$, $B \times B$.

3 Se consideră mulțimile:

$C = \{-3; 1\}$ și $D = \left\{x \in \mathbb{Z}^* \,\middle|\, |x| \le 2\right\}$.

Scrieți produsele carteziene $C \times D$ și $D \times C$.

4 Dacă $A \times B = \{(-4, 0), (-4, 2), (-4, 4), (-4, 6), (-2, 0), (-2, 2), (-2, 4), (-2, 6)\}$ determinați mulțimile A și B.

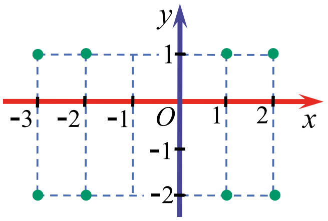
5 Dați patru exemple de mulțimi A și B, știind că mulțimea $A \times B$ are șase elemente.
În cazurile alese, mulțimea A să aibă număr diferit de elemente.

6 Determinați mulțimea

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,\middle|\, x + x \cdot y = -4\right\}.$$

7 Aflați mulțimile A și B știind că $A \times B = \{(-2, a), (-1, a), (-2, b), (-1, b), (-2, c), (-1, c)\}$ și a, b, c sunt cele mai mici numere întregi pozitive distincte, cu proprietatea $|c - a - b| = 0$.

8 Reprezentarea geometrică a produsului cartezian $A \times B$ este redată în figura de mai jos. Precizați elementele mulțimilor A și B.



9 Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale elementele mulțimilor:

$$M_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,\middle|\, |x| = 3,\ -3 < y < 1\right\};$$

$$M_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,\middle|\, |x| \le 1,\ y^2 = 4\right\};$$

$$M_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,\middle|\, (3x)^2 + y^2 = 10\right\}.$$

10 Fie mulțimile

$$A = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{3}{2x - 1} \in \mathbb{Z}\right\} \text{ și}$$

$$B = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{-4}{2x + 1} \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale mulțimea $B \times A$.

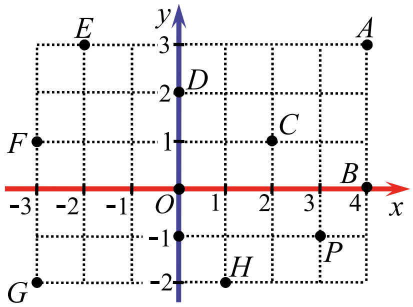
11 Echipa de organizare a Balului Bobocilor decide că are nevoie de doi prezentatori, o fată și un băiat. La selecție, participă 5 fete: Denisa, Elena, Larisa, Gabriela, Harieta și 3 băieți: Andrei, Liviu, Cristian.

a) Scrieți mulțimea F a numelor fetelor și mulțimea B a numelor băieților care au participat la selecție folosind pentru numele copiilor doar inițiala.

b) Scrieți mulțimea $F \times B$, apoi $B \times F$.

c) Aflați în câte moduri se poate alege perechea de prezentatori. Justificați răspunsul dat.

12 Pentru reprezentarea din figura de mai jos, identificați coordonatele punctelor marcate. Copiați desenul pe caiete și completați spațiile libere, urmând modelul: $A(4, 3)$.



L2 Sistem de axe ortogonale

Ne amintim

Se numește **axă** a numerelor o dreaptă pe care s-au fixat **o origine** (punctul O), **o unitate de măsură** și **un sens** de parcurgere. Distanța dintre două puncte A și B situate pe axă este $AB = |x_B - x_A|$.

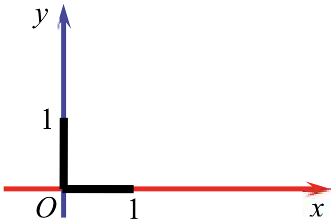
Puțină istorie

René Descartes, cunoscut și sub numele **Cartesius**, a fost filosof și matematician francez. A trăit între anii 1596–1650. De numele lui se leagă multe dintre conceptele științifice. Între numeroasele contribuții în matematică este și crearea ***geometriei analitice***, acea ramură a matematicii care studiază **geometria** utilizând **calculul algebric**.
În acest scop, se definesc sisteme de coordonate pe dreaptă sau în plan (sistem de coordonate **carteziene** sau **reper cartezian**).

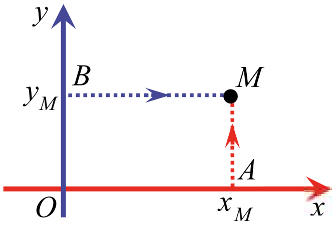
Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Definiție:
O pereche ordonată de axe perpendiculare (ortogonale) care au aceeași origine se numește **sistem de axe ortogonale** sau **reper cartezian** ori **sistem de coordonate** în plan.

- Originea comună a celor două axe se numește **originea** sistemului de axe sau originea reperului cartezian. Se notează, de regulă, cu O.
- Axa orizontală se notează cu Ox și se numește **axa absciselor**. Sensul de parcurgere este de la stânga la dreapta.
- Axa verticală se notează cu Oy și se numește **axa ordonatelor**. Sensul de parcurgere este de jos în sus.
- Reperul cartezian se notează xOy sau (Ox, Oy).

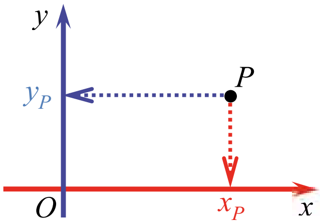


În plan, se consideră un sistem de axe ortogonale xOy.
Fiecărei perechi de numere reale $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ îi corespunde un unic punct în plan, care se reprezintă astfel:
– se reprezintă pe axa Ox punctul A, având coordonata a;
– se reprezintă pe axa Oy punctul B, având coordonata b;
– se desenează dreptunghiul având vârfurile O, A și B;
– al patrulea vârf al dreptunghiului, notat cu M, este punctul căutat.



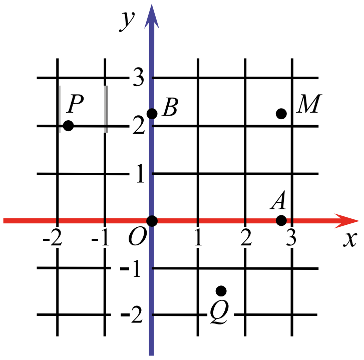
M se numește **reprezentarea geometrică** a perechii de numere reale (a, b).
Numerele a și b se numesc **coordonatele** punctului M. Acestea se mai notează și x_M, respectiv y_M.
Punctul M se mai notează și $M(x_M, y_M)$. Se citește „Punctul M cu coordonatele x_M și y_M”.
Coordonata $x_M = a$ se numește **abscisa** punctului M, iar coordonata $y_M = b$ se numește **ordonata** punctului M.

Reciproc, fiecărui punct P din plan i se asociază, în mod unic, o pereche de numere reale (x, y), notată și (x_P, y_P), care se determină astfel: din punctul P se trasează perpendicularele pe axele de coordonate, care vor intersecta axa Ox în punctul de coordonată x_P și axa Oy în punctul de coordonată y_P.
Numerele x_P și y_P sunt **coordonatele punctului** P.



Concluzie: Între mulțimea punctelor din plan și mulțimea perechilor de numere reale (x, y) există „o corespondență *unu* la *unu*”.
Unitatea de măsură aleasă pentru cele două axe este *aceeași*.

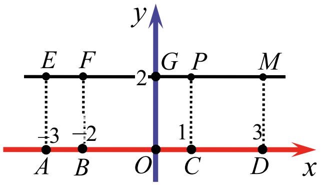
Știm să aplicăm, identificăm conexiuni



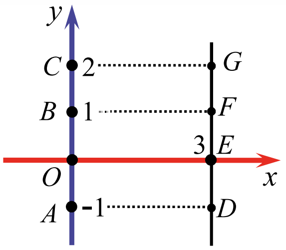
În figura alăturată, sunt reprezentate punctele
$O(0{,}0)$; $A\left(\sqrt{8},0\right)$; $B\left(0,\sqrt{5}\right)$; $M\left(\sqrt{8},\sqrt{5}\right)$; $P\left(-\sqrt{3},2\right)$ și $Q\left(1{,}5;-\sqrt{2}\right)$.

Observații:

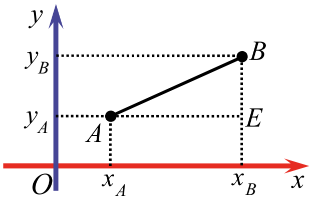
- Un punct este situat pe axa Ox dacă și numai dacă are ordonata nulă, adică $M \in Ox \Leftrightarrow y_M = 0$. În desen avem $A \in Ox$.
- Un punct este situat pe axa Oy dacă și numai dacă are abscisa nulă, adică $M \in Oy \Leftrightarrow x_M = 0$. În desen avem $B \in Oy$.
- Originea reperului cartezian are coordonatele $O(0, 0)$



În desenul alăturat, punctele A, B, C, D, O sunt situate pe axa Ox: $A(-3, 0)$, $B(-2, 0)$, $O(0, 0)$, $C(1, 0)$ și $D(3, 0)$, iar punctele E, F, G, P, M sunt situate pe dreapta orizontală care intersectează axa Oy în punctul de ordonată 2.
Două puncte situate pe aceeași dreaptă orizontală au aceeași ordonată.
Avem $E(-3, 2)$, $F(-2, 2)$, $G(0, 2)$, $P(1, 2)$, $M(3, 2)$, deci $y_E = y_F = y_G = y_P = y_M$.
Distanța dintre două puncte A și B, situate pe aceeași dreaptă orizontală, este $AB = |x_B - x_A|$.



În desenul alăturat, A, O, B, $C \in Oy$: $A(0, -1)$, $O(0, 0)$, $B(0, 1)$, $C(0, 2)$.
Două puncte situate pe aceeași dreaptă verticală au aceeași abscisă.
Punctele D, E, F, G sunt situate pe dreapta verticală care intersectează axa Ox în punctul de abscisă 3 și $D(3, -1)$, $E(3, 0)$, $F(3, 1)$ și $G(3, 2)$.
Distanța între două puncte A și B, situate pe aceeași dreaptă verticală este $AB = |y_B - y_A|$.



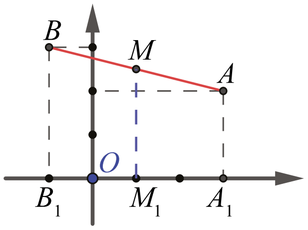
Distanța dintre două puncte, $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, în plan, este dată de formula:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Demonstrație:
Considerăm punctul $E(x_B, y_A)$. Atunci, $AE = |x_B - x_A|$, iar $BE = |y_B - y_A|$.
Aplicând teorema lui Pitagora în ΔABE, avem:

$$AB^2 = AE^2 + BE^2.$$

Ținând cont că $|x_B - x_A|^2 = (x_B - x_A)^2$, obținem formula de mai sus.



Problemă. Într-un sistem de axe ortogonale, considerăm punctele $A(3, 2)$ și $B(-1, 3)$.
a) Calculați distanța dintre cele două puncte.
b) Precizați coordonatele punctelor A_1, B_1 și M_1. Folosind informațiile prezentate mai sus, identificați abscisa punctului M, mijlocul segmentului AB.

Soluție:

a) $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \Rightarrow AB = \sqrt{(-1-3)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{17}.$

b) Se observă ușor că M_1 este mijlocul segmentului A_1B_1.

MM_1 este linie mijlocie în trapezul A_1B_1BA, adică $MM_1 \parallel Oy$, deci M și M_1 au aceeași abscisă: $x = 1$.

Temă de portofoliu

1) Considerăm punctele $M(x_M, y_M)$ și $P(x_P, y_P)$. Alegeți câte 4 perechi de valori convenabile pentru coordonatele celor două puncte și reprezentați-le în sisteme de coordonate diferite.
2) Pentru fiecare dintre cele 4 cazuri, identificați, folosind un raționament similar celui de la pag. 94, coordonatele mijlocului segmentului MP și comparați-le cu numerele $\frac{x_M + x_P}{2}$, respectiv $\frac{y_M + y_P}{2}$.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Fie punctul $A(a, b)$. Completați, pe caiet, spațiile libere cu unul dintre cuvintele: *coordonatele*, *abscisa*, *ordonata*, pentru a obține propoziții adevărate:
a) a este … punctului A;
b) b este … punctului A;
c) a și b sunt … punctului A.

2 Completați, pe caiet, spațiile punctate.
Distanța dintre punctele $A(x_1, y_1)$ și $B(x_2, y_2)$ este $\sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots}$.

3 Reprezentați în același sistem de axe ortogonale punctele $A(1, 3)$, $B(2, 0)$, $C(-2, 4)$, $D(-3, 0)$, $E(-4, 2)$, $F(0, -3)$, $G(-2, -2)$.

4 Fie punctele $A(3, 0)$, $B(-5, 0)$, $C(0, -2)$, $D(0, 4)$.
a) Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale xOy punctele A, B, C și D.
b) Reprezentați în același sistem de axe ortogonale punctele A', B', C' și D' simetricele punctelor A, B, C, respectiv D, față de punctul O.

5 Fie punctele $E(2, 3)$, $F(-3, 2)$, $G(3, -1)$.
a) Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale xOy punctele E, F, G și simetricele lor față de axa Ox.
b) Notați P, Q, respectiv R, aceste puncte și determinați coordonatele lor.

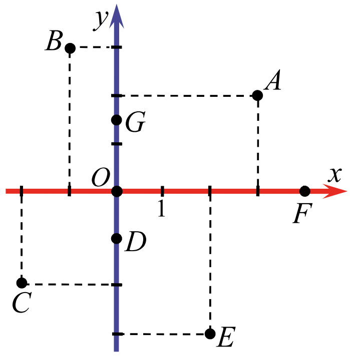
6 Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale:
a) punctul $P(4, 3)$ și calculați OP;
b) punctele $A(-3, 0)$ și $B(2, 0)$ și calculați AB;
c) punctele $C(0, 6)$ și $D(\sqrt{13}, 0)$ și calculați CD.

7 Se consideră un sistem de axe ortogonale xOy.
a) Punctele $A(-3, a)$, $B(1, b - 1)$, $C(4, 2c - 6)$ aparțin axei Ox. Calculați $a + b + c$.
b) Calculați $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s}$, știind că punctele

$Q(q - \sqrt{2}, -2)$, $R(r - \sqrt{8} : 4, -1)$,

$S(s + \sqrt{18}, 1)$ sunt situate pe axa Oy.

8 Precizați coordonatele punctelor reprezentate în sistemul de coordonate din desenul de mai jos.



9 Într-un sistem de coordonate se consideră punctele $A(3, 2)$, $B(-1, 2)$, $C(-1, -2)$ și D, simetricul punctului A față de axa absciselor.
a) Determinați coordonatele punctului D.
b) Calculați lungimile segmentelor AB, BC, CO și AC.
c) Arătați că $ABCD$ este un pătrat.

10 a) Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale punctele $M(2, 5)$, $N(0, 1)$.
b) Calculați lungimea segmentului MN.
c) Fie $P(4, y)$. Determinați numărul y, astfel încât triunghiul MNP să fie isoscel, cu baza NP.

3.2 Dependențe funcționale

Rezolvăm și observăm

O fișă de monitorizare a temperaturilor înregistrate la o stație meteo conține următorul tabel:

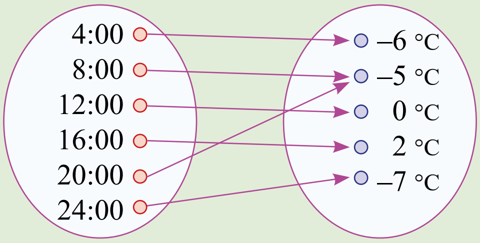
Ora	4:00	8:00	12:00	16:00	20:00	24:00
Temperatura	– 6 °C	– 5 °C	0 °C	2 °C	– 5 °C	– 7 °C

a) Citim acest tabel: La ora 4:00, temperatura aerului era de –6°, la ora 8:00, temperatura era de –5° și așa mai departe, adică *temperatura depinde de ora* la care a fost măsurată.

b) Stabilim relația de dependență dintre ora la care s-a măsurat temperatura și valoarea acesteia: 4:00 → –6 °C; 8:00 → –5 °C; 12:00 → 0 °C; 16:00 → 2 °C; 20:00 → –5 °C; 24:00 → –7 °C.

c) Dacă notăm cu *A* mulțimea orelor la care s-a măsurat temperatura și cu *B* mulțimea valorilor înregistrate de termometru, dependența descrisă poate fi evidențiată și prin diagrama alăturată.

d) Urmărind săgețile care indică dependența, observăm că fiecărui element din mulțimea *A* îi corespunde un singur element din mulțimea *B*.



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Definiție: Fiind date două mulțimi nevide *A* și *B*, vom spune că între ele are loc o **dependență funcțională**, dacă, printr-o regulă oarecare, facem ca *fiecărui element* al mulțimii *A* să-i corespundă *un singur element* al mulțimii *B*.

Dependențele funcționale se pot reprezenta prin tabele, diagrame circulare, diagrame coloane sau bare, grafice, poligonul frecvențelor.

Problema 1: În tabelul alăturat, este redată dependența funcțională dintre mărimile x și y. Aflați numărul a.

x	0	3	9
$y = x - 3$	-3	0	a

Soluție: $a = 9 - 3 = 6$.

Problema 2: Într-o clasă sunt 25 de elevi. Nu a lipsit niciun elev de la test, așa că se stabilește o dependență funcțională între mulțimea elevilor clasei și mulțimea notelor obținute. Elev 1 → nota 6, Elev 2 → nota 7, Elev 3 → nota 6, …, Elev 25 → nota 7, unele note fiind luate de mai mulți elevi. *Numărul de apariții* ale notei 6 se numește ***frecvența*** absolută a acesteia.

Rezultatele obținute la ultima evaluare sumativă sunt redate în tabelul alăturat, numit **tabel de date**. Acesta redă dependența funcțională dintre nota acordată și frecvența acestei note. Astfel de dependențe sunt foarte utile pentru studiul evoluției elevilor dintr-o clasă.

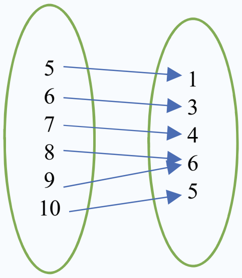
nota	5	6	7	8	9	10
nr. de apariții	1	3	4	6	6	5

Reprezentările prin **diagrame** sau **grafice**, calcularea mediei, dau informații succinte, care pot fi comparate cu cele de la alte teste și care pot indica progresul clasei, în timp.

Graficul unei dependențe funcționale de la mulțimea A la mulțimea B este mulțimea perechilor (x, y), $x \in A$, $y \in B$, astfel încât lui x îi corespunde y.

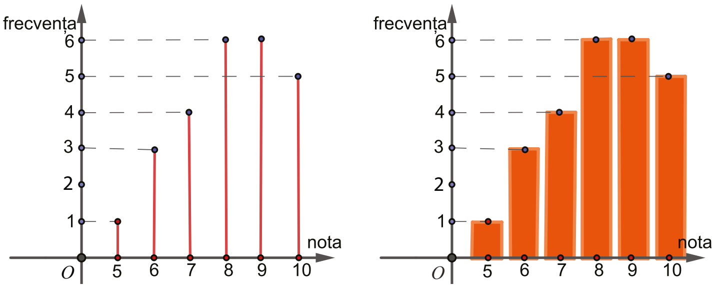
Vom reprezenta datele oferite de tabelul din problema 2 în diferite moduri:

Diagrame Venn-Euler



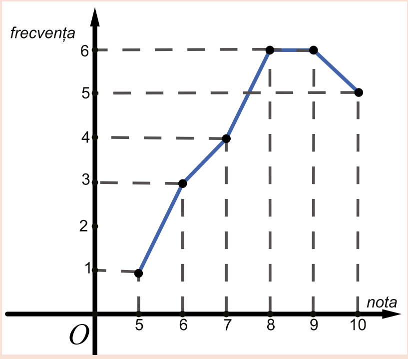
a) Se reprezintă mulțimile între care are loc dependența funcțională.
b) Se asociază, prin săgeți, fiecărui element al primei mulțimi elementul corespunzător din a doua mulțime.

Reprezentare prin coloane sau batoane



a) Se reprezintă, într-un sistem de axe de coordonate, punctele corespunzătoare graficului dependenței funcționale.
b) Se reprezintă *segmentele verticale* cu un capăt în unul dintre aceste puncte și celălalt pe axa *Ox*, numite *coloane* sau *batoane*.
În reprezentarea de mai sus, segmentele roșii sunt **coloane** sau **batoane**.

Poligonul frecvențelor



a) Se reprezintă, într-un sistem de axe de coordonate, punctele corespunzătoare graficului dependenței funcționale.
b) Se reprezintă *linia frântă determinată de segmentele obținute unind, în ordine, punctele desenate*. Această linie se numește **poligonul frecvențelor** (în desen, linia formată din segmentele albastre).

Observație: Poligonul frecvențelor ne ajută să comparăm *frecvențele* a două valori (note) diferite, să observăm care dintre aceste valori (note) are *ponderea* mai mare, să estimăm *media* valorilor (notelor).
În cazul acestei probleme, notele de 8 și de 9 au ponderea cea mai mare (dominantă), iar nota 5 are ponderea cea mai mică. Putem estima că media clasei la această evaluare este aproximativ egală cu 8.
Folosiți calculatorul și calculați media ponderată.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Problema 1: Determinați ultima cifră a numărului $2^n + 3^n$, unde n este număr natural nenul.
Prin calcul, rezultă că ultima cifră a puterilor lui 2 și ale lui 3 se repetă din 4 în 4. Scriem acest lucru printr-o **dependență funcțională** între forma numărului n (de fapt, restul prin împărțire la 4) și ultima cifră a puterilor lui 2, respectiv ale lui 3, reprezentate prin tabele.
Realizăm un nou tabel, în care completăm datele aflate și care ne ajută să identificăm o a treia **dependență funcțională**: între forma numărului n și ultima cifră a numărului $2^n + 3^n$.

Forma numărului	$n = 4k$	$n = 4k + 1$	$n = 4k + 2$	$n = 4k + 3$
$u(2^n)$	6	2	4	8

Forma numărului	$n = 4k$	$n = 4k + 1$	$n = 4k + 2$	$n = 4k + 3$
$u(3^n)$	1	3	9	7

Forma numărului	$u(2^n)$	$u(3^n)$	$u(2^n + 3^n)$
$n = 4k$	6	1	7
$n = 4k + 1$	2	3	5
$n = 4k + 2$	4	9	3
$n = 4k + 3$	8	7	5

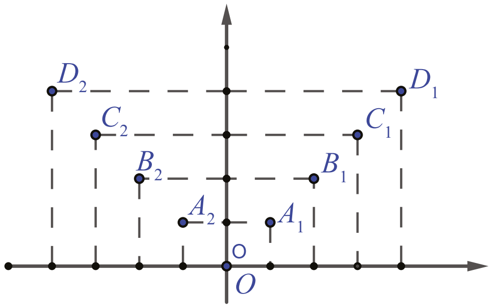
Problema 2: Fie mulțimea $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ și corespondența de la A la mulțimea numerelor naturale: $x \to y = |x|$.

a) Justificați faptul că între A și $\mathbb{N}$ are loc o dependență funcțională.

b) Reprezentați graficul dependenței.

Soluție: a) Modulul oricărui număr întreg este un număr natural unic, deci corespondența $x \to y = |x|$ definește o dependență funcțională.

c) Această dependență este reprezentată prin graficul din imaginea alăturată, format din punctele de coordonate $(x, |x|)$, cu $x \in A$.



Punctele $A_1(1, 1)$, $A_2(-1, 1)$, $B_1(2, 2)$, $B_2(-2, 2)$, $C_1(3, 3)$, $C_2(-3, 3)$, $D_1(4, 4)$, $D_2(-4, 4)$ formează graficul dependenței funcționale.

Există numeroase alte tipuri de tabele care ajută la sintetizarea datelor culese pentru studii statistice și tipuri de diagrame prin care se reprezintă dependențele studiate. Pe unele dintre ele le vom cunoaște prin aplicații.

Reținem!

Corespondența $x \to y$ de la mulțimea nevidă A la mulțimea nevidă B este o **dependență funcțională** dacă aceasta face ca *fiecărui element* al mulțimii A să-i corespundă *un singur element* din mulțimea B.

Dependențele funcționale se pot reprezenta prin: **tabele, grafice, diagrame**.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Un kilogram de struguri costă 7,5 lei. Aflați cât plătim pentru 2 kg, 3 kg, 4 kg, 5 kg, 8 kg, respectiv 10 kg de struguri. Scrieți aceste date în tabelul de mai jos:

Cantitatea de struguri (kg)	1	2	3	4	5	8	10
Suma plătită (lei)	7,5						

2 Calculați aria unui pătrat cu latura l, exprimată în centimetri, unde $l \in \{2; 3{,}5; 6; 10{,}4; \sqrt{201}\}$. Scrieți datele obținute într-un tabel.

3 Reprezentați, prin diagrame, dependența funcțională dintre raza unui cerc și lungimea cercului, pentru valorile r ale razei, exprimate în centimetri, unde $r \in \{1; 2{,}5; 0{,}75; 4{,}4\}$.

4 Un ciclist se deplasează cu viteza medie de 18 km/h. Scrieți distanțele parcurse de ciclist în 2 ore, 3 ore, 4,5 ore, 300 min și completați datele pe caiete, într-un tabel, după modelul dat:

Timpul	2 h			
Distanța parcursă	36 km			

5 Perimetrul unui dreptunghi este egal cu 24 cm.

a) Exprimați lungimea dreptunghiului în funcție de lățimea acestuia.

b) Calculați lungimea dreptunghiului, știind că lățimea ia, pe rând, valorile: 2 cm, 3 cm, 4,5 cm, 5 cm. Scrieți datele obținute într-un tabel. Reprezentați dependența $l \to L$ folosind graficul.

6 Elevii unei clase au obținut la un test următoarele note: 9, 8, 4, 7, 8, 9, 7, 8, 10, 10, 5, 8, 9, 6, 9, 8, 10, 7, 7, 6, 4, 8, 9, 8, 9.

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Număr elevi							

a) Completați pe caiet, asociind fiecărei note frecvența ei în datele prezentate.

b) Calculați media clasei.

c) Reprezentați grafic dependența dintre notele obținute și frecvența acestora.

d) Reprezentați prin diagrame dependența dintre notele obținute și frecvența acestora.

e) Precizați nota cu ponderea cea mai mare.

7 Fie dependența funcțională $x \rightarrow y$, de la mulțimea $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$ la mulțimea $\mathbb{N}$, dată de regula „y este ultima cifră a numărului x^2”.

a) Determinați mulțimea valorilor pe care le poate lua y.

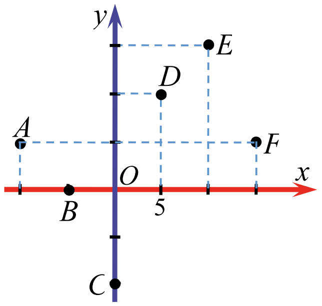
b) Reprezentați dependența funcțională într-un tabel.

c) Reprezentați dependența prin grafic și prin diagrame.

8 În desenul de mai jos, este reprezentarea grafică a unei dependențe funcționale $x \rightarrow y$.

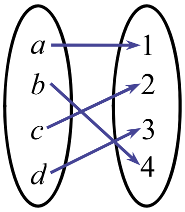
a) Determinați coordonatele punctelor A, B, C, D, E, F, știind că abscisa punctului D este 5.

b) Reprezentați această dependență funcțională prin tabel, apoi prin diagramă Venn-Euler.

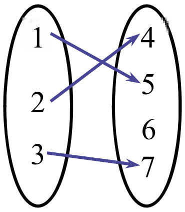


9 Stabiliți care dintre următoarele reprezentări sunt dependențe funcționale:

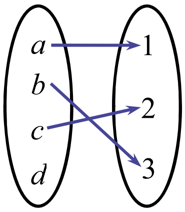
a)



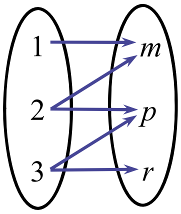
b)

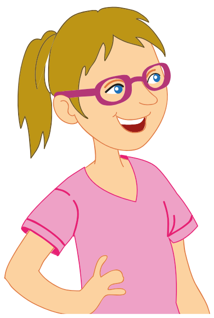


c)



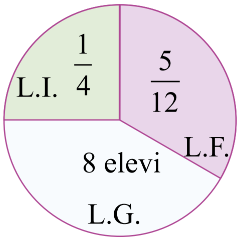
d)



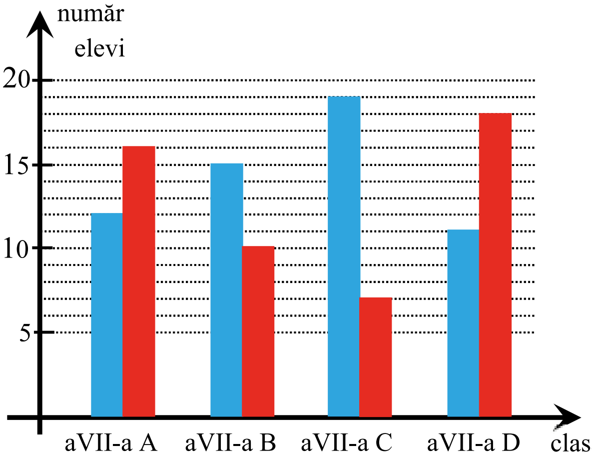


10 În diagrama de mai jos, sunt prezentate preferințele elevilor unei clase pentru studiul celei de-a doua limbi străine. Aflați numărul elevilor din clasă și numărul elevilor care preferă limba italiană

L.F. – limba franceză
L.G. – limba germană
L.I. – limba italiană



11 În diagrama de mai jos, sunt reprezentate efectivele claselor a VII-a (numărul elevilor din aceste clase) dintr-o școală. Coloanele albastre reprezintă numărul băieților, iar coloanele roșii reprezintă numărul fetelor din fiecare clasă.



a) Determinați, cu ajutorul diagramei, efectivul fiecărei clase.

b) Calculați numărul băieților de clasa a VII-a, din acea școală.

c) Identificați clasele în care numărul fetelor este mai mare decât numărul băieților.

d) Determinați efectivul mediu al claselor a VII-a din școală.

e) Observați diagrama și completați, pe caiete, tabelul de date în baza căruia a fost realizată diagrama, urmând modelul:

Clasa	a VII-a A	a VII-a B	a VII-a C	a VII-a D
Numărul fetelor	16			
Numărul băieților	12			
Efectivul clasei	28			

Evaluare sumativă

Se acordă 10 puncte din oficiu.

I. *La cerințele următoare alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.*

5p **1.** Se consideră punctele $A(-3,8)$ și $B(0,4)$. Lungimea segmentului AB este:
A. 6 B. 5 C. 7 D. 8

5p **2.** Dacă $C(0, -5)$, $D(a, 3)$ și $CD = 10$, atunci valoarea pozitivă a numărului a este:
A. 6 B. 7 C. 5 D. 4

5p **3.** Simetricul punctului $E(-3, 2)$ față de originea sistemului de axe ortogonale este punctul F. Coordonatele punctului F sunt:
A. $(-3, 2)$ B. $(-2, 3)$ C. $(-3, -2)$ D. $(3, -2)$

5p **4.** Fie punctele $A(-4, 1)$, $B(-1, 5)$, $C(2, 5)$, $D(5, 1)$ într-un sistem de axe ortogonale. Perimetrul patrulaterului $ABCD$ este:
A. 25 B. 26 C. 22 D. 28

5p **5.** Dacă mulțimea A are trei elemente, atunci produsul cartezian $A \times A$ are:
A. 3 elemente B. 6 elemente C. 9 elemente D. 27 elemente

5p **6.** Dacă $A \times B = \{(2, 4), (4, a), (6, 4), (2, b), (4, 6), (6, b)\}$, atunci mulțimea B este:
A. $\{4, 6\}$ B. $\{4, 2\}$ C. $\{2, 4\}$ D. $\{2, 6\}$

5p **7.** Tabelul prezentat asociază fiecăreia dintre cele 4 probleme, date la un concurs, numărul elevilor care au rezolvat-o corect. În total, pentru problemele de concurs, s-au primit 221 de rezolvări corecte.

Problema	1	2	3	4
Număr elevi	27	$2a - 1$	$a + 25$	$a + 10$

Problema 3 a fost rezolvată de:
A. 45 elevi B. 55 elevi C. 65 elevi D. 75 elevi

5p **8.** În tabel următor, este înregistrat cursul de schimb euro-leu, pe parcursul unei săptămâni.

luni	marți	miercuri	joi	vineri	sâmbătă	duminică
4,59	4,57	4,56	4,53	4,54	4,53	4,53

Cursul mediu euro-leu, pentru această săptămână, a fost:
A. 4,57 B. 4,56 C. 4,54 D. 4,55

II. *La problemele următoare se cer rezolvări complete.*

10p **1.** În tabelul alăturat este prezentată o dependență funcțională. Reprezentați această relație într-un sistem de axe ortogonale.

x	-3	-2	-1	0	3
y	-2	-3	-4	1	4

10p **2.** O hartă este realizată la scara 1/500 000. Completați tabelul alăturat ținând seama de unitatea de măsură cerută.

Distanța pe hartă (cm)	5		7,5		12
Distanța pe teren (km)		20		350	

3. Între mulțimile $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid -1\le x\le 3\}$ și $B=\{x\in\mathbb{Z}\mid -4<x<6\}$ se stabilește o dependență funcțională după regula $x \to y$, $y = -2x + 3$. Reprezentați această relație:

5p a) într-un tabel;

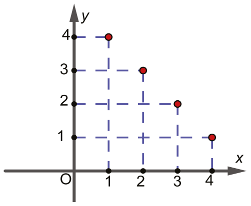
5p b) prin diagrame;

10p c) folosind graficul.

4. În graficul din desen este prezentată dependența funcțională între mulțimile A și B.

5p a) Determinați mulțimile A și B.

5p b) Găsiți o formulă cu ajutorul căreia se exprimă y în funcție de x.



4 Patrulaterul

Competențe specifice:

1.4 2.4 3.4 4.4 5.4 6.4

4.1 Patrulater convex. Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex

Ne amintim

Trei puncte necoliniare determină un **triunghi**.
Dacă le notăm A, B și C, vorbim despre triunghiul ABC și scriem „ΔABC”.
Teorema 1. Suma măsurilor unghiurilor interioare ale unui triunghi este 180°.
Teorema 2. În orice triunghi, lungimea unei laturi este mai mică decât suma lungimilor celorlalte două.

Geometria este fascinantă, multe rezultate geometrice, referitoare la figuri geometrice diferite, ne surprind cu componente comune, asemănătoare atât în ceea ce privește enunțul, cât și în ceea ce privește concluzia. Vom observa astfel de asemănări în cele ce urmează.

Patru puncte, oricare trei necoliniare, determină un patrulater[1]. Dacă le notăm A, B, C și D, vorbim despre patrulaterul $ABCD$. Din păcate, nu avem o notație ca la triunghi; prin urmare, vom scrie: „patrulaterul $ABCD$”.

Fiecare dintre figurile alăturate îndeplinește condiția de a fi determinat de patru puncte, oricare trei necoliniare, deci toate aceste figuri geometrice sunt patrulatere.

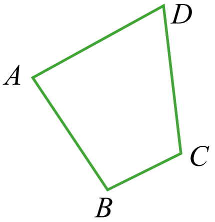


Fig. 1.a

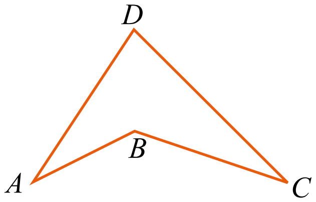


Fig. 1.b

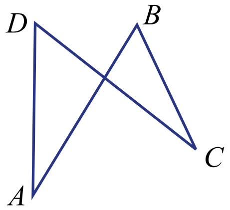


Fig. 1.c

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Punctele A, B, C, și D se numesc **vârfurile** patrulaterului.
Segmentele AB, BC, CD și DA se numesc **laturile** patrulaterului. Putem considera și dreptele care includ laturile patrulaterului și le vom numi *dreptele suport* ale laturilor patrulaterului (acestea sunt desenate punctat, în figurile 2.a, 2.b).

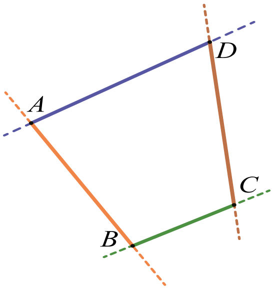


Fig. 2.a

Să analizăm figura 2.a în comparație cu figura 2.b.

1) În figura 2.a, oricum am alege o latură, dreapta suport a acesteia nu intersectează altă latură, decât cel mult în vârfurile patrulaterului, ceea ce nu se întâmplă și în figura 2.b.
2) Oricum am alege o latură a patrulaterului din figura 2.a, celelalte două vârfuri se află de aceeași parte a dreptei suport a acestei laturi, în timp ce, la cel din figura 2.b, punctele C și D sunt situate de o parte și de alta a dreptei suport a laturii AB.

Definiția 1: Se numește ***patrulater convex*** un patrulater în care dreapta suport a oricărei laturi intersectează celelalte laturi, cel mult, în vârfurile patrulaterului.

Patrulaterele cu proprietăți analoage celui din figura 2.a sunt patrulatere convexe[2].

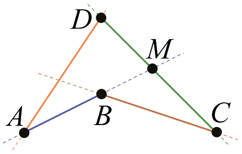


Fig. 2.b

Definiția 2: Un patrulater în care oricare două laturi se intersectează cel mult în vîrfurile patrulaterului și care nu este convex se numește ***patrulater concav***.

Patrulaterele din figurile 1.b și 2.b sunt patrulatere concave.

Observația 1. Un patrulater este ***convex*** dacă, pentru oricare dintre laturi, două vârfuri ale patrulaterului se află de aceeași parte a dreptei sale suport. În figura 2.b, dreapta suport a laturii AB taie latura CD în M, care nu este vârf al patrulaterului, iar vârfurile D și A sunt de o parte și de alta a dreptei BC.

---

[1] Pentru analogie cu definiția triunghiului și pentru simplitatea formulării, optăm pentru această definiție, mai putin folosită, a patrulaterului.

[2] În clasa a VII-a vom studia doar patrulaterul convex, uneori, numindu-l *simplu* patrulater.

Observația 2.
Dacă patrulaterul *ABCD* este convex, atunci schimbând *circular* ordinea vârfurilor, el rămâne convex. (fig. 3.a)
Prin schimbări circulare, obținem patrulaterele: *BCDA*, *CDAB* și *DABC*. Nicio altă schimbare a vârfurilor *nu păstrează* proprietatea de convexitate. (fig 3.b)

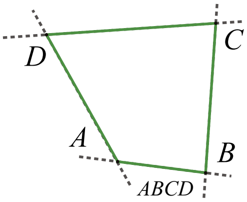


Fig. 3.a
ABCD patrulater convex

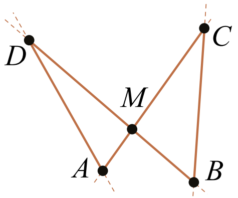


Fig. 3.b
ACBD nu este patrulater convex

Dicționar:
circular – aici cu sensul *de jur împrejur*

Ordinea vârfurilor în numirea patrulaterului este de mare importanță, spre deosebire de ordinea vârfurilor în numirea triunghiului, care nu contează.

Să analizăm în detaliu un *patrulater convex ABCD*, punctând asupra *noțiunilor geometrice* pe care le întâlnim.

- Punctele *A*, *B*, *C* și *D* sunt **vârfurile** patrulaterului.
  Vârfurile *A* și *B* sunt *vârfuri vecine*, la fel *B* și *C*, *C* și *D*, dar și *A* și *D*.
  Vârfurile *A* și *C*, de asemenea vârfurile *B* și *D*, sunt *vârfuri opuse*.
- Patrulaterul *ABCD* are **laturile**: *AB*, *BC*, *CD* și *DA*.(fig. 4)
  Un patrulater convex are:
  – două perechi de **laturi opuse**: (*AB*; *DC*) și (*AD*; *BC*);
  – patru perechi de **laturi alăturate**: (*AB*; *BC*), (*BC*; *CD*), (*CD*; *DA*), (*DA*; *AB*).

Orice două **laturi alăturate** au în comun un punct, vârf al patrulaterului.
De exemplu, vârful *A* este comun laturilor *AB* și *AD*.

- Două vârfuri opuse ale unui patrulater convex determină o **diagonală**: segmentele *AC* și *BD* sunt diagonalele patrulaterului *ABCD*.

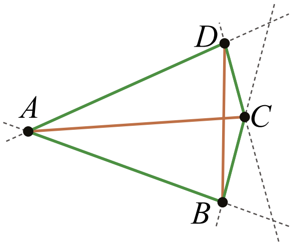


Fig. 4

- Oricare două laturi alăturate ale unui patrulater convex formează câte un **unghi**.
  Unghiurile patrulaterului *ABCD* sunt: ∢*DAB*, ∢*ABC*, ∢*BCD* și ∢*CDA*.
  Vârfurile acestor unghiuri coincid cu vârfurile patrulaterului: *A*, *B*, *C*, respectiv *D*.
  Dacă nu este pericol de confuzie, se pot nota cu ∢*A*, ∢*B*, ∢*C*, ∢*D* și se numesc **unghiurile interioare** sau, mai simplu, unghiurile patrulaterului. (fig. 5)
- Un patrulater convex are:
  – patru perechi de **unghiuri alăturate**: (∢*A*, ∢*B*), (∢*B*, ∢*C*), (∢*C*, ∢*D*), (∢*D*, ∢*A*);
  – două perechi de **unghiuri opuse**: (∢*A*, ∢*C*) și (∢*B*, ∢*D*).
- Partea comună a interioarelor a două unghiuri opuse formează ***interiorul*** patrulaterului convex.

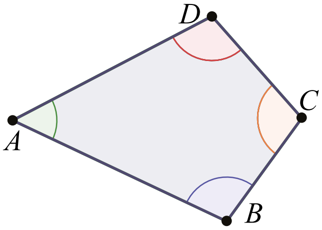


Fig. 5

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Teorema 1. Suma măsurilor unghiurilor interioare ale unui triunghi este 180°.

Evident, ne întrebăm dacă pentru unghiurile unui patrulater convex putem descoperi că suma măsurilor unghiurilor sale interioare este un număr constant. Neașteptat, dar răspunsul este afirmativ.

Teorema 2. Suma măsurilor unghiurilor interioare ale unui patrulater convex este 360°.

Demonstrație: La geometrie, înainte de a începe orice demonstrație, trebuie să ne gândim intens la rezultate asemănătoare pe care le cunoaștem. Evident, rezultatul aflat despre „suma măsurilor unghiurilor...” este cel referitor la triunghi. Observând că 360° = 2 · 180°, încercăm să identificăm două triunghiuri printr-o construcție care să păstreze cât mai multe unghiuri ale patrulaterului, dar să apară și triunghiuri.
Construim o diagonală. Fie *AC* această diagonală. (fig. 6)

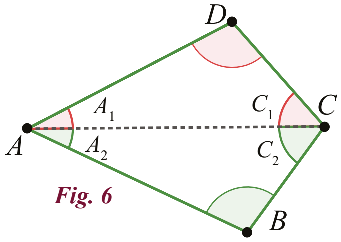


Fig. 6

Am obținut triunghiurile *ABC* și *ACD*. Găsim, în cele două triunghiuri, $\sphericalangle A_1$, respectiv $\sphericalangle A_2$, unghiuri care sunt adiacente și $\sphericalangle A_1 + \sphericalangle A_2 = \sphericalangle A$. Analog, $\sphericalangle C_1 + \sphericalangle C_2 = \sphericalangle C$.
În ΔABC, $\sphericalangle A_2 + \sphericalangle B + \sphericalangle C_2 = 180°$, iar în ΔACD, $\sphericalangle A_1 + \sphericalangle D + \sphericalangle C_1 = 180°$. Adunăm cele două relații și ținem cont de relațiile de la unghiuri adiacente.
$\sphericalangle A_2 + \sphericalangle B + \sphericalangle C_2 + \sphericalangle A_1 + \sphericalangle D + \sphericalangle C_1 = \sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D = 180° + 180° = 360°$.

Am evidențiat, prin raționamentul de mai sus, faptul că la un rezultat cunoscut anterior am adăugat sau am schimbat ceva și am obținut un rezultat nou. Astfel de asocieri sunt benefice pentru sedimentarea cunoștințelor de geometrie și pentru dobândirea abilităților specifice geometriei.

Reținem!

- Un patrulater în care dreapta suport a oricărei laturi nu intersectează celelalte laturi decât, cel mult, în vârfurile patrulaterului, se numește ***patrulater convex***.
- *Ordinea vârfurilor* în numirea patrulaterului convex este de mare importanță.
- ***Suma măsurilor unghiurilor interioare ale unui patrulater convex este 360°***.

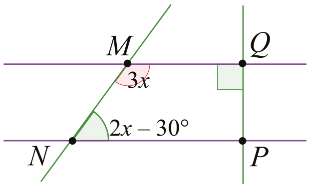
Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 a) Desenați patrulaterul convex *ABCD*.
b) Scrieți perechile de laturi opuse ale patrulaterului.
c) Scrieți perechile de laturi alăturate ale patrulaterului.
d) Scrieți perechile de unghiuri opuse ale patrulaterului.
e) Scrieți perechile de unghiuri alăturate ale patrulaterului.

2 Se consideră patrulaterul convex *MNPQ*, în care $\sphericalangle M = 73°$, $\sphericalangle P = 107°$, $\sphericalangle Q = 64°$.
Calculați măsura unghiului $\triangleleft N$.

3 Se consideră patrulaterul *ABCD*, în care $AB \perp AD$, $BC \perp CD$ și $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle BDC$.
Demonstrați că:
a) $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ADC$; b) $AD \equiv BC$; c) $AC \equiv BD$.

4 În desenul de mai jos, dreptele *MQ* și *NP* sunt paralele, iar dreptele *MQ* și *PQ* sunt perpendiculare.



Folosind datele înscrise pe figură, determinați măsurile unghiurilor patrulaterului *MNPQ*.

5 În patrulaterul convex *EFGH* au loc relațiile:
$EF \equiv EH$, $GF \equiv GH$, $\sphericalangle FEG = 28°$, $\sphericalangle EGH = 73°$.
Calculați:
a) Măsurile unghiurilor patrulaterului *EFGH*.
b) Măsura unghiului format de diagonalele patrulaterului *EFGH*.

6 În triunghiul *ABC* cu măsura unghiului $\sphericalangle ABC$ de 44°, se consideră înălțimea *AD*, $D \in BC$, mijlocul *M* al laturii *AB* și bisectoarea *DN* a unghiului $\sphericalangle ADC$, $N \in AC$.
Știind că $\sphericalangle AND \equiv \sphericalangle AMD$, calculați măsurile unghiurilor patrulaterului *AMDN*.

7 Triunghiul *ABC* este echilateral; perpendiculara în punctul *B*, pe dreapta *AB*, intersectează dreapta *AC* în punctul *D*, iar punctul *E* este mijlocul segmentului *BD*.
a) Realizați un desen care să corespundă datelor problemei.
b) Calculați măsurile unghiurilor patrulaterului *ABEC*.

8 Triunghiul *ABC* este echilateral, iar patrulaterul convex *ABCD* are două unghiuri opuse drepte. Determinați măsurile unghiurilor patrulaterului.

4.2 Paralelogramul: proprietăți. Aplicații în geometria triunghiului

L1 Paralelogramul. Proprietăți

Ne amintim

Axioma paralelelor, cu o lungă istorie și de o importanță deosebită în dezvoltarea geometriei euclidiene și neeuclidiene, are un enunț scurt și clar: *printr-un punct exterior unei drepte se poate construi o singură dreaptă paralelă cu aceasta*.

Două **drepte paralele** formează cu o secantă oarecare:

- *perechi de unghiuri **alterne interne, alterne externe, corespondente congruente;***
- *perechi de unghiuri **interne** sau **externe de aceeași parte a secantei suplementare**.*

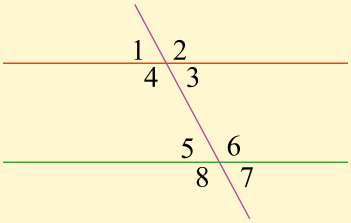


Fig. 1

$\sphericalangle 4 \equiv \sphericalangle 6, \sphericalangle 3 \equiv \sphericalangle 5$

$\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 7, \sphericalangle 2 \equiv \sphericalangle 8$

$\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 5, \sphericalangle 2 \equiv \sphericalangle 6$

$\sphericalangle 4 \equiv \sphericalangle 8, \sphericalangle 3 \equiv \sphericalangle 7$

$\sphericalangle 4 + \sphericalangle 5 = 180^\circ$

$\sphericalangle 3 + \sphericalangle 6 = 180^\circ$

$\sphericalangle 1 + \sphericalangle 8 = 180^\circ$

$\sphericalangle 2 + \sphericalangle 7 = 180^\circ$

În clasa a VI-a, am consumat multă energie rezolvând probleme despre *paralelism*. Am observat că, uneori, trebuie să demonstrăm că două drepte sunt paralele, alteori știm că dreptele sunt paralele și demonstrăm alte proprietăți, folosind acest fapt.

Să ne oprim puțin și să admirăm *puterea unor termeni din geometrie*. O simplă afirmație prin care aflăm că *o dreaptă taie două drepte paralele* atrage după sine *8 congruențe de unghiuri* și *4 relații de suplementaritate*. *Condițiile suficiente* ca două drepte tăiate de o secantă să fie paralele, cărora le spunem ***criterii de paralelism***, ne învață tehnici prin care demonstrăm că două drepte sunt paralele, folosirea definiției nefiind întotdeauna eficientă. În mod natural, apare întrebarea: câte dintre cele 12 relații dintre unghiuri ar trebui să fie îndeplinite pentru ca dreptele să fie paralele?

- Dacă două drepte formează cu o secantă o pereche de unghiuri **alterne interne** sau o pereche de unghiuri **alterne externe** ori o pereche de unghiuri **corespondente** congruente, atunci dreptele sunt paralele.
- Dacă două drepte formează cu o secantă o pereche de unghiuri **interne de aceeași parte a secantei** sau o pereche de unghiuri **externe de aceeași parte a secantei** suplementare, atunci dreptele sunt paralele.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Problemă: Cu ce proprietăți este îmbogățit un patrulater convex de *proprietatea de paralelism a laturilor sale opuse*?

- Un patrulater convex care are **o pereche de laturi opuse paralele** se numește **trapez**.
- Un patrulater convex care are **două perechi de laturi opuse paralele** se numește **paralelogram**.

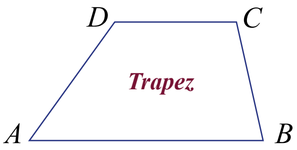


Fig. 2a

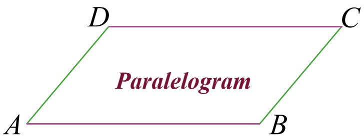


Fig. 2b

Paralelogramul este „campion” în privința bogăției proprietăților. Proprietățile paralelogramului au implicații fascinante în demonstrarea proprietăților altor poligoane.

Dicționar
poligon – o figură geometrică plană, închisă, determinată de trei sau mai multe segmente (laturi)

Să analizăm figura 2.b, observând, pe rând, laturile paralele AB și CD, apoi laturile paralele AD și BC.

1) $AB \parallel DC$ și secanta AD. Unghiurile A și D ale paralelogramului sunt unghiuri interne de aceeași parte a secantei, deci sunt suplementare, adică $\sphericalangle A + \sphericalangle D = 180°$. Deoarece suma măsurilor unghiurilor unui patrulater este 360°, rezultă că $\sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$.
2) $AD \parallel BC$ și secanta AB. Unghiurile A și B ale paralelogramului sunt interne de aceeași parte a secantei, deci suplementare, adică $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180°$. Deoarece suma măsurilor unghiurilor unui patrulater este 360°, rezultă că $\sphericalangle C + \sphericalangle D = 180°$. Am obținut (demonstrat) o primă proprietate a paralelogramului:

Teorema 1.
Într-un paralelogram, **unghiurile alăturate** sunt **suplementare**.

$\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180°$ $\quad$ $\sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$

$\sphericalangle C + \sphericalangle D = 180°$ $\quad$ $\sphericalangle A + \sphericalangle D = 180°$

Folosim această proprietate și observăm că $\sphericalangle D$ este suplementar atât cu $\sphericalangle A$, cât și cu $\sphericalangle C$, deci $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$. Evident, același rezultat se obține și pentru $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle D$. Am demonstrat rezultatul:

Teorema 2.
Într-un paralelogram, **unghiurile opuse** sunt **congruente**.

$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$

$\sphericalangle B \equiv \sphericalangle D$

Să construim o diagonală (fig. 3). Ne conduce aceasta spre rezultate noi? Diagonala AC este secantă pentru ambele perechi de laturi paralele ale paralelogramului. Unghiurile $\sphericalangle DCA$ și $\sphericalangle BAC$ sunt alterne interne pentru paralelele AB și CD, iar unghiurile $\sphericalangle DAC$ și $\sphericalangle BCA$ sunt alterne interne pentru paralelele BC și AD, deci diagonala determină, cu laturile opuse, două perechi de unghiuri congruente.
Pentru diagonala BD, se obține un rezultat similar.

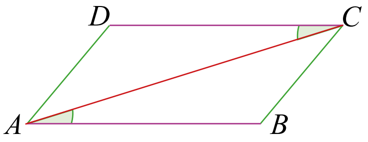


Fig. 3

Teorema 3.
Fiecare **diagonală** a unui paralelogram formează, **cu *laturile opuse***, unghiuri **congruente**.

$\sphericalangle DCA \equiv \sphericalangle BAC$
$\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle BCA$
$\sphericalangle CDB \equiv \sphericalangle ABD$
$\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CBD$

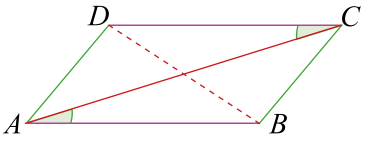


Fig. 4

Remarcăm faptul că triunghiurile formate (fig. 4) au elemente congruente. Cu unul dintre cazurile de congruență U.L.U. sau L.U.U., obținem $\Delta ACB \equiv \Delta CAD$, apoi $AB \equiv CD$ și $AD \equiv CB$. Am ajuns la o nouă proprietate a paralelogramului:

Teorema 4.
Laturile opuse ale unui paralelogram sunt **congruente**.

$AB \equiv CD$ $\quad$ $AD \equiv CB$

Să observăm figura 5. Am trasat cele două diagonale ale paralelogramului și am notat cu O punctul lor de intersecție. S-au format patru triunghiuri care ne atrag atenția. Observăm că $\sphericalangle OAB \equiv \sphericalangle OCD$ și $\sphericalangle OBA \equiv \sphericalangle ODC$, iar teorema 4 ne spune că laturile paralele sunt și congruente, deci $AB \equiv CD$. Prin urmare, $\Delta OAB \equiv \Delta OCD$ (U.L.U.). Atunci, $OA \equiv OC$ și $OB \equiv OD$. Am demonstrat, în acest fel, că punctul O este mijlocul fiecărei diagonale. Vom spune că punctul O înjumătățește diagonalele.

Teorema 5.
Diagonalele unui paralelogram **se înjumătățesc**.

$OA \equiv OC$

$OB \equiv OD$

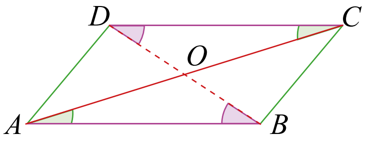


Fig. 5

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Apare acum o nouă **problemă**: Care ar fi informațiile care, în ipoteza unei probleme sau pe parcursul rezolvării, ne-ar asigura că un patrulater convex este paralelogram?

Căutăm, deci, ***condiții suficiente*** ca un patrulater convex să fie paralelogram. Care dintre proprietățile studiate și câte dintre acestea sunt suficiente pentru a fi îndeplinite și celelalte proprietăți ale paralelogramului?

Teorema 6.
Dacă un patrulater convex are **două laturi** opuse **paralele și congruente**, atunci acesta este paralelogram.

Fig. 6

Demonstrație: Considerăm laturile opuse *AB* și *CD* paralele și congruente. Pentru ca *ABCD* să fie paralelogram, rămâne de arătat că laturile opuse *AD* și *BC* sunt paralele. Desenăm diagonala *AC*. (fig. 6)

Paralelismul *AB* || *CD* ne oferă congruența ∢*CAB* ≡ ∢*ACD*.

Din ipoteză, *AB* ≡ *CD*, iar *AC* este latură comună a triunghiurilor Δ*ADC* și Δ*CBA*. Folosind cazul de congruență L.U.L., obținem Δ*ADC* ≡ Δ*CBA*, prin urmare ∢*DAC* ≡ ∢*BCA*.

Am demonstrat că *AD* și *BC* formează cu secanta *AC* unghiuri alterne interne congruente, deci sunt paralele și, conform definiției, *ABCD* este paralelogram.

Teorema 7.
Dacă un patrulater are ambele perechi de **laturi opuse congruente**, atunci patrulaterul este un paralelogram.

Demonstrație: Fie triunghiurile Δ*ADC* și Δ*CBA*.

Din ipoteză, *AB* ≡ *CD* și *AD* ≡ *BC*. Cum *AC* este latură comună celor două triunghiuri, rezultă Δ*ADC* ≡ Δ*CBA*, deci unghiurile omoloage ale triunghiurilor vor fi congruente. Acestea sunt, însă, unghiuri alterne interne, formate de câte două laturi opuse cu diagonala (secantă), rezultând paralelismul laturilor opuse.

Conform definiției, patrulaterul *ABCD* este paralelogram.

Teorema 8.
Dacă într-un patrulater convex **diagonalele se înjumătățesc**, atunci patrulaterul este un paralelogram.

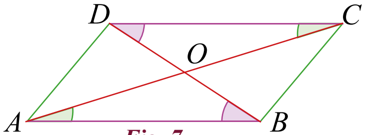


Fig. 7

Demonstrație: Se formează două perechi de triunghiuri congruente. (fig. 7)

1) În Δ*OAB* și Δ*OCD* avem: *AO* ≡ *OC*, *BO* ≡ *OD*, iar ∢ *AOB* ≡ ∢ *COD* (unghiuri opuse la vârf). Din cazul de congruență L.U.L. rezultă Δ*OAB* ≡ Δ*OCD*, de unde ∢ *OAB* ≡ ∢ *OCD*, adică dreptele *AB* și *CD*, cu secanta *AC*, formează o pereche de unghiuri alterne interne congruente, deci *AB* || *CD*.
2) În Δ*AOD* și Δ*COB* avem: *AO* ≡ *OC*, *OD* ≡ *OB*, iar ∢ *AOD* ≡ ∢ *COB* (unghiuri opuse la vârf). Din cazul de congruență L.U.L. rezultă Δ*AOD* ≡ Δ*COB*, de unde ∢ *OAD* ≡ ∢ *OCB*, adică dreptele *AD* și *CB*, cu secanta *AC*, formează o pereche de unghiuri alterne interne congruente, deci *AD* || *CB*.
Patrulaterul *ABCD* are laturile opuse paralele, deci este paralelogram.

Teorema 9.
Dacă într-un patrulater convex oricare două **unghiuri alăturate sunt suplementare**, atunci patrulaterul este un paralelogram.

Demonstrație: Oricare două unghiuri alăturate ale unui patrulater convex pot fi considerate unghiuri interne de aceeași parte a secantei, pentru două laturi opuse ale patrulaterului. Secanta este una dintre celelalte două laturi. Folosind criteriul de paralelism corespunzător, rezultă că laturile opuse ale patrulaterului sunt paralele. Conform definiției, patrulaterul este paralelogram.

Teorema 10.
Dacă într-un patrulater convex ambele perechi de **unghiuri opuse sunt congruente**, atunci patrulaterul este paralelogram.

Demonstrație: Considerăm două unghiuri alăturate, de exemplu ∢*A* și ∢*B*.
Din ∢*A* ≡ ∢*C* și ∢*B* ≡ ∢*D*, rezultă ∢*A* + ∢*B* ≡ ∢*C* + ∢*D*. Deoarece suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este 360° rezultă ∢*A* + ∢*B* ≡ ∢*C* + ∢*D* = 180°. La fel pentru perechile de unghiuri alăturate ∢*A* și ∢*D*, respectiv ∢*B* și ∢*C*, deci conform teoremei anterioare, patrulaterul este paralelogram.

Teorema 11.
Dacă într-un patrulater convex **unghiurile formate de o diagonală cu cele două perechi de laturi opuse sunt congruente**, atunci patrulaterul este paralelogram.

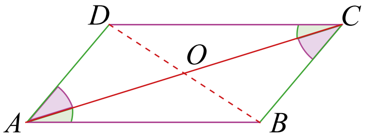


Fig. 8

Demonstrație:
Diagonala AC din figura 8 formează cu laturile opuse perechile de unghiuri congruente $\sphericalangle DCA \equiv \sphericalangle BAC$ și $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle BCA$.
Cum acestea sunt alterne interne pentru AB și DC cu secanta AC, respectiv alterne interne pentru AD și BC cu secanta AC, rezultă $AB \parallel DC$ și $AD \parallel BC$, adică patrulaterul este paralelogram.

Reținem!

Un patrulater convex care are **ambele perechi de laturi opuse paralele** se numește **paralelogram**.

Dacă un patrulater este paralelogram, atunci:
- **Laturile opuse** sunt paralele.
- **Laturile opuse** sunt **congruente**.
- **Unghiurile opuse** sunt **congruente**.
- **Unghiurile alăturate** sunt **suplementare**.
- **Fiecare diagonală** formează cu *laturile opuse* **unghiuri congruente**.
- **Diagonalele se înjumătățesc.**

Pentru ca un patrulater convex să fie paralelogram, este suficient să fie îndeplinită una dintre condițiile:
- Ambele perechi de **laturi opuse** ale patrulaterului să fie **congruente**.
- **Două laturi** opuse ale patrulaterului să fie **paralele** și **congruente**.
- Ambele perechi de **unghiuri opuse ale patrulaterului** să fie **congruente**.
- Oricare două **unghiuri alăturate** ale patrulaterului să fie **suplementare**.
- **Unghiurile formate de o diagonală cu cele două perechi de laturi opuse** să fie **congruente**.
- **Diagonalele** patrulaterului să **se înjumătățească**.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 a) Desenați un paralelogram $ABCD$.
b) Identificați:
- perechi de laturi paralele;
- perechi de laturi congruente;
- perechi de unghiuri congruente;
- perechi de unghiuri suplementare.

2 Fie paralelogramul $ABCD$, cu $AB = 7$ cm și $BC = 9$ cm.
a) Aflați valoarea de adevăr a propozițiilor.
p_1: „$CD = 7$ cm”
p_2: „$AD = 9$ cm”
p_3: „$AC > 16$ cm”

3 Construiți paralelogramul $MNPQ$, pentru fiecare dintre cazurile:
a) $MQ = 6$ cm, $\sphericalangle M = 50°$, $MN = 4$ cm;
b) $\sphericalangle N + \sphericalangle Q = 210°$, $NP = 2 \cdot PQ = 10$ cm.

4 a) Calculați măsurile unghiurilor paralelogramului $ABCD$, știind că $\sphericalangle A = 100°$.
b) Calculați măsurile unghiurilor paralelogramului $DEFG$, știind că $\sphericalangle D = 1{,}5 \cdot (\sphericalangle E)$.
c) Calculați măsurile unghiurilor paralelogramului $ABCD$, știind că $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 300°$.

5 Desenați paralelogramul $ABCD$. Fie P punctul de intersecție a diagonalelor acestuia. Completați:
a) Dacă $AC = 20$ cm, atunci $AP = ...$ cm și $CP = ...$ cm.
b) Dacă $BP = 7{,}5$ dm, atunci $DP = ...$ dm și $BD = ...$ cm.

6 Triunghiurile ABC și BCD sunt echilaterale, iar punctele A și D sunt distincte. Demonstrați că patrulaterul $ABDC$ este paralelogram.

7 Se consideră paralelogramul $MNPQ$. Punctul E este este mijlocul segmentului MN, iar punctul F este mijlocul segmentului PQ.
Demonstrați că:
a) $EF \equiv MQ$; b) $EF \parallel NP$.

8 În paralelogramul $ABCD$, punctul M este mijlocul laturii AB, iar $DM \cap BC = \{E\}$.
Demonstrați că:
a) $\Delta ADM \equiv \Delta BEM$;
b) $ADBE$ este paralelogram.

9 În paralelogramul $ABCD$, $AB > BC$. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAD$ intersectează latura CD în E, iar bisectoarea unghiului $\sphericalangle BCD$ intersectează latura AB în F.
a) Demonstrați că triunghiul ADE este isoscel.
b) Demonstrați că $AECF$ este paralelogram.

10 Fie paralelogramul $ABCD$ cu $AC \cap BD = \{O\}$. Prin O, se desenează o dreaptă d care intersectează laturile AB și CD în punctele E, respectiv F și prelungirile laturilor BC și AD în punctele P, respectiv Q. Demonstrați că:
a) $EO \equiv OF$;
b) $BPDQ$ și $APCQ$ sunt paralelograme.

11 Pe laturile EF și GH ale paralelogramului $EFGH$, se consideră punctele A, respectiv B, astfel încât $EF = 3AE$ și $HB = 2BG$.
Demonstrați că:
a) $EA \equiv BG$;
b) $AEBG$ este paralelogram;
c) dreptele EG, FH și AB sunt concurente.

12 Punctul P este situat pe latura BC a triunghiului ABC. Punctele M și N sunt simetricele punctului P față de mijloacele laturilor AB, respectiv AC.
Demonstrați că:
a) punctele M, A, N sunt coliniare;
b) $BCNM$ este paralelogram.

13 Punctul M este mijlocul laturii EF, a triunghiului DEF. Paralela prin punctul E la dreapta DM intersectează dreapta DF în punctul N, iar punctul P este simetricul punctului M față de D.
a) Demonstrați că $EF \parallel NP$.
b) Demonstrați că $MN \equiv PF$.

14 În paralelogramul $MNPQ$, avem $\sphericalangle M > \sphericalangle N$.
Fie $MR \perp MN$, $R \in NP$ și $PS \perp PQ$, $S \in MQ$.
Demonstrați că:
a) $MRPS$ și $NRQS$ sunt paralelograme;
b) dreptele MP, NQ și RS sunt concurente.

15 Triunghiul ABC este isoscel, cu baza BC, iar AD este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$, $D \in BC$. Segmentul DP este mediană a triunghiului ABD, iar segmentul DQ este mediană a triunghiului ACD.
a) Demonstrați că $\sphericalangle APD \equiv \sphericalangle AQD$.
b) Demonstrați că $CDPQ$ este paralelogram.
c) Dacă $PQ \cap AD = \{E\}$, calculați valoarea raportului $\dfrac{ED}{AD}$.

16 În paralelogramul $ABCD$, $AD \perp BD$, $\sphericalangle CBD = 3 \cdot (\sphericalangle ABD)$ și $AB = 24$ cm. Asociați fiecărei litere care numește cerința, din coloana întâi, cifra care numește răspunsul corect, din coloana a doua.

a) $\sphericalangle ABC =$
b) $\sphericalangle C =$
c) $BC =$
d) $\mathcal{P}_{ABCD} =$

1. 100°
2. 120°
3. 60°
4. 72 cm
5. 12 cm
6. 102 cm

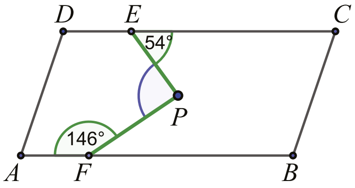
17 Triunghiurile ABC și AMN au aceeași mediană AD, iar $M \notin BC$. Arătați că patrulaterul cu vârfurile B, C, M, N este paralelogram.

18 Fie C mijlocul segmentului AB. Dreapta d intersectează mediatoarele segmentelor AC și BC în punctele D, respectiv E, situate de aceeași parte a dreptei AB. Demonstrați că dacă $DC \equiv EC$, atunci $ADEC$ este paralelogram.

19 În paralelogramul $ABCD$ notăm cu E și F mijloacele laturilor DC, respectiv BC. Dreapta AE intersectează BC în G, dreapta AF intersectează DC în H. Arătați că patrulaterul $DBHG$ este paralelogram.

20 În patrulaterul convex $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$ Se știe că $AO \equiv OC$ și $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ADC$. Demonstrați că patrulaterul dat este paralelogram.

21 Punctul P este situat în interiorul paralelogramului $ABCD$, iar E și F sunt pe laturile acestuia. Folosind datele din figura de mai jos, aflați măsura unghiului $\sphericalangle EPF$.



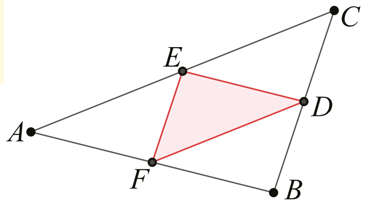
L2 Aplicații ale paralelogramului în geometria triunghiului

Ne amintim

1) Se numește **mediană** a unui triunghi un segment care unește unul dintre vârfurile triunghiului cu mijlocul laturii opuse acestuia.
   Medianele unui triunghi sunt concurente. Punctul de intersecție a medianelor se notează, de regulă, cu G și se numește ***centru de greutate***.
2) Se numește **mediatoarea** unui segment dreapta perpendiculară pe segment care conține mijlocul său.
   Mediatoarele laturilor unui triunghi sunt concurente. Punctul de intersecție a mediatoarelor se notează, de regulă, cu O și se numește ***centrul cercului circumscris triunghiului***.
3) Se numește **înălțime** a unui triunghi segmentul determinat de un vârf al triunghiului și piciorul perpendicularei duse din acel vârf pe dreapta suport a laturii opuse.
   Înălțimile unui triunghi sunt concurente. Punctul de intersecție a înălțimilor se notează, de regulă, cu H și se numește ***ortocentru***.
4) Se numește **bisectoare** a unui unghi semidreapta interioară unghiului care are originea în vârful unghiului și determină, cu laturile acestuia, două unghiuri congruente.
   Bisectoarele unghiurilor unui triunghi sunt concurente. Punctul de intersecție a bisectoarelor se notează, de regulă, cu I și se numește ***centrul cercului înscris în triunghi***.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

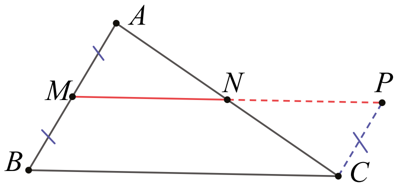
Definiție: Segmentul care unește mijloacele a două laturi ale unui triunghi se numește **linie mijlocie** a triunghiului.



1) Punctele D, E, F sunt *mijloacele* laturilor.
2) Segmentele DE, EF, FD sunt *liniile mijlocii* ale triunghiului ABC.

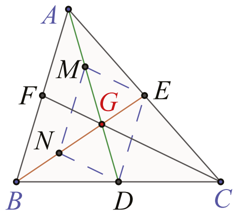
Teorema 1. Linia mijlocie determinată de mijloacele a două laturi ale unui triunghi este paralelă cu a treia latură și are lungimea egală cu jumătate din lungimea acesteia.

Demonstrație: Considerăm ΔABC și linia mijlocie MN, $M \in AB$, $N \in AC$. Prelungim MN cu segmentul $NP \equiv MN$. Deoarece N este mijlocul segmentului AC, în patrulaterul $AMCP$ diagonalele se înjumătățesc, deci $AMCP$ este paralelogram. Rezultă că $PC \parallel AM$ și $PC = AM$. Dar M este mijlocul laturii AB și obținem că $PC \parallel BM$ și $PC = BM$, ceea ce arată că patrulaterul $BCPM$ este paralelogram. Rezultă succesiv: $MP \parallel BC$ și $MP = BC$, adică $MN \parallel BC$ și $2MN = BC$, iar în final, $MN \parallel BC$ și $MN = \dfrac{BC}{2}$.



Teorema 2. Centrul de greutate al unui triunghi este situat pe fiecare mediană, la două treimi de vârful pe care îl conține și la o treime de mijlocul laturii opuse acestuia.

Demonstrație: Considerăm triunghiul ABC și medianele sale AD și BE. Dreptele AD și BE sunt concurente, deoarece formează cu secanta AB unghiuri interne de aceeași parte a secantei care nu sunt suplementare. Într-adevăr, $\sphericalangle DAB + \sphericalangle EBA < \sphericalangle A + \sphericalangle B < 180°$. Notăm $\{G\} = AD \cap BE$. Fie M și N mijloacele segmentelor AG, respectiv BG.



În triunghiul GAB avem MN linie mijlocie, deci $MN \parallel AB$ și $MN = \dfrac{AB}{2}$.

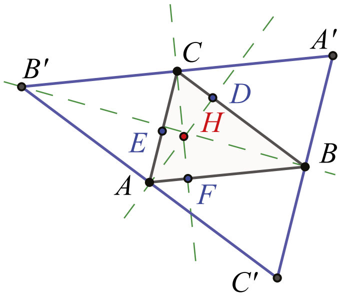
În triunghiul CAB avem DE linie mijlocie, deci $DE \parallel AB$ și $DE = \dfrac{AB}{2}$.

Rezultă că $MN \parallel DE$, $MN = DE$, ceea ce arată că patrulaterul $DEMN$ este paraleogram și diagonalale sale se înjumătățesc. Obținem $AM = MG = GD$ și $BN = NG = GE$. În final, $AG = \dfrac{2}{3}AD$, $GD = \dfrac{1}{3}AD$, $BG = \dfrac{2}{3}BE$ și $GE = \dfrac{1}{3}BE$. Se demonstrează analog că punctul G aparține și medianei CF și $CG = \dfrac{2}{3}CF$, $GF = \dfrac{1}{3}CE$. Punctul situat pe mediana AD, la o treime de bază și două treimi de vârf este unic. Deducem că cele trei mediane au în comun acest punct, notat cu G și numit *centru de greutate*.

Teorema 3. Înălțimile unui triunghi sunt concurente. Punctul în care se intersectează înălțimile se notează, de regulă, cu H și se numește *ortocentrul triunghiului*.

Pentru a demonstra această teoremă, vom folosi proprietățile paralelogramului și următorul rezultat, învățat în clasa a VI-a: *Mediatoarele laturilor unui triunghi sunt concurente într-un punct, numit centrul cercului circumscris triunghiului.*

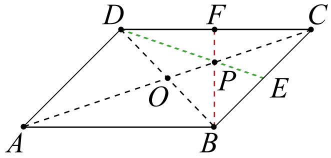
Demonstrație: Prin A, B și C construim paralele la BC, AC, respectiv AB, care se intersectează, două câte două, în punctele A', B' și C'.
Patrulaterele $BCAC'$ și $BCB'A$ au laturile respectiv paralele, deci sunt paralelograme. Așadar B', A, C' sunt coliniare și $C'A \equiv BC \equiv AB'$, adică A este mijlocul lui $B'C'$.
Înălțimea AD este perpendiculară pe BC, iar $BC \parallel B'C'$, deci $AD \perp B'C'$.
Prin urmare, înălțimea din A a ΔABC este mediatoare pentru latura $B'C'$ a triunghiului $A'B'C'$. Cu același raționament, arătăm că înălțimea din B a ΔABC este mediatoare pentru latura $A'C'$ a $\Delta A'B'C'$, iar înălțimea din C a ΔABC este mediatoare pentru latura $B'A'$ a $\Delta A'B'C'$. Știm că, în orice triunghi, mediatoarele sunt concurente. În concluzie, înălțimile ΔABC, care sunt situate pe mediatoare, sunt concurente într-un punct. Notăm acest punct cu H și îl numim ortocentru al ΔABC.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicația 1: Punctul E este mijlocul laturii BC, a paralelogramului $ABCD$, cu $AC \cap BD = \{O\}$ și $AC \cap DE = \{P\}$. Demonstrați că dreapta BP conține mijlocul laturii CD.

Soluție: În paralelogramul $ABCD$, segmentele AC și BD sunt diagonale, deci se înjumătățesc și CO va fi mediană în ΔBCD.
Cum și DE este mediană, rezultă că punctul P este centrul de greutate al acestui triunghi, deci mediana din B conține punctul P. Dacă $BP \cap CD = \{F\}$, atunci BF este mediană și F este mijlocul laturii CD.

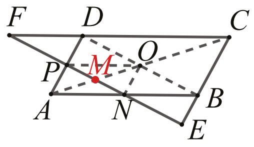


Aplicația 2: Fie $ABCD$ paralelogram, $AC \cap BD = \{O\}$ și fie M, mijlocul segmentului AO.
Dreapta EF conține punctul M și este paralelă cu dreapta BD, $E \in BC$, $F \in CD$.
Demonstrați că punctul O este centrul de greutate al triunghiului CEF.

Soluția I: Din proprietățile paralelogramului, $AO = CO$,

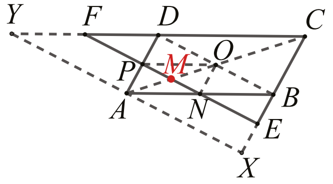
iar $AO = 2 \cdot MO$, deci $MO = \dfrac{CM}{3}$. (1)

Rămâne de demonstrat că CM este mediană în triunghiul CEF.
Fie $EF \cap AB = \{N\}$ și $EF \cap AD = \{P\}$. În ΔAOB, M este mijlocul laturii AO, $N \in AB$ și $MN \parallel OB$. Rezultă că N este mijlocul laturii AB și $MN = \dfrac{BO}{2}$.



În ΔAOD, M este mijlocul laturii AO, $P \in AD$ și $MP \parallel OD$. Rezultă că P este mijlocul laturii AD și MP este linie mijlocie în ΔAOD, deci $MP = \dfrac{DO}{2}$. Deoarece $BO = DO$, rezultă că $MN = MP$. (2)

NO este linie mijlocie în $\Delta BDA \Rightarrow NO \parallel AD \parallel BC$, iar din ipoteză, $NE \parallel OB$, deci patrulaterul $BENO$ este paralelogram, cu $EN = BO$. Analog, $DFPO$ are laturile opuse paralele, deci $DFPO$ este paralelogram și $FP = DO$, de unde $EN = FP$. Folosind relația (2), rezultă $EM = FM$. În concluzie, segmentul CM este mediană în ΔCEF, iar din (1), O este centrul de greutate al acestui triunghi.

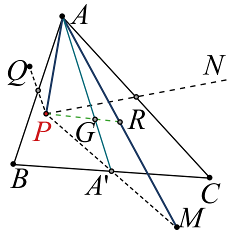


Soluția a II-a: Construim paralela prin A, la BD, care intersectează dreapta BC în X și dreapta CD în Y. Patrulaterele $DAXB$ și $DBAY$ sunt paralelograme (au laturile opuse paralele). Atunci, în ΔAOB, $MN = \dfrac{OB}{2} = \dfrac{BD}{4}$, iar în ΔABX, $NE = \dfrac{AX}{2} = \dfrac{BD}{2}$, deci $ME = \dfrac{3}{4}BD$. Analog $MF = \dfrac{3}{4}BD$. Rezultă $ME = MF$, deci CM este mediană în ΔCFE. Folosind (1), rezultă că O este centrul de greutate al ΔCFE.

Aplicația 3: Punctul G este centrul de greutate al triunghiului ABC, iar punctul P este situat în interiorul triunghiului și este diferit de G. Se consideră M, N, Q simetricele punctului P față de mijloacele laturilor BC, CA, respectiv AB, ale triunghiului.

a) Demonstrați că punctul G este centru de greutate și pentru triunghiul APM.

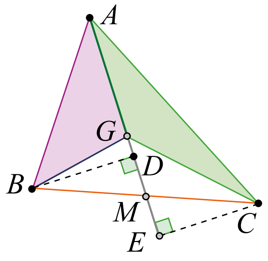
b) Demonstrați că dreptele AM, BN și CQ sunt concurente.



Soluție: a) Fie A' mijlocul laturii BC. Deoarece M este simetricul punctului P față de A', rezultă că P, A' și M sunt coliniare și $PA' = A'M$, deci AA' este mediană a triunghiului APM și G este centrul de greutate al acestuia.

b) Analog, G este centru de greutate al triunghiurilor BPN și CPQ. Fie R mijlocul segmentului AM. Atunci, $G \in PR$ și $PG = 2\ GR$. Fie S mijlocul segmentului BN. Atunci, $G \in PS$ și $PG = 2\ GS$. Fie T mijlocul segmentului CQ. Atunci, $G \in PT$ și $PG = 2\ GT$. Obținem $R = S = T$, deci dreptele AM, BN, CQ sunt concurente.

Aplicația 4: Se consideră triunghiul ABC și un punct G în interiorul său. Demonstrați că G este centrul de greutate al triunghiului ABC *dacă* și *numai dacă* triunghiurile ABG, BCG și ACG au arii egale.



Soluție: Să observăm, mai întâi, că în cerința problemei apare sintagma *dacă și numai dacă*, ceea ce ne spune că avem de demonstrat două implicații:

1) Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC, atunci triunghiurile ABG, BCG și ACG au aceeași arie.

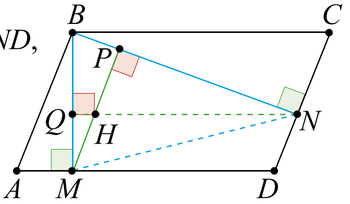
2) Dacă triunghiurile ABG, BCG și ACG au arii egale, atunci G este centru de greutate în triunghiul ABC.

1) Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC și $AG \cap BC = \{M\}$, atunci M este mijlocul laturii BC. Construim $BD \perp AG$, $CE \perp AG$, $D, E \in AG$. Folosind cazul de congruență I.U., obținem $\Delta BDM \equiv \Delta CEM$, de unde $BD = CE$ și $\mathcal{A}_{ABG} = \dfrac{AG \cdot BD}{2} = \dfrac{AG \cdot CE}{2} = \mathcal{A}_{ACG}$.

Printr-un raționament similar, se obține $\mathcal{A}_{ABG} = \mathcal{A}_{BCG}$, deci $\mathcal{A}_{ABG} = \mathcal{A}_{ACG} = \mathcal{A}_{BCG}$.

2) Dacă $\mathcal{A}_{ABG} = \mathcal{A}_{ACG}$, atunci $\dfrac{AG \cdot BD}{2} = \dfrac{AG \cdot CE}{2}$, adică $BD = CE$ și $\Delta BDM \equiv \Delta CEM$, deci $BM = CM$, adică M este mijlocul laturii BC. Cum G este situat pe AM, rezultă că G aparține medianei AM. Procedând la fel, din $\mathcal{A}_{ABG} = \mathcal{A}_{BCG}$, rezultă că G aparține medianei din B a triunghiului ABC, adică G este centrul de greutate al ΔABC.

Aplicația 5: Considerăm paralelogramul $ABCD$, cu unghiul A ascuțit și $BM \perp AD$, $M \in AD$, $BN \perp CD$, $N \in CD$. Știind că H este ortocentrul triunghiului BMN, arătați că $DMHN$ este paralelogram.



Soluția I: Fie MP și NQ înălțimi în ΔBMN și $MP \cap NQ = \{H\}$. În patrulaterul $MPND$, $\sphericalangle MPN + \sphericalangle PND = 180° \Rightarrow \sphericalangle PMD + \sphericalangle MDN = 180°$, deci $HM \parallel DN$. (1)

Deoarece $BM \perp AD$ și $NQ \perp BM$, rezultă $AD \parallel NQ$, deci $DM \parallel HN$. (2)

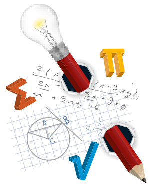
Folosind definiția paralelogramului, relațiile (1) și (2) ne asigură că $DMHN$ este paralelogram.

Soluția a II-a:

Din $MP \perp PN$ și $PN \perp ND$ rezultă $HM \parallel DN$.

Din $NQ \perp BM$ și $BM \perp AD$ avem $HN \parallel DM$.

Deci $HNDM$ este paralelogram.



Reținem!

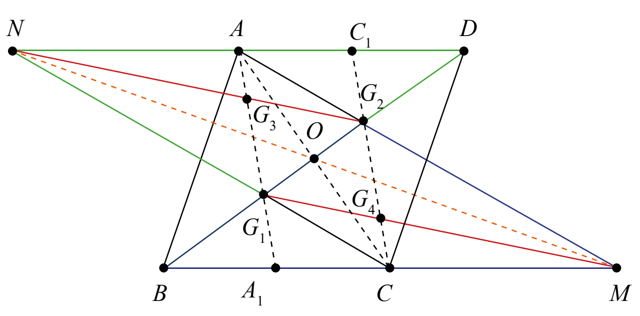
- Segmentul care unește mijloacele a două laturi ale unui triunghi se numește **linie mijlocie** a triunghiului.
- Linia mijlocie determinată de două laturi ale unui triunghi este paralelă cu a treia latură și are lungimea egală cu jumătate din lungimea acesteia.
- Medianele unui triunghi sunt concurente într-un punct G care se află, pe fiecare mediană, la două treimi de vârful ei și la o treime de mijlocul laturii opuse. Punctul G este *centrul de greutate al triunghiului.*
- Înălțimile unui triunghi sunt concurente într-un punct H, numit *ortocentrul triunghiului*.

Temă de portofoliu

I. a) Folosind o foaie suficient de mare și instrumente geometrice, realizați, respectând etapele sugerate, următoarea configurație geometrică.

1) Construiți paralelogramul $ABCD$, cu centrul O.
2) Identificați centrele de greutate ale triunghiurilor ABC și ADC. Notați-le cu G_1, respectiv G_2.
3) Construiți segmentele AM și AN, unde $\{M\} = AG_2 \cap BC$, iar $\{N\} = CG_1 \cap AD$.
4) Identificați centrele de greutate ale triunghiurilor DNG_1 și BMG_2. Notați-le cu G_3, respectiv G_4.
5) Trasați segmentele NG_2 și MG_1. Trasați cu linie punctată segmentul MN.
6) Demonstrați că patrulaterul $AMCN$ este un paralelogram care are centrul comun cu cel al paralelogramului $ABCD$.
7) Demonstrați că $G_1G_4G_2G_3$ este paralelogram, cu centrul O.
8) Enumerați toate paralelogramele care apar în configurația realizată.

b) Folosind desenul realizat, rezolvați complet cerințele 6), 7) și 8).
Pentru fiecare etapă a demersului, descrieți raționamentul făcut.



II. Demonstrați că centrul de greutate al unui triunghi este și centrul de greutate al triunghiului format de simetricele vârfurilor acestuia față de mijloacele laturilor opuse.

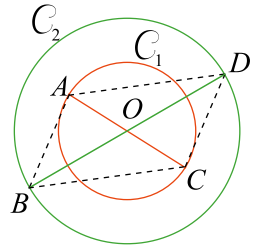
Evaluare sumativă

Se acordă 10 puncte din oficiu.

I. *La cerințele următoare alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.*

5p	**1.** Patrulaterul $ABCD$ are unghiurile A și B suplementare și $\sphericalangle C = 100°$. Măsura unghiului D este: A. 100° B. 90° C. 80° D. 180°
5p	**2.** În patrulaterul convex $EFGH$, $EG \cap FH = \{O\}$, EO este mediană în triunghiul EFH, FO este mediană în triunghiul EFG. O pereche de drepte paralele este: A. EO și GF B. FO și HG C. GO și HE D. EF și HG
5p	**3.** În patrulaterul $MNPQ$, $MN = MQ$ și $PN = PQ$. Unghiul format de dreptele MP și NQ are măsura de: A. 90° B. 80° C. 120° D. 100°
5p	**4.** Perimetrul paralelogramului $ABCD$ este 54 cm, iar $AB = 0{,}8BC$. Latura CD are lungimea de: A. 15 cm B. 12 cm C. 13 cm D. 14 cm
5p	**5.** Triunghiul DEF este isoscel, $D = 30°$, $DE = DF$. Paralela prin F la DE intersectează paralela prin D la EF în punctul P. Măsura unghiului DPF este: A. 70° B. 80° C. 75° D. 85°
5p	**6.** Fie patrulaterul $LMNP$, în care $\sphericalangle LMP \equiv \sphericalangle MPN$. Măsura $\sphericalangle LMN + \sphericalangle MNP$ este: A. 90° B. 120° C. 150° D. 180°
5p	**7.** Semidreptele AE și BE sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle DAB$ și $\sphericalangle ABC$ ale paralelogramului $ABCD$. Măsura $\sphericalangle AEB$ este: A. 60° B. 90° C. 30° D. 120°
5p	**8.** $ABCD$ este un paralelogram, $AC = 20$ dm, $BD = 16$ dm, $BC = 6$ dm, iar $AC \cap BD = \{O\}$. Perimetrul triunghiului ADO este: A. 30 cm B. 20 cm C. 24 cm D. 18 cm

II. *La problemele următoare se cer rezolvări complete.*

 5p **5p**	**1.** În figura alăturată, segmentul AC este diametru al cercului $\mathcal{C}_1$ și BD este diametru al cercului $\mathcal{C}_2$. Cele două cercuri au același centru, punctul O. Demonstrați că: a) $AB \parallel CD$; b) $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ADC$. 
10p	**2.** $BCDE$ este un paralelogram cu $BC = 2CD$ și M este mijlocul laturii DE. Calculați măsura unghiului BMC.
15p	**3.** Laturile AB și AC ale triunghiului ABC se prelungesc cu segmentele BD, respectiv CE astfel încât $BD = CE = BC$. Bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle ACB$ se intersectează în punctul I, iar dreptele BE și CD se intersectează în punctul L. Demonstrați că $BLCI$ este paralelogram.
 5p **5p** **5p**	**4.** Fie paralelogramul $ABCD$, în care $AB = 4$ cm, $AB \perp BD$ și $\sphericalangle BAD = 2\sphericalangle ADB$. Punctul E este simetricul punctului B față de D, iar $EA \cap BC = \{F\}$. a) Aflați măsurile unghiurilor paralelogramului. b) Calculați perimetrul paralelogramului. c) Determinați lungimile segmentelor CE și CF.

4.3 Paralelograme particulare: dreptunghi, romb, pătrat

L1 Dreptunghiul. Proprietăți

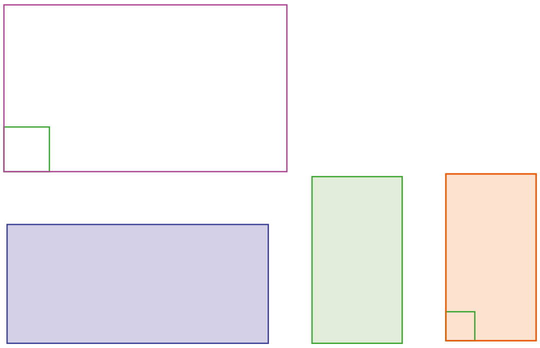
Ne amintim

- Patrulaterul *ABCD* este paralelogram dacă și numai dacă $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$ și $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle D$.
- Patrulaterul *ABCD* este paralelogram dacă și numai dacă are loc una dintre condițiile:
  1) $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180°$ și $\sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$; 2) $\sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$ și $\sphericalangle C + \sphericalangle D = 180°$;
  3) $\sphericalangle C + \sphericalangle D = 180°$ și $\sphericalangle D + \sphericalangle A = 180°$; 4) $\sphericalangle D + \sphericalangle A = 180°$ și $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180°$.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Definiție: Paralelogramul cu un unghi drept se numește **dreptunghi**.

Mulțimea tuturor punctelor situate în interiorul unui dreptunghi sau pe laturile acestuia se numește **suprafață dreptunghiulară**.



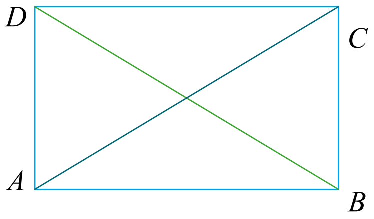
Întâlnim dreptunghiuri și suprafețe dreptunghiulare în numeroase situații practice: foaia de hârtie a unei cărți sau a unui caiet, masa de scris, ecranul calculatorului, al telefonului etc., deci avem suficiente motive să studiem, în detaliu, proprietățile acestei figuri geometrice.
Dreptunghiul este un paralelogram; prin urmare, el are *toate proprietățile paralelogramului*. Adăugăm câteva proprietăți specifice.

Teorema 1. Toate unghiurile unui dreptunghi sunt drepte.

Demonstrație: Știm că în paralelogram unghiurile opuse sunt congruente, iar cele alăturate sunt suplementare. Dacă unul dintre unghiuri este drept, atunci unghiul opus este drept, iar unghiurile alăturate lui, fiind suplementare, sunt și ele drepte. În consecință, toate cele patru unghiuri ale unui dreptunghi sunt *drepte*, deci toate sunt *congruente*.

Teorema 2. Diagonalele unui dreptunghi sunt segmente congruente.

Demonstrație: Fie *ABCD* dreptunghi. Triunghiurile dreptunghice ΔDAB și ΔCBA, în care $AD \equiv BC$ și *AB* este latură comună, sunt congruente conform cazului C.C.
Rezultă $AC \equiv BD$, adică diagonalele sunt segmente congruente.



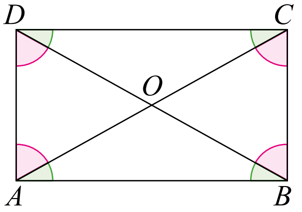
Teorema 3. Dacă diagonalele unui paralelogram sunt congruente, atunci acesta este dreptunghi.

Demonstrație: În paralelogramul *ABCD* diagonalele sunt congruente, $AC \equiv BD$. Pentru a arăta că acesta este dreptunghi, vom demonstra că unul dintre unghiurile sale este drept. În acest scop, vom studia congruența a două triunghiuri care conțin diagonalele. În ΔDAB și ΔCBA, avem: $AC \equiv BD$, $AD \equiv BC$, iar *AB* este latură comună. Aplicând cazul de congruență L.L.L., avem $\Delta DAB \equiv \Delta CBA$, adică $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle CBA$. Dar, cele două sunt unghiuri alăturate în paralelogram, adică sunt suplementare. Fiind și congruente, ele sunt unghiuri drepte, deci patrulaterul este dreptunghi.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Sunt remarcabile și următoarele proprietăți:

1) Diagonalele unui dreptunghi formează cu două laturi opuse ale acestuia patru unghiuri congruente.



Demonstrație: Observăm unghiurile formate de diagonalele AC și BD cu laturile AB și CD. Triunghiurile dreptunghice ΔABD, ΔBAC, ΔCDB, ΔDCA sunt congruente, conform cazului de congruență C.C., deci $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle BAC \equiv$
$\equiv \sphericalangle CDB \equiv \sphericalangle DCA$.
În mod analog, observăm că unghiurile formate de diagonalele AC și BD cu laturile AD și BC sunt congruente: $\sphericalangle CBD \equiv \sphericalangle BCA \equiv \sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle ADB$.

2) Diagonalele unui dreptunghi formează, cu laturile acestuia, două perechi de triunghiuri isoscele congruente.
Demonstrație: Fie $ABCD$ dreptunghi. Diagonalele dreptunghiului sunt congruente și se înjumătățesc, adică $AC \equiv BD$ și $AO \equiv BO \equiv CO \equiv DO$, unde O este punctul de intersecție a diagonalelor.
Din $AO \equiv CO$, $BO \equiv DO$ și $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$, rezultă $\Delta AOB \equiv \Delta COD$.
Din $AO \equiv CO$, $DO \equiv BO$ și $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle BOC$, rezultă $\Delta AOD \equiv \Delta COB$.
Din $AO \equiv BO \equiv CO \equiv$ DO, rezultă că toate cele patru triunghiuri sunt isoscele.

Rezultatele obținute ne oferă două tehnici de a demonstra că un patrulater este dreptunghi:
1) definiția: „Dreptunghiul este un *paralelogram cu un unghi drept*”.
2) teorema 3: „Dreptunghiul este un *paralelogram cu diagonalele congruente*”.
Aplicația următoare adaugă la acestea un nou instrument prin care putem arăta că o figură este dreptunghi.

Aplicație: Patrulaterul convex cu toate unghiurile congruente este dreptunghi.
Soluție: Suma măsurilor *unghiurilor unui patrulater convex este* 360°. Cum cele patru unghiuri ale patrulaterului sunt congruente, iar suma lor este 360°, rezultă că fiecare unghi are 90°. Toate unghuiurile patrulaterului sunt drepte, adică oricare două unghiuri alaturate sunt suplementare. Patrulaterul este paralelogram cu un unghi drept, deci este dreptunghi.

Reținem!

- Paralelogramul cu un unghi drept se numește dreptunghi.
- Toate unghiurile unui dreptunghi sunt drepte.
- Un paralelogram este dreptunghi dacă și numai dacă are diagonalele congruente.
- Dacă un patrulater are trei unghiuri drepte atunci este dreptunghi

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Construiți dreptunghiul $ABCD$ pentru fiecare din situațiile:
a) $AB = 6$ cm, $BC = 5$ cm;
b) $AB = 8$ cm, $BD = 10$ cm;
c) $AC = 12$ cm și $\sphericalangle ACB = 30°$.

2 Demonstrați că orice patrulater cu trei unghiuri drepte este dreptunghi.

3 Demonstrați că orice patrulater în care măsura fiecărui unghi este media aritmetică a măsurilor celorlalte trei unghiuri este un dreptunghi.

4 În dreptunghiul $ABCD$ cu $AC \cap BD = \{O\}$, $\sphericalangle AOD = 60°$ și $AC = 24{,}8$ cm.
Calculați perimetrul triunghiului BOC.

5 Diagonalele dreptunghiului $MNPQ$ se intersectează în punctul O.
a) Dacă $\sphericalangle MOQ = 72^\circ$, calculați măsurile unghiurilor $\sphericalangle MQN$ și $\sphericalangle MPQ$.
b) Dacă $\sphericalangle MQO = 26^\circ$, calculați măsurile unghiurilor $\sphericalangle MOQ$ și $\sphericalangle MPN$.

6 Unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt adiacente suplementare, iar OM, respectiv ON, sunt bisectoarele acestora. Fie $BD \perp OM$, $D \in OM$ și $BE \perp ON$, $E \in ON$. Demonstrați că:
a) patrulaterul $BDOE$ este dreptunghi.
b) $OB \equiv DE$.

7 Fie AD înălțime a triunghiului ABC, $D \in BC$. Punctele E și F sunt simetricele punctului D față de mijloacele laturilor AB, respectiv AC. Demonstrați că $BCFE$ și $ADBE$ sunt dreptunghiuri.

8 Se consideră dreptunghiul $ABCD$, cu $AB = 15$ cm, $BC = 10$ cm. Punctele E și F aparțin laturii AB, astfel încât $AE = EF = FB$, punctul M este mijlocul segmentului BC, iar N este situat pe latura CD, astfel încât $DN = 2\ CN$. Demonstrați că:
a) $BCNF$ este dreptunghi;
b) $DF \perp FM$;
c) dacă P este simetricul punctului M față de N, atunci $DFMP$ este dreptunghi.

9 Diagonalele dreptunghiului $MNPQ$ se intersectează în punctul O, $\sphericalangle ONP = 30^\circ$ și $MP = 20$ cm. Calculați:
a) măsura unghiului MON;
b) lungimea segmentului MN.

10 AB este înălțimea corespunzătoare bazei CD a triunghiului isoscel ACD. Dacă punctul E este simetricul punctului C față de mijlocul segmentului AB, demonstrați că $ABDE$ este dreptunghi.

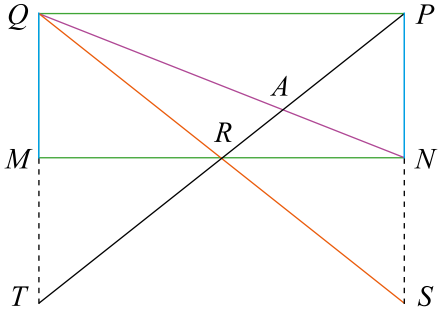
11 Punctele A, B, C, D, E sunt coliniare, în această ordine, cu $AB \equiv BC \equiv CD \equiv DE$, iar punctele M și N sunt simetrice față de punctul C, $M \notin AB$ și $AE = 2\ MN$. Demonstrați că:
a) $AMEN$ este paralelogram.
b) $BMDN$ este dreptunghi.

12 Punctul D este situat pe latura BC a triunghiului ABC. Paralela prin D la AB intersectează dreapta AC în punctul E, iar paralela prin D la AC intersectează dreapta AB în punctul F. Demonstrați că $AEDF$ este dreptunghi dacă și numai dacă $\sphericalangle BAC = 90^\circ$.

13 AB este diametrul cercului cu centrul O și raza $AO = r$. Mediatoarea segmentului AO intersectează cercul în punctele C și D, iar mediatoarea segmentului BO intersectează cercul în punctele E și F.
Demonstrați că punctele C, D, E, F sunt vârfurile unui dreptunghi.

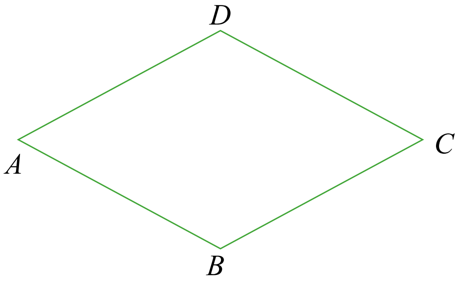
14 Punctul P este situat pe latura AB a dreptunghiului $ABCD$, astfel încât $CP = AB$ și $\sphericalangle APD = 5 \cdot (\sphericalangle ADP)$. Calculați măsurile unghiurilor triunghiului CDP.

15 $MNPQ$ este dreptunghi, S este simetricul punctului P față de N, $QS \cap MN = \{R\}$ și $PR \cap MQ = \{T\}$.
a) Demonstrați că $TS \equiv MN$.
b) Dacă $PR \cap QN = \{A\}$, demonstrați $AT = 2 \cdot PA$.



L2 Rombul. Proprietăți

Descoperim, înțelegem, exemplificăm



Definiție: Paralelogramul care are două laturi consecutive (alăturate) congruente se numește **romb**.

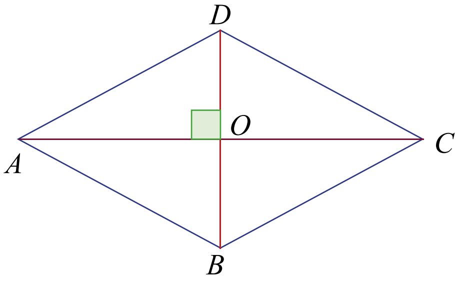
Rombul este un paralelogram, prin urmare, rombul are *toate proprietățile paralelogramului*. Adăugăm câteva proprietăți specifice.

Teorema 1. Toate laturile unui romb sunt congruente.

Demonstrație: Fie rombul $ABCD$. Deoarece este paralelogram, laturile opuse sunt congruente, deci $AB \equiv CD$ și $AD \equiv BC$. Condiția suplimentară, $AB \equiv BC$, implică $AB \equiv BC \equiv CD \equiv DA$.
În consecință, toate cele patru laturi ale rombului sunt *congruente*.

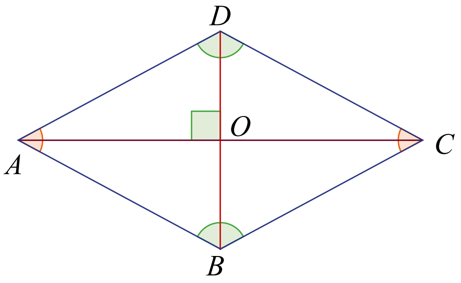
Teorema 2. Diagonalele unui romb sunt perpendiculare.

Demonstrație: Considerăm rombul $ABCD$ și $AC \cap BD = \{O\}$.
Diagonalele sale se înjumătățesc, deci $OA \equiv OC$.
În triunghiul isoscel ABC, BO este mediana corespunzătoare bazei AC, deci este și înălțime. Rezultă $BO \perp AC$ sau $BD \perp AC$.



Teorema 3. Diagonalele unui romb sunt bisectoare ale unghiurilor acestuia.

Demonstrație: Considerăm rombul $ABCD$ și $AC \cap BD = \{O\}$.
Triunghiul ABD este isoscel, iar dreapta AC include mediana AO, corespunzătoare bazei. Atunci, AC include și bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAD$, adică $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle DAC$.
Dar, $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ACD$ și $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle ACB$ (sunt alterne interne).
Cele trei congruențe conduc la $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle ACD$,
adică dreapta AC include și bisectoarea unghiului $\sphericalangle BCD$.
La fel se demonstrează că dreapta BD include bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle ADC$.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Putem deduce acum **condiții suficiente** ca un patrulater să fie romb.

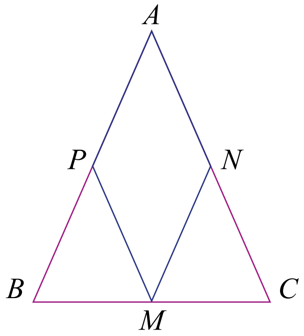
C_1: Dacă un patrulater are toate laturile congruente, atunci acesta este romb.
C_2: Dacă diagonalele unui paralelogram sunt perpendiculare, atunci acesta este romb.
C_3: Dacă una dintre diagonalele unui paralelogram este și bisectoare a unui unghi al paralelogramului, atunci acest paralelogram este romb.

Am identificat următoarele modalități de a arăta că o figură geometrică este romb:
1) Definiția: „Rombul este paralelogramul care are două laturi alăturate congruente”.
2) Condiția suficientă C_1 (referitoare la lungimile laturilor).
3) Condițiile suficiente C_2 sau C_3 (referitoare la diagonale).

Temă de portofoliu

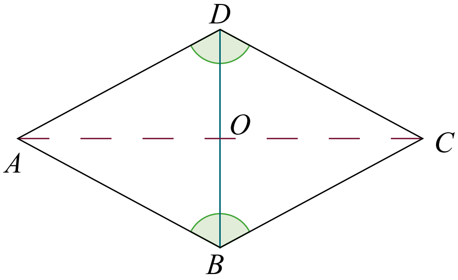
După ce ați înțeles raționamentele prin care au fost demonstrate teoremele 1, 2, 3, demonstrați împreună cu un coleg/o colegă afirmațiile C_1, C_2 și C_3.

Aplicația 1: Fie M, N, P mijloacele laturilor triunghiului isoscel ABC, cu $AB \equiv AC$. Demonstrați că patrulaterul cu vârfurile A, M, N, P este romb.



Soluție: Fie M mijlocul laturii BC, N mijlocul laturii AC, P mijlocul laturii AB. Atunci, $AP = \dfrac{AB}{2}$ și $AN = \dfrac{AC}{2}$. Segmentele MN și MP sunt linii mijlocii în ΔABC, deci $MN = \dfrac{AB}{2}$ și $MP = \dfrac{AC}{2}$.
Dar $AB \equiv AC$, deci $PA = MP = MN = AN$.
Conform C_1, patrulaterul $ANMP$ este romb.

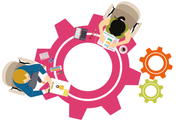
Aplicația 2: $ABCD$ este un patrulater convex, în care diagonala BD este bisectoarea unghiurilor $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle D$, iar AC este mediatoarea segmentului BD. Demonstrați că $ABCD$ este romb.



Soluție: Diagonala BD este bisectoarea unghiurilor $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle \mathrm{D}$. Suntem tentați să ne gândim la condiția C_3. Dar nu știm despre $ABCD$ că ar fi paralelogram. Căutăm elemente congruente.
Diagonala BD este bisectoarea unghiurilor $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle D$, deci $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CBD$ și $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CDB$, iar BD este latură comună.
Conform cazului de congruență U.L.U., $\Delta ABD \equiv \Delta CBD$. Rezultă $AB \equiv BC$ și $AD \equiv DC$. Dar AC este mediatoarea segmentului BD, deci $AB \equiv AD$ și $CB \equiv CD$.
Obținem $AB \equiv BC \equiv CD \equiv DA$, adică $ABCD$ este romb.

Reținem!

- Paralelogramul care are două laturi alăturate congruente se numește romb.
- Un patrulater este romb dacă și numai dacă are toate laturile congruente.
- Un paralelogram este romb dacă și numai dacă are diagonalele perpendiculare.
- Un paralelogram este romb dacă și numai dacă o diagonală este și bisectoare a unui unghi al său.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 a) Construiți rombul $ABCD$, cu latura de 6 cm.
b) Construiți rombul $EFGH$, cu $EG = 2$ cm și $FH = 5$ cm.

2 Ana și Călin au următorul dialog despre patrulatere:
Ana: Mijloacele laturilor oricărui romb sunt vârfurile unui dreptunghi.
Călin: Mijloacele laturilor oricărui dreptunghi sunt vârfurile unui romb.
Decideți care dintre cei doi prieteni are dreptate. Justificați răspunsul dat.

3 $ABCD$ este un paralelogram cu $\sphericalangle ADB = 56°$ și $\sphericalangle ACB = 34°$.
Demonstrați că $ABCD$ este un romb.

4 $ABCD$ este un romb, iar paralela prin punctul C la dreapta BD intersectează dreapta AB în punctul M și dreapta AD în punctul N. Demonstrați că $MN = 2 \cdot BD$.
Stabiliți dacă rămâne valabil rezultatul când $ABCD$ este doar paralelogram, fără a fi romb.

5 $MNPQ$ este paralelogram, iar distanțele de la punctul M la dreptele NP și PQ sunt egale. Arătați că $MNPQ$ este romb.

6 Fie rombul $CDEF$ cu $CE \cap DF = \{O\}$, $CO = 2{,}5$ cm, iar $EF = 5$ cm.
a) Aflați măsurile unghiurilor rombului.
b) Calculați măsurile unghiurilor CEF și CFD.

7 În paralelogramul $ABCD$, $AB = BD = 10$ cm, E este mijlocul laturii AD și $BE \cap CD = \{F\}$.

a) Demonstrați că $DC \equiv DF$.

b) Calculați lungimea segmentului AF.

8 Pe latura LM a rombului $LMNP$ se consideră punctul Q, astfel încât $PQ \perp LM$. Știind că $LM = 16$ cm și $PQ = 8$ cm, aflați măsurile unghiurilor rombului.

9 Punctul O este centrul dreptunghiului $ABCD$. Paralela prin punctul C la dreapta BD intersectează paralela prin punctul D la dreapta AC în E. Demonstrați că $CD \perp OE$.

10 Fie punctul M situat pe una dintre diagonalele rombului $ABCD$. Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției:

„$\sphericalangle AMB + \sphericalangle CMD = 180°$”.

11 În triunghiul ABC, $B = 90°$, bisectoarea unghiului A intersectează latura BC în D și perpendiculara în C, pe AC, în E. Fie $EF \parallel BC$, $F \in AB$.

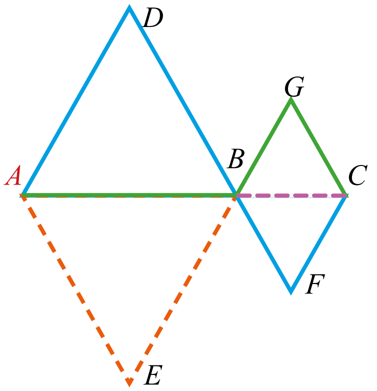
a) Arătați că ΔCDE este isoscel.

b) Demonstrați că $CDFE$ este romb.

12 În configurația de mai jos este reprezentată schița centrului istoric al unui oraș.

Segmentele reprezintă străzile de acces, iar punctele reprezintă obiective turistice.

Marius pleacă din punctul A și vizitează obiectivele D, B, F, C, în această ordine. Bianca pleacă din același punct și vizitează obiectivele B, G, C. Punctele A, B, C sunt coliniare, $AB = 2 \cdot BC = 1{,}2$ km, $\sphericalangle DAE = \sphericalangle FCG = 120°$, iar patrulaterele $ADBE$ și $BFCG$ sunt romburi.



a) Calculați distanța parcursă de Marius și pe cea parcursă de Bianca.

b) Determinați traseul cel mai scurt prin care Marius poate vizita toate obiectivele reprezentate în schiță.

L3 Pătratul. Proprietăți

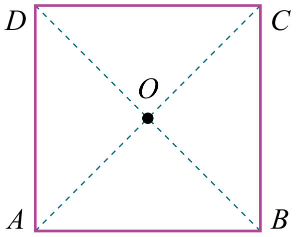
Ne amintim

În lecțiile anterioare, pornind de la paralelogram, adăugând câte o condiție, am obținut următoarele forme geometrice:

1) *dreptunghiul* – adăugând condiția de congruență a unghiurilor;
2) *rombul* – adăugând condiția de congruență a laturilor.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Ne întrebăm ce figură geometrică vom obține dacă vom considera, împreună, cele două restricții (condiții). Desenând un astfel de patrulater, îl recunoaștem imediat: este cel mai cunoscut dintre patrulaterele convexe, **pătratul**.



Definiție: Patrulaterul convex care este și dreptunghi, și romb, se numește *pătrat*.
Mulțimea tuturor punctelor situate în interiorul unui pătrat sau pe laturile sale se numește *suprafață pătratică*.

Această definiție ne sugerează că pătratul se bucură de toate proprietățile dreptunghiului și de toate proprietățile rombului.

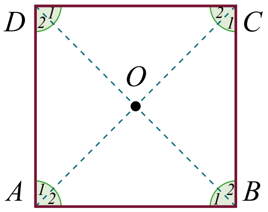
Dorim să identificăm și proprietăți specifice. În acest scop, considerăm pătratul $ABCD$, cu $AC \cap BD = \{O\}$.

Proprietatea

P_1: Pătratul are toate laturile congruente și toate unghiurile congruente (unghiuri drepte).

Demonstrație:

P_1: Din $ABCD$ pătrat, rezultă că $ABCD$ este romb și dreptunghi. Din $ABCD$ romb, obținem $AB \equiv BC \equiv CD \equiv AD$ (are toate laturile congruente), iar din $ABCD$ dreptunghi, obținem $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B \equiv \sphericalangle C \equiv \sphericalangle D$ (are toate unghiurile congruente).



P_2: Diagonalele pătratului sunt congruente și perpendiculare.

P_2: Din $ABCD$ pătrat, rezultă $ABCD$ este romb și dreptunghi. Din $ABCD$ dreptunghi rezultă că diagonalele sunt congruente, $AC \equiv BD$, iar din $ABCD$ romb, obținem că diagonalele sunt perpendiculare, $AC \perp BD$.

P_3: Fiecare diagonală a unui pătrat este bisectoare a unghiurilor ale căror vârfuri le conține.

P_3: Din $ABCD$ pătrat, rezultă $ABCD$ romb, iar diagonalele sunt bisectoare ale unghiurilor sale: $\sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle A_2$ și $\sphericalangle C_1 \equiv \sphericalangle C_2$, apoi $\sphericalangle B_1 \equiv \sphericalangle B_2$ și $\sphericalangle D_1 \equiv \sphericalangle D_2$.

Observație: Unghiurile formate de fiecare diagonală a unui pătrat cu fiecare latură a acestuia sunt congruente și au măsura de 45°.

P_4: Diagonalele pătratului se înjumătățesc determinând patru segmente congruente.

P_4: Din $ABCD$ pătrat, rezultă $ABCD$ paralelogram și diagonalele se înjumătățesc: $OA = OC$ și $OB = OD$. Folosind P_2, rezultă $OA = OB = OC = OD$.

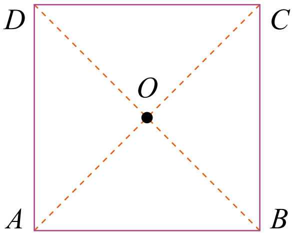
Deducem, de asemenea, condiții suficiente ca un patrulater convex să fie pătrat.

C_1: Dacă un patrulater este și dreptunghi, și romb, atunci acesta este pătrat (definiția).
C_2: Dacă un romb are un unghi drept, atunci acesta este pătrat.
C_3: Dacă un romb are diagonalele congruente, atunci acesta este pătrat.
C_4: Dacă un dreptunghi are diagonalele perpendiculare, atunci acesta este pătrat.
C_5: Dacă un dreptunghi are două laturi consecutive congruente, atunci acesta este pătrat.
C_6: Dacă un paralelogram are două laturi alăturate congruente și două unghiuri alăturate congruente, atunci acesta este pătrat.
C_7: Dacă un paralelogram are diagonalele perpendiculare și congruente, atunci acesta este pătrat.
C_8: Dacă o diagonală a unui dreptunghi este bisectoare a unui unghi al său, atunci acesta este pătrat.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicația 1: Demonstrați condiția C_7: „Dacă un paralelogram are diagonalele congruente și perpendiculare, atunci acesta este pătrat”.

Demonstrație: Considerăm paralelogramul $ABCD$. Din $AC \equiv BD$, rezultă $ABCD$ este dreptunghi. Din $AC \perp BD$, rezultă că $ABCD$ este romb, deci $ABCD$ este și dreptunghi, și romb, adică pătrat.



Temă de portofoliu

Demonstrați împreună cu un coleg/o colegă **alte două** dintre condițiile suficiente enumerate anterior.

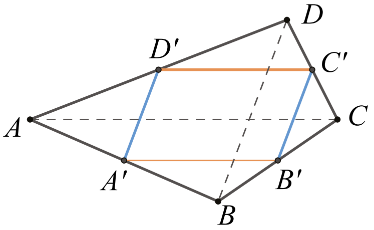
Aplicația 2: În patrulaterul $ABCD$, notăm A', B', C', D' mijloacele laturilor AB, BC, CD, respectiv DA.

1) Demonstrați că patrulaterul $A'B'C'D'$ este paralelogram.

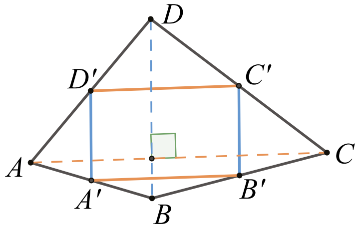
2) Găsiți condițiile pe care trebuie să le îndeplinească $ABCD$, pentru ca $A'B'C'D'$ să fie:
a) dreptunghi; b) romb; c) pătrat.

Demonstrație:

1) Laturile patrulaterul $A'B'C'D'$ unesc mijloacele segmentelor AB, BC, CD, AD, deci ne gândim la noțiunea de linie mijlocie. Construim diagonalele AC și BD. În ΔADB, segmentul $A'D'$ este linie mijlocie, deci este paralelă cu BD și are lungimea egală cu jumătate din BD. În ΔCDB, segmentul $B'C'$ este linie mijlocie, deci este paralelă cu BD și are lungimea egală cu jumătate din BD. Atunci, patrulaterul $A'B'C'D'$ are două laturi opuse paralele și congruente, deci este paralelogram.

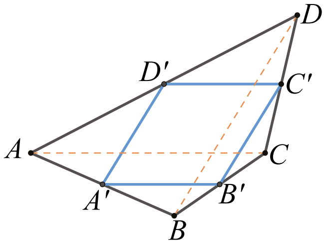


2) a) Pentru ca $A'B'C'D'$ să fie dreptunghi, trebuie să fie parelelogram (ceea ce am arătat), iar laturile alăturate să fie perpendiculare. Dar, laturile patrulaterului $A'B'C'D'$ sunt paralele cu diagonalele patrulaterului $ABCD$, ceea ce înseamnă că trebuie să impunem condiția ca diagonalele acestui patrulater să fie perpendiculare. În concluzie, pentru ca $A'B'C'D'$ să fie dreptunghi, este necesar și suficient ca patrulaterul convex $ABCD$ să aibă diagonelele perpendiculare.

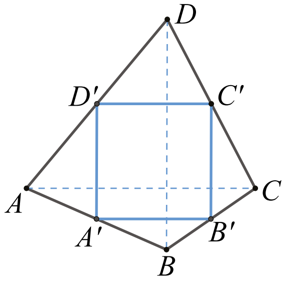


b) Pentru ca $A'B'C'D'$ să fie romb, trebuie să fie paralelogram (este), iar laturile alăturate să fie congruente.

Cum $A'B' = C'D' = \dfrac{AC}{2}$ și $B'C' = A'D' = \dfrac{BD}{2}$, rezultă că, pentru ca $A'B'C'D'$ să fie romb, trebuie ca $AC \equiv BD$, adică diagonalele patrulaterului $ABCD$ să fie congruente.



c) Pentru că pătratul este în același timp dreptunghi și romb, este necesar ca ambele condiții impuse la punctele b) și c) să fie îndeplinite. Așadar, condiția ca $A'B'C'D'$ să fie pătrat este ca $AC \perp BD$ și $AC \equiv BD$, adică diagonalele patrulaterului $ABCD$ să fie congruente și perpendiculare.

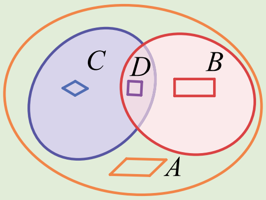


Știați că...?

Un patrulater cu diagonalele perpendiculare se numește *patrulater ortodiagonal*.

Reținem!

1) Orice pătrat este paralelogram.
2) Orice pătrat este dreptunghi.
3) Orice pătrat este romb.



Considerăm mulțimile:
A = mulțimea paralelogramelor din plan;
B = mulțimea dreptunghiurilor din plan;
C = mulțimea romburilor din plan;
D = mulțimea pătratelor din plan.
Atunci:
a) $D \subset C$, $D \subset B$, $D \subset A$;
b) $C \subset A$, $B \subset A$;
c) $B \cap C = D$ și $A \cap B \cap C = D$.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 a) Construiți, folosind rigla gradată și echerul, un pătrat cu latura de 4 cm.
b) Construiți, folosind rigla gradată și compasul, un pătrat cu latura de 0,6 dm.

2 a) Construiți un pătrat cu perimetrul de 48 cm.
b) Construiți un pătrat cu diagonala de 80 mm.

3 Triunghiurile dreptunghice isoscele ABC și DBC au ipotenuza comună BC. Demonstrați că $ABDC$ este pătrat.

4 Demonstrați că mijloacele laturilor unui pătrat sunt vârfurile unui alt pătrat.

5 Diagonalele pătratului $ABCD$ se intersectează în punctul O. Demonstrați că mijloacele segmentelor AO, BO, CO și DO sunt vârfurile unui pătrat.

6 Unghiurile A și C ale rombului $ABCD$ sunt suplementare. Demonstrați că $ABCD$ este pătrat.

7 Pe diagonala AC a dreptunghiului $ABCD$ există un punct P astfel încât $PB = PD$, $P \notin BD$. Demonstrați că $ABCD$ este pătrat.

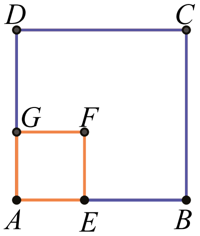
8 Demonstrați că dacă lungimea unei laturi a unui dreptunghi este media aritmetică a lungimilor celorlalte trei laturi, atunci acest dreptunghi este pătrat.

9 Bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BAC$ și $\sphericalangle CAD$ ale pătratului $ABCD$ intersectează laturile BC și CD în punctele E, respectiv F.
a) Calculați măsurile unghiurilor triunghiului AEF.
b) Demonstrați că $EF \parallel BD$.

10 În exteriorul dreptunghiului $ABCD$, se construiesc triunghiurile dreptunghice isoscele ABE și CDF, cu $AE = BE$, $CF = DF$.
Notăm $AE \cap DF = \{M\}$ și $BE \cap CF = \{N\}$.
a) Demonstrați că $MENF$ este pătrat.
b) Demonstrați că dreptele AC, EF și MN sunt concurente.

11 Punctul A este interior segmentului BC, iar de o parte și de alta a dreptei BC, se construiesc pătratele $ABDE$ și $ACFG$.
a) Demonstrați că $BG \equiv CE$;
b) Calculați valoarea raportului $\dfrac{AB}{AC}$, știind că $BG \parallel CE$.

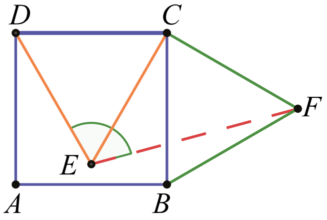
12 În figura alăturată, $ABCD$ și $AEFG$ sunt pătrate.
Demonstrați că:
a) punctele A, F, C sunt coliniare;
b) dreptele GE și BD sunt paralele.



13 Punctul A este interior segmentului BC, iar de aceeași parte a dreptei BC, se construiesc pătratele $ABDE$ și $ACFG$.
a) Demonstrați că $BE \parallel AF$ și $BE \perp CG$.
b) Calculați valoarea raportului $\dfrac{AB}{AC}$, știind că $\sphericalangle CGD = 90°$.

14 Bisectoarele unghiurilor M și N ale paralelogramului $MNPQ$ se intersectează în punctul $A \in PQ$. Bisectoarele unghiurilor P și Q se intersectează în punctul $B \in MN$. Notăm $MA \cap BQ = \{C\}$ și $AN \cap BP = \{D\}$. Știind că $ACBD$ este pătrat, calculați măsura unghiului M și raportul $\dfrac{MN}{NP}$.

15 În interiorul pătratului $ABCD$, se construiește triunghiul echilateral CDE, iar în exteriorul pătratului, se construiește triunghiul echilateral BCF.



a) Realizați pe caiete, folosind instrumentele geometrice, configurația de mai sus.
b) Calculați măsura unghiului DEF.
c) Demonstrați că punctele A, E și F sunt coliniare.
d) Completați configurația, construind triunghiul echilateral ACR, astfel încât punctele F și R să fie de aceeași parte a dreptei AC.
e) Demonstrați că patrulaterul $CERF$ este pătrat.

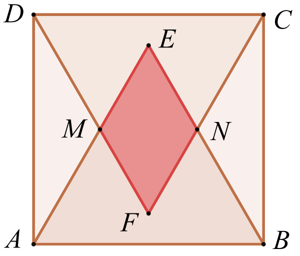
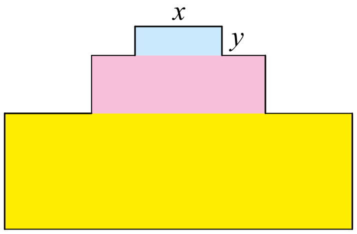
Evaluare sumativă

Se acordă 10 puncte din oficiu.

I. *La cerințele următoare alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.*

5p	**1.** În dreptunghiul $ABCD$, unghiul $\sphericalangle DAC = 2\cdot\sphericalangle ABD$ și $AD = 3$ cm. Lungimea diagonalei BD este: A. 12 cm B. 6 cm C. 3 cm D. 9 cm
5p	**2.** $CDEF$ este un romb, $CE \cap DF = \{O\}$, $\sphericalangle CDE = 120^\circ$ și $DO = 4$ cm. Lungimea laturii rombului este: A. 12 cm B. 4 cm C. 8 cm D. 6 cm
5p	**3.** Un pătrat are perimetrul 64 cm. Distanța de la centrul pătratului la una dintre laturi este: A. 16 cm B. 32 cm C. 12 cm D. 8 cm
5p	**4.** $MNPQ$ este un dreptunghi, $MP \cap NQ = \{O\}$, $\sphericalangle MON = 120^\circ$ și $NQ = 20$ cm. Perimetrul ΔMOQ este: A. 50 cm B. 30 cm C. 45 cm D. 25 cm
5p	**5.** Fie $DEFG$ un romb și DM bisectoarea unghiului $\sphericalangle FDG$, $M \in FG$. Se știe că unghiului $\sphericalangle DMF = 123^\circ$. Măsura unghiului $\sphericalangle DEF$ este: A. 108° B. 104° C. 100° D. 96°
5p	**6.** Punctele M și N sunt situate pe laturile BC și CD ale pătratului $ABCD$, astfel încât triunghiul AMN să fie echilateral. Măsura unghiului $\sphericalangle AMC$ este: A. 105° B. 90° C. 75° D. 135°
5p	**7.** Punctele P și Q sunt mijloacele laturilor AB și CD ale rombului $ABCD$, iar $BPDQ$ este dreptunghi. Măsura unghiului $\sphericalangle BQP$ este: A. 60° B. 90° C. 45° D. 30°
5p	**8.** Pe ipotenuza BC a triunghiului dreptunghic isoscel ABC, $AB = 10$ cm, se consideră punctul P. Fie $PM \perp AB$, $M \in AB$ și $PN \perp AC$, $N \in AC$. Efectuând suma $AM + AN$ se obține: A. 20 cm B. 15 cm C. 10 cm D. 5 cm

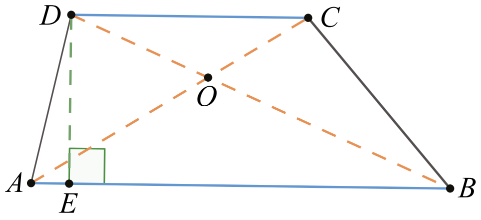
II. *La problemele următoare se cer rezolvări complete.*

   5p **5p** **5p**	**1.** Punctele A, B, E sunt coliniare, în această ordine, și $AB = 2 \cdot BE$. De aceeași parte a dreptei AE, se construiesc pătratele $ABCD$ și $BEFG$, cu $AC \cap BD = \{O\}$, iar M este mijlocul segmentului DF. Demonstrați că: a) $\sphericalangle DBF = 90^\circ$; b) $BD \parallel CF$; c) punctele A, O și M sunt coliniare.
10p	**2.** Covorul reprezentat în schița din figură este în formă de pătrat, triunghiurile ABE și CDF sunt echilaterale, iar $AE \cap DF = \{M\}$, $BE \cap CF = \{N\}$. Arătați că $EMFN$ este romb. 
15p	**3.** Un ansamblu publicitar format din trei panouri dreptunghiulare, ca în figura alăturată, se montează pe peretele unei clădiri. Cel mai mic panou are dimensiunile x metri și y metri, cu $x, y \in \mathbb{N}$, $x > y$. Fiecare dintre celelalte două panouri are dimensiunile de două ori mai mari decât cele ale panoului montat deasupra lui. Conturul ansamblului publicitar are 30 m. Aflați înălțimea minimă a clădirii pe care se montează ansamblul publicitar. 

4.4 Trapezul: clasificare, proprietăți. Linia mijlocie în trapez

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

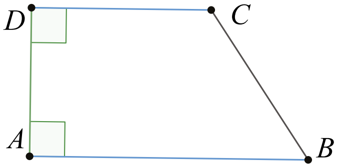
Definiția 1. Patrulaterul convex cu două laturi opuse paralele și două laturi neparalele se numește **trapez**.



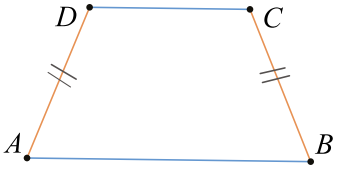
Fie $ABCD$ trapez. Identificăm elementele:
Laturile paralele AB și CD se numesc *baze*. Dacă $AB > CD$, atunci AB este *baza mare*, iar CD este *baza mică*.
Laturile AD și BC se numesc *laturile neparalele* ale trapezului.
Segmentele AC și BD sunt *diagonalele* trapezului.
Distanța dintre bazele trapezului se numește *înălțime* a acestuia.
Dacă $DE \perp AB$, $E \in AB$, atunci DE este înălțime a trapezului.

Observație: Vom folosi termenul „înălțime” și pentru segmentul determinat de un punct al unei baze (de regulă, vârf al trapezului) și piciorul perpendicularei din acel punct pe cealaltă bază.
Pentru laturile neparalele ale unui trapez, se disting două cazuri particulare care ne oferă un criteriu de *clasificare* a trapezelor.

1) Dacă una dintre laturile neparalele ale trapezului este perpendiculară pe baze, atunci acesta se numește *trapez dreptunghic*.



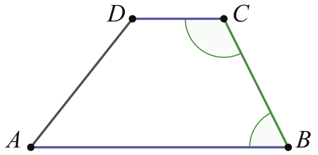
2) Dacă laturile neparalele ale unui trapez sunt congruente, atunci acesta se numește *trapez isoscel*.



Observație: Folosind definiția, rezultă că pentru a arăta că un patrulater convex este trapez, trebuie să demonstrăm: 1) *două laturi opuse ale sale sunt paralele* și 2) celelalte *două laturi nu sunt paralele*.
Laturile neparalele ale trapezului și diagonalele acestuia sunt secante ale bazelor. Cum bazele sunt paralele, deducem următoarele proprietăți:

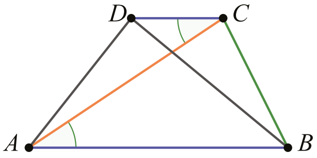
P_1: Unghiurile alăturate uneia dintre laturile neparalele ale unui trapez sunt suplementare.

Demonstrație: Considerăm latura BC, secantă a dreptelor paralele AB și CD. Cum $AB \parallel CD$, iar $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle DCB$ sunt unghiuri interne de aceeași parte a secantei, rezultă că sunt suplementare, deci $\sphericalangle ABC + \sphericalangle DCB = 180°$.
În mod similar, se demonstrează că $\sphericalangle BAC + \sphericalangle CDA = 180°$.



P_2: Fiecare diagonală a unui trapez formează cu bazele trapezului perechi de unghiuri congruente.

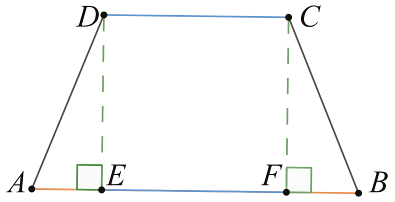
Demonstrație: AC este secantă pentru bazele trapezului.
$AB \parallel CD$, iar $\sphericalangle DCA$ și $\sphericalangle BAC$ sunt alterne interne, deci $\sphericalangle DCA \equiv \sphericalangle BAC$. Analog, se demonstrează $\sphericalangle CDB \equiv \sphericalangle ABD$.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

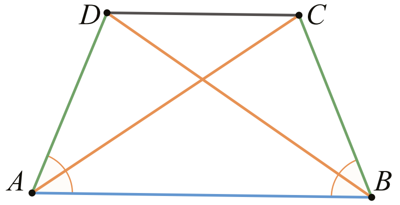
Trapezul isoscel, având laturile neparalele congruente, se bucură de proprietăți specifice.

Teorema 1. Fiecare bază a unui trapez isoscel formează, cu laturile neparalele, unghiuri congruente.



Demonstrație: Vom arăta că unghiurile $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle B$ ale trapezului isoscel $ABCD$ sunt congruente. Fie $DE \perp AB$ și $CF \perp AB$ cu $E, F \in AB$. Patrulaterul $DCFE$ are toate unghiurile drepte, deci este un dreptunghi. Laturile opuse sunt congruente, în particular $DE \equiv CF$.
Vom considera ΔADE și ΔBCF dreptunghice, cu ipotenuzele $AD \equiv BC$ (laturile neparalele ale trapezului isoscel) și catetele $DE \equiv CF$ (am demonstrat mai sus).
Aplicând cazul de congruență I.C., rezultă congruența lor, apoi $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle CBA$. Cum $\sphericalangle ADC$ este suplementar cu $\sphericalangle DAB$ și $\sphericalangle BCD$ este suplementar cu $\sphericalangle CBA$ (sunt alăturate laturii neparalele în trapez), rezultă $\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle DCB$.
Observație: Raționamentul prin care am demonstrat Teorema 1 ne furnizează și următoarele informații: $AE \equiv BF$ și $DC \equiv EF$. Prin urmare, într-un trapez isoscel, picioarele înălțimilor duse din capetele bazei mici determină, pe baza mare, segmentele AE, EF, FB, astfel încât $AE \equiv BF$ și $DC \equiv EF$.

Teorema 2. Diagonalele unui trapez isoscel sunt congruente.

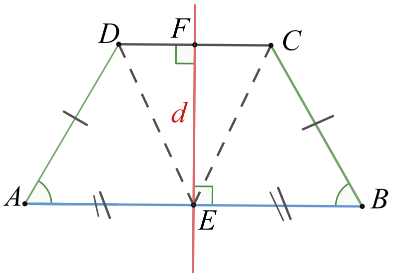


Demonstrație: Construim diagonalele AC și BD ale trapezului, apoi considerăm ΔDAB și ΔCBA, care au: $AD \equiv CB$, AB latură comună, iar din Teorema 1, $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle CBA$. Folosind cazul de congruență L.U.L., rezultă congruența triunghiurilor, apoi $AC \equiv BD$.
Reciprocele teoremelor 1 și 2 sunt adevărate și ne oferă condiții suficiente ca un trapez să fie isoscel.
C_1: Dacă într-un trapez unghiurile alăturate unei baze sunt congruente, atunci acesta este un trapez isoscel.
C_2: Dacă într-un trapez diagonalele sunt congruente, atunci acesta este un trapez isoscel.

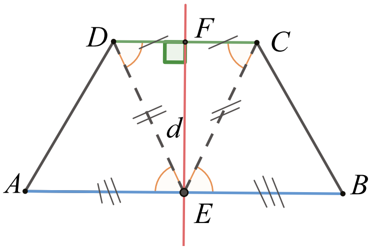
Temă de portofoliu

Folosind notațiile de la Teorema 1 și Teorema 2, demonstrați împreună cu un coleg/o colegă condițiile suficiente C_1 și C_2.

Aplicația 1: Un trapez este isoscel dacă și numai dacă mediatoarele bazelor sale coincid.
Soluție: Considerăm trapezul $ABCD$, cu bazele AB și CD. Remarcăm, înainte de toate, că avem de demonstrat două implicații:
1) dacă trapezul $ABCD$ este isoscel, atunci mediatoarele bazelor coincid;
2) dacă în trapezul $ABCD$ mediatoarele bazelor coincid, atunci trapezul este isoscel.



1) Fie $ABCD$ trapez isoscel. Fie E mijlocul segmentului AB și d mediatoarea bazei AB. Deoarece $AB \parallel CD$, rezultă că $d \perp CD$. Urmărim să demonstrăm că d este și mediatoarea bazei CD. Este suficient să găsim, pe dreapta d, un punct egal depărtat de C și D (capetele bazei mici). Triunghiurile ΔAED și ΔBEC au: $AE \equiv EB$ (E mijloc din construcție); $AD \equiv BC$ (trapez isoscel); $\sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle CBE$ (unghiurile de la baza trapezului isoscel). Folosind cazul de congruență L.U.L., rezultă $\Delta AED \equiv \Delta BEC$, deci $ED \equiv EC$. Prin urmare, EF (unde $\{F\} = d \cap CD$) este înălțimea corespunzătoare bazei în triunghiul isoscel CED isoscel, deci d este și mediatoarea segmentului DC.



2) Știm că $ABCD$ este trapez și că mediatoarele bazelor AB și CD coincid. Vom demonstra că trapezul este isoscel, deci că laturile neparalele sunt congruente. Notăm cu E și F mijloacele bazelor AB, respectiv DC. Considerăm ΔAED și ΔBEC, care au: $AE \equiv BE$ (EF mediatoare pentru AB); $DE \equiv CE$ (EF mediatoarea lui CD); $\sphericalangle AED \equiv \sphericalangle BEC$ ($\sphericalangle AED \equiv \sphericalangle EDC$, deoarece sunt unghiuri alterne interne pentru $AB \parallel CD$ și secanta DE; $\sphericalangle EDC \equiv \sphericalangle ECD$ pentru că sunt unghiurile de la baza triunghiului isoscel ECD; $\sphericalangle ECD \equiv \sphericalangle BEC$, deoarece sunt unghiuri alterne interne pentru $AB \parallel CD$ și secanta CE).

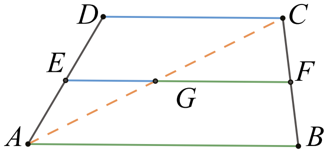
Aplicând cazul de congruență L.U.L., rezultă congruența triunghiurilor și a elementelor corespondente. În particular, $AD \equiv BC$, adică trapezul este isoscel.

Observație: Am arătat, în rezolvarea de mai sus, și următorul rezultat: *un trapez este isoscel dacă și numai dacă dreapta ce unește mijloacele bazelor este chiar mediatoarea lor*.

Definiția 2. Segmentul determinat de mijloacele laturilor neparalele ale unui trapez se numește *linie mijlocie a trapezului*.

Următoarea teoremă demonstrează două proprietăți importante ale liniei mijlocii.

Teorema 3. Linia mijlocie a unui trapez este paralelă cu bazele și are lungimea egală cu semisuma lungimilor acestora.



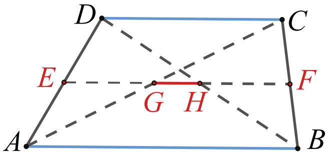
Demonstrație: La triunghi, linia mijlocie, determinată de mijloacele a două laturi, este paralelă cu a treia latură, iar lungimea ei este egală cu jumătate din lungimea acesteia.

În trapezul $ABCD$ notăm cu E și F mijloacele laturilor neparalele AD, respectiv BC. Notăm cu G mijlocul diagonalei AC. Atunci, EG este linie mijlocie în ΔADC, iar GF este linie mijlocie în ΔABC.

Avem $EG \parallel DC$ și $GF \parallel AB$, dar $AB \parallel CD$ (sunt baze ale trapezului), deci $GE \parallel AB \parallel GF$. Cum prin punctul G, exterior dreptei AB, putem duce o singură paralelă la AB (axioma paralelelor), rezultă că punctele E, G, F sunt coliniare, iar $EF \parallel AB \parallel DC$.

Din rezultatul referitor la lungimea liniei mijlocii în triunghi, avem: $EG = \dfrac{CD}{2}$ și $GF = \dfrac{AB}{2}$, iar prin adunare, $EF = EG + GF = \dfrac{AB + CD}{2}$.

Observație: Lungimea liniei mijlocii a unui trapez este egală cu media aritmetică a lungimilor bazelor sale.



Aplicația 2:

1) Mijloacele diagonalelor unui trapez sunt situate pe linia mijlocie a trapezului și determină un segment cu lungimea egală cu jumătate din modulul diferenței bazelor.
2) Dacă mijlocul unei diagonale se găsește pe segmentul care unește mijloacele a două laturi opuse ale unui patrulater convex, atunci acest patrulaterul este trapez.

Soluție:

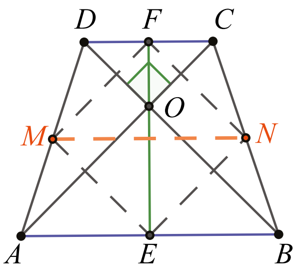
1) Considerăm trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$ și $AB > CD$), unde am notat cu E și F mijloacele laturilor AD, respectiv BC, iar cu G și H mijloacele diagonalelor AC, respectiv BD. Aplicând paralelismul liniilor mijlocii în ΔADC și în ΔABC, rezultă $GE \parallel CD \parallel AB \parallel GF$. Axioma paralelelor ne spune că prin G trece o singură paralelă la AB, deci dreptele GE și GF coincid sau $G \in EF$.

Analog, arătăm că mijlocul lui BD, adică H, aparține lui EF. Deoarece EF este linie mijlocie în trapez, ea este paralelă cu bazele, deci și $GH \parallel AB \parallel DC$. Pentru liniile mijlocii ale ΔADC și ΔBDC, avem: $EG = \dfrac{DC}{2} = HF$.

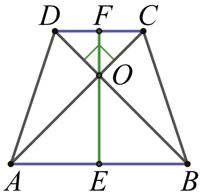
Calculăm lungimea segmentului GH astfel: $GH = EF - EG - HF = \dfrac{AB + CD}{2} - \dfrac{CD}{2} - \dfrac{CD}{2} = \dfrac{AB - CD}{2}$.

2) Considerăm patrulaterul convex $ABCD$ și notăm cu E și F mijloacele laturilor AD, respectiv BC, iar cu G mijlocul diagonalei AC. Știm că punctul G aparține segmentului EF. Atunci, EG este linie mijlocie în ΔADC, iar GF este linie mijlocie în triunghiul ΔABC. Rezultă $GE \parallel CD$ și $GF \parallel AB$, dar G, E, F sunt coliniare, deci $AB \parallel CD$ (două drepte distincte, paralele cu o a treia dreaptă, sunt paralele între ele).

Aplicația 3: Dacă un trapez isoscel are diagonalele perpendiculare, atunci înălțimea sa este egală cu lungimea liniei mijlocii a trapezului.



Soluția I: Fie $ABCD$ patrulater convex și M, E, N, F mijloacele laturilor sale, ca în figura alăturată. Știm că mijloacele laturilor unui patrulater convex determină un paralelogram. În cazul de față, $MENF$ este paralelogram și $ME = \dfrac{BD}{2}$, $EN = \dfrac{AC}{2}$, $BD = AC$, deci $MENF$ este romb. $ME \parallel BD$, $EN \parallel AC$ și $BD \perp AC$, deci $ME \perp EN$ și $MENF$ este pătrat, iar diagonalele sale sunt congruente, $EF = MN$.
Cum trapezul este isoscel, rezultă că EF este înălțime (triunghiurile OAB, OCD sunt isoscele, iar medianele OE și OF sunt și înălțimi și au aceeași dreaptă suport). În concluzie, EF este înălțimea trapezului, MN este linia sa mijlocie și $EF = MN$.

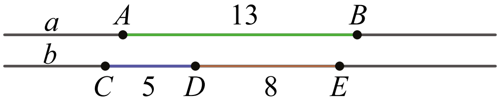


Soluția a II-a: Fie $ABCD$ trapez isoscel, cu $AB \parallel CD$ și $AD \equiv BC$ și fie O punctul de intersecție a diagonalelor. Conform cazului L.L.L., triunghiurile ABD și BAC sunt congruente ($AB \equiv BA$, $BD \equiv AC$, $AD \equiv BC$), deci $\sphericalangle OBA \equiv \sphericalangle OAB$. Din $AC \perp BD$, rezultă $AO \perp BO$ și triunghiul AOB este dreptunghic isoscel. Construim $OE \perp AB$, $E \in AB$ și $OE \cap CD = \{F\}$. Segmentul OE este mediana corespunzătoare ipotenuzei în triunghiul AOB, deci $OE = \dfrac{AB}{2}$. Analog, triunghiul COD este dreptunghic isoscel și $OF = \dfrac{CD}{2}$. Cum EF este înălțimea trapezului, obținem $EF = OE + OF = \dfrac{AB + CD}{2}$, care reprezintă lungimea liniei mijlocii a trapezului.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Desenați, folosind instrumentele geometrice, patrulaterul convex $MNPQ$ în care:
$\sphericalangle MNP = 105°$, $\sphericalangle NPQ = 75°$ și $\sphericalangle PQM = 135°$.
Completați spațiile libere, astfel încât să obțineți propoziții adevărate:
p_1: Patrulaterul convex $MNPQ$ este … .
p_2: Segmentele MN și PQ se numesc … .
p_3: Segmentele NP și MQ se numesc … .
p_4: Segmentele MP și NQ se numesc … .

2 În figura de mai jos, dreptele a și b sunt paralele. Scrieți pe caiete enunțurile, apoi completați spațiile libere, astfel încât să obțineți propoziții adevărate.



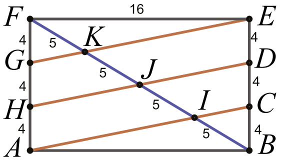
p_1: Patrulaterul convex $ABEC$ este … .
p_2: Patrulaterul convex $ACDB$ este … .

3 a) Construiți, folosind instrumentele geometrice, trapezul $EFGH$, cu $EF \parallel GH$, $\sphericalangle E = 70°$, $\sphericalangle F = 50°$.
b) Scrieți pe caiete enunțurile de mai jos, apoi completați spațiile libere, astfel încât să obțineți propoziții adevărate:
p_1: Baza mare a trapezului este … .
p_2: Baza mică a trapezului este … .
p_3: Măsura unghiului G este … .
p_4: Măsura unghiului H este … .

4 Construiți trapezul dreptunghic $IJKL$ cu $\sphericalangle I = \sphericalangle L = 90°$, $IJ = 8$ cm, $\sphericalangle J = 60°$, $JK = 5$ cm.
a) Descrieți fiecare etapă a costrucției.
b) Numiți bazele trapezului, apoi numiți laturile neparalele ale trapezului.

5 Construiți trapezul isoscel $ABCD$, cu $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 60°$, $AB = 10$ cm, $BC = 5$ cm.
a) Descrieți fiecare etapă a costrucției.
b) Numiți bazele trapezului, apoi numiți laturile neparalele ale trapezului.

6 În figura de mai jos, $ABEF$ este dreptunghi. Numiți două trapeze și liniile mijlocii ale acestora.



7 a) Calculați măsurile unghiurilor trapezului $MNPQ$, știind că sunt îndeplinite simultan condițiile: $\sphericalangle M + \sphericalangle N + \sphericalangle P = 320°$,
$\sphericalangle Q + \sphericalangle P = 180°$, $\sphericalangle P = 2 \cdot \sphericalangle M$.
b) Realizați, folosind instrumentele geometrice, un desen care să corespundă datelor problemei.

8 Calculați măsurile unghiurilor trapezului isoscel $ABCD$, în următoarele situații:
a) $\sphericalangle A = 55°$ și $AB \parallel CD$;
b) $\sphericalangle A = \sphericalangle B$ și $\sphericalangle C + \sphericalangle D = 260°$.

9 Se consideră trapezul isoscel $ABCD$, în care $\sphericalangle A = 3 \cdot \sphericalangle C$ și $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle D$.
a) Stabiliți care sunt bazele trapezului.
b) Calculați măsurile unghiurilor trapezului.
c) Demonstrați că AD și BC sunt perpendiculare.

10 În patrulaterul $MNPQ$, $MN \parallel PQ$, $MQ \nparallel NP$, $MQ \equiv NP$ și $MP \cap NQ = \{O\}$.
Stabiliți valoarea de adevăr a fiecărei propoziții, justificând răspunsul dat:
a) $MN \equiv PQ$;
b) $MP \equiv NQ$;
c) $\sphericalangle NMQ \equiv \sphericalangle MNP$;
d) $\sphericalangle NMQ \equiv \sphericalangle NPQ$;
e) $\sphericalangle MNP + \sphericalangle MQP = 180°$;
f) $MO \equiv OP$;
g) $OP \equiv OQ$;
h) ΔMON este isoscel.

11 Se consideră trapezul $CDEF$ cu $CD \parallel EF$, punctul M, mijlocul laturii CD și $ME = MF$.
Arătați că trapezul este isoscel.

12 În trapezul $ABCD$ cu bazele AB și CD, AC este bisectoarea unghiului BAD, iar BD este bisectoarea unghiului ABC. Demonstrați că $AC \equiv BD$.

13 În patrulaterul convex $MNPQ$, măsura unghiului M este 68° și măsura unghiului N este 112°. Demonstrați că $MNPQ$ este trapez sau paralelogram.

14 Trapezul $ABCD$ este isoscel, $AB \parallel CD$ și $AC \cap BD = \{O\}$. Demonstrați că:
a) Triunghiurile AOB și COD sunt isoscele.
b) Triunghiurile AOD și BOC sunt congruente.

15 Unul dintre unghiurile unui trapez dreptunghic are măsura de 72°. Determinați măsurile celorlalte unghiuri ale trapezului.

16 Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic în care $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$, $AB < CD$, iar triunghiul BCD este dreptunghic isoscel. Calculați măsurile unghiurilor ABC, BCD, CDB.

17 $MNPQ$ este un trapez dreptunghic, $MN \parallel PQ$, $\sphericalangle M = 90°$, $MN = 14$ cm, $MQ = QP = 6$ cm. Calculați lungimea laturii PN.

18 În trapezul $TRAP$, $TR \parallel AP$, $TR > AP$, $\sphericalangle PTR = 90°$, iar triunghiurile TPA și TAR sunt isoscele. Calculați măsurile unghiurilor trapezului, analizând toate cazurile posibile.

19 Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ cu $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$, $AB > CD$. Punctul P se află pe latura BC, astfel încât $BP = AB$ și $CP = CD$. Calculați măsura unghiului $\sphericalangle APD$.

20 Trapezul dreptunghic $MNPQ$ are bazele MN și PQ, cu $MN = 2 \cdot PQ$ și $\sphericalangle M = 90°$. Se consideră $PE \perp MN$, $E \in MN$ și $PE \cap NQ = \{R\}$.
Demonstrați că:
a) $PR \equiv RE$;
b) Dacă $MR \cap QE = \{G\}$, atunci G este centrul de greutate al triunghiului MNQ.

21 Se consideră trapezul $ABCD$ cu baza mare AB. Notăm cu M mijlocul laturii AD și cu N mijlocul laturii BC.
a) Calculați lungimea segmentului MN, știind că $AB = 13$ cm, $CD = 9$ cm.
b) Calculați lungimea segmentului CD, știind că $AB = 16$ cm, $MN = 10$ cm.

22 În trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, punctele E și F sunt mijloacele laturilor AD, respectiv BC. Știind că $\sphericalangle AEF = 127°$ și $\sphericalangle CFE = 54°$, calculați măsurile unghiurilor trapezului.

23 În trapezul $MNPQ$ cu $MN \parallel PQ$, punctul A este mijlocul laturii MQ, punctul B este mijlocul segmentului AM, iar $C \in PN$, astfel încât $CP = CN$ și $D \in CN$, astfel încât $CD = ND$.
a) Realizați un desen care să corespundă datelor problemei.
b) Dacă $MN = 8$ cm și $PQ = 2$ cm, calculați lungimea segmentului BD.

24 Segmentul EF este linia mijlocie a trapezului $ABCD$, $E \in AD$ și $F \in BC$. Punctul P este simetricul punctului E față de F. Demonstrați că:
a) $CP \equiv BE$ și $CE \parallel BP$;
b) $EP = AB + CD$.

Evaluare sumativă

Se acordă 10 puncte din oficiu.

I. *La cerințele următoare alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.*

5p	**1.** Un trapez dreptunghic are un unghi cu măsura de 45° și bazele de lungimi 28 cm și 20 cm. Înălțimea trapezului este: A. 8 cm B. 10 cm C. 12 cm D. 16 cm
5p	**2.** În trapezul isoscel *ABCD*, $AB \parallel CD$, $AB < CD$, $AB = 4$ cm și $\sphericalangle ABC = 135^\circ$. Dacă $BE \perp CD$ și $BE = 6$ cm, atunci lungimea laturii *CD* este egală cu: A. 20 cm B. 14 cm C. 16 cm D. 15 cm
5p	**3.** Un trapez isoscel are unghiurile opuse: A. complementare B. suplementare C. congruente D. cu măsura de 60°
5p	**4.** Fie *ADEJ* un dreptunghi. Latura *AD* se împarte în trei segmente congruente, $AB \equiv BC \equiv CD$, iar latura *EJ* se împarte în cinci segmente congruente, $EF \equiv FG \equiv GH \equiv HI \equiv IJ$. Numărul trapezelor isoscele care au vârfuri oricare patru dintre punctele *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, *J* este: A. 3 B. 4 C. 5 D. 2

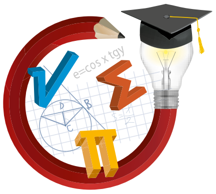
II. *Asociați fiecărei cifre corespunzătoare enunțurilor din coloana A, litera care indică răspunsul corect, aflat în coloana B.*

În trapezul isoscel *ABCD*, $AB \parallel CD$, $AD = DC = CB = \dfrac{AB}{2}$ și *E* este mijlocul bazei *AB*.

	A	B
5p	**1.** $\sphericalangle A =$	a. 30° b. 60° c. 120° d. 90° e. 45°
5p	**2.** $\sphericalangle ADC =$	
5p	**3.** $\sphericalangle ABD =$	
5p	**4.** $\sphericalangle (BD, CE) =$	

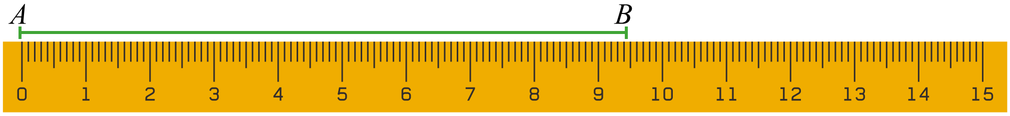
III. *La problemele următoare se cer rezolvări complete.*

	1. Se consideră trapezul *ABCD* cu $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 90^\circ$, $AD < BC$. Punctul *E* este situat pe latura *AB*, astfel încât $\sphericalangle AED \equiv \sphericalangle BEC$. Paralela prin *B* la *DE* intersectează *EC* în punctul *F*, iar $\sphericalangle BCE = 30^\circ$. Arătați că:
10p	a) triunghiul *BEF* este echilateral;
10p	b) punctul *F* este mijlocul segmentului *CE*.
	2. Triunghiul *ABC* este dreptunghic în *A*, *M* este mijlocul laturii *AC*, *N* este mijlocul laturii *BC*, iar *P* este simetricul punctului *M* față de *N*. Fie $AP \cap BM = \{D\}$. Demonstrați că:
10p	a) *ABPM* este dreptunghi;
10p	b) *AMND* este trapez dreptunghic;
10p	c) $MB \parallel CP$.



4.5 Perimetre și arii

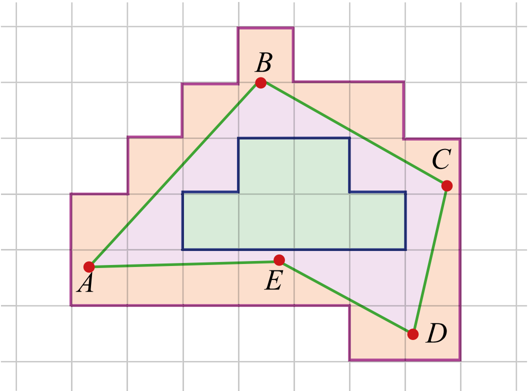
Din cele mai vechi timpuri, omenii și-au pus problema caracterizării obiectelor comparându-le. Dimensiunile lor au fost comparate cu dimensiuni standard, nevoia de precizie determinând utilizarea subdimensiunilor.
De exemplu, pentru lungimi, unitatea de măsură în sistemul internațional este metrul, cu multiplii și submultiplii acestuia. În unele țări sau în unele domenii, se folosește o unitate de măsură secundară, numită *țol* sau *inch* (se citește inci). 1 inch = 2,54 cm.



Pentru arii, unitatea standard este metrul pătrat (suprafața unui pătrat cu latura de 1 metru), cu multiplii și submultiplii săi.

Se poate estima aria unei figuri geometrice încadrând suprafața acesteia între o suprafață formată din rețeaua unităților folosite care o acoperă și o suprafață care este acoperită de ea.

Exemplu: Aria figurii plane *ABCDE*, din imaginea alăturată, este mai mare decât 6 unități de arie și mai mică decât 27 de unități de arie. Evident, dacă trasăm rețeaua unităților de arie cu latura din ce în ce mai mică, vom aproxima din ce în ce mai exact aria dorită.



Ne amintim

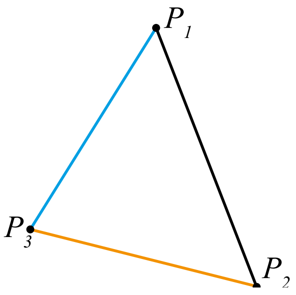
1) a. Perimetrul triunghiului *ABC* este numărul $\mathcal{P} = AB + BC + AC$.
   b. Perimetrul dreptunghiului *ABCD* este numărul $\mathcal{P} = AB + BC + CD + DA = 2 \cdot (AB + BC)$.
   c. Perimetrul pătratului *ABCD* este numărul $\mathcal{P} = AB + BC + CD + DA = 4 \cdot AB$.
2) Interiorul unui triunghi este intersecția interioarelor unghiurilor sale.
3) Se numește *suprafață triunghiulară* mulțimea tuturor punctelor situate în interiorul unui triunghi sau pe laturile acestuia. În mod analog s-au definit: *suprafața pătratică*, *suprafața dreptunghiulară*.
4) a. Aria triunghiului este egală cu semiprodusul dintre lungimea unei laturi și înălțimea corespunzătoare acesteia.
   b. Aria dreptunghiului este egală cu produsul lungimilor a două laturi alăturate.
   c. Aria pătratului este egală cu pătratul lungimii laturii sale.

Noțiunile de **perimetru** și de **arie a unei suprafețe** pot fi extinse ușor la figuri geometrice mai generale.

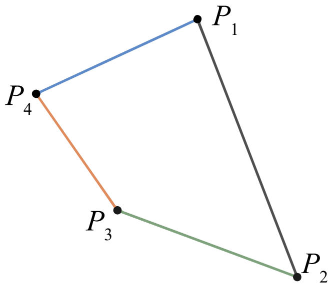
Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Dorim să analizăm noile figuri studiate.
Pentru aceasta, să ne familiarizăm cu noțiunea de *poligon*. Triunghiul, patrulaterul, hexagonul sunt poligoane cu 3, 4, respectiv 6 laturi.
Vom numi *poligon cu n laturi* o figură geometrică plană, închisă, formată cu punctele $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, numite *vârfuri*, care determină segmentele P_1P_2, P_2P_3, ..., P_nP_1, numite *laturi*, cu proprietatea că oricare două dintre ele pot avea în comun cel mult un vârf.

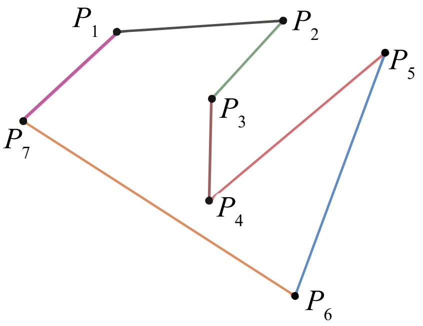
Definiția 1: Perimetrul unui poligon este suma lungimilor laturilor sale.



$\mathcal{P} = P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_1$



$\mathcal{P} = P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_4 + P_4P_1$



$\mathcal{P} = P_1P_2 + P_2P_3 + \ldots + P_6P_7 + P_7P_1$

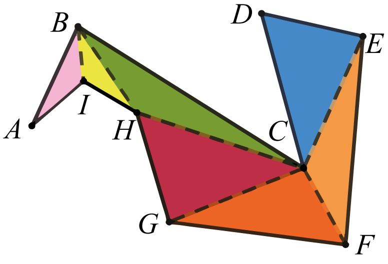
Prin urmare, perimetrul patrulaterului convex $ABCD$ (paralelogram, dreptunghi, pătrat, trapez, ...) este:

$$\mathcal{P} = AB + BC + CD + DA.$$

Prin observare directă, intuim că:

1) Orice suprafață poligonală se poate descompune într-o reuniune de suprafețe triunghiulare.

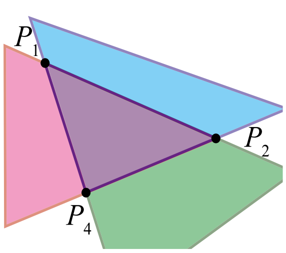
Exemplu: Suprafața mărginită de poligonul *ABCDEFGHI* din imaginea alăturată este reuniunea suprafețelor triunghiulare: *ABI*, *BIH*, *BHC*, *CDE*, *ECF*, *FCG* și *GHC*.

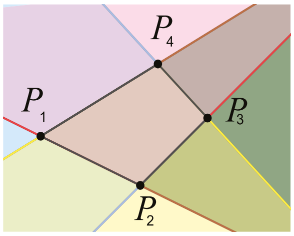


2) Interiorul unei suprafețe poligonale este intersecția interioarelor unghiurilor sale.

Exemple: La fel ca la triunghi, pentru patrulaterul convex putem defini interiorul său ca fiind intersecția interioarelor unghiurilor sale.

Observație: Interiorul patrulaterului convex poate fi obținut mai simplu, prin intersecția interioarelor a două unghiuri opuse.





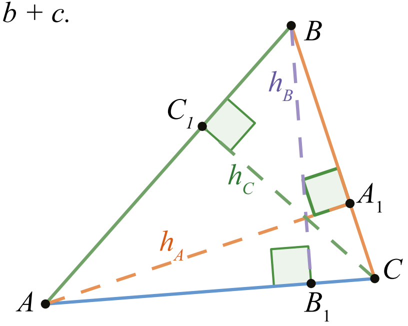
Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

A. Perimetrul și aria triunghiului

Dacă notăm $BC = a$, $AC = b$ și $AB = c$, lungimile laturilor triunghiului ABC, și cu $\mathcal{P}$ perimetrul său, atunci:

$$\mathcal{P} = a + b + c.$$

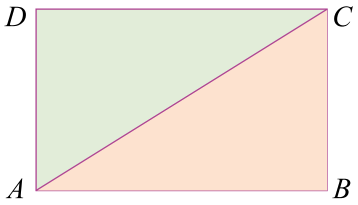
Revenim la aria triunghiului. Acceptăm următorul rezultat: produsul dintre lungimea unei laturi a unui triunghi și înălțimea corespunzătoare este constant. Cu notațiile din figură, $h_A = AA_1$, $h_B = BB_1$, $h_C = CC_1$, afirmația de mai sus se scrie: $a \cdot h_A = b \cdot h_B = c \cdot h_C$. Valoarea comună a produsului este dublul ariei triunghiului. Notând cu $\mathcal{A}_{ABC}$ aria triunghiului ABC, avem: $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{a \cdot h_A}{2} = \dfrac{b \cdot h_B}{2} = \dfrac{c \cdot h_C}{2}$.



Să remarcăm faptul că putem alege latura și înălțimea corespunzătoare, în mod avantajos (pe cele pe care le cunoaștem sau pe care le putem calcula ușor). În particular, în triunghiul dreptunghic, aria va fi egală cu *semiprodusul lungimilor catetelor*.

Aplicația 1: Să regăsim aria dreptunghiului și aria pătratului folosind descompunerea în triunghiuri a acestor figuri și aria triunghiului dreptunghic.

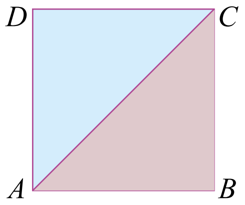
ABCD este dreptunghi, deci *AB* = *CD* și *AD* = *BC*, iar triunghiurile *ABC* și *ADC* sunt dreptunghice.



$$\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{ACD} = \frac{AB \cdot BC}{2} + \frac{DC \cdot AD}{2} = AB \cdot BC$$

Aria dreptunghiului este egală cu produsul lungimilor a două laturi alăturate.

ABCD este pătrat, deci *AB* = *CD* = *AD* = *BC*, iar triunghiurile *ABC* și *ADC* sunt dreptunghice.

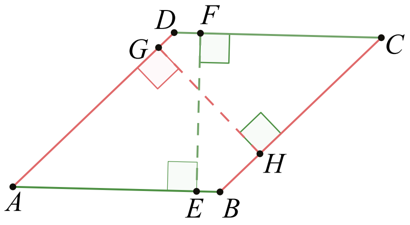


$$\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{ACD} = AB \cdot BC = AB^2$$

Aria pătratului este egală cu pătratul lungimii laturii sale.

B. Perimetrul și aria paralelogramului

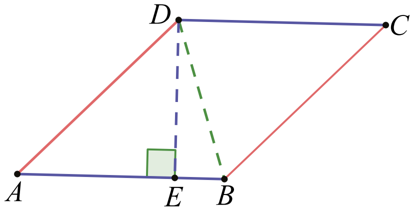
Pentru paralelogramul *ABCD*, vom numi *înălțime corespunzătoare laturii AB* (sau *CD*) distanța dintre dreptele paralele *AB* și *CD*, adică lungimea segmentului *EF*, unde $E \in AB$, $F \in CD$, $AB \perp EF$ și $EF \perp CD$. Analog, distanța dintre dreptele paralele *AD* și *BC*, adică lungimea segmentului *GH*, unde $G \in AD$, $H \in BC$, $AD \perp GH$ și $GH \perp BC$ se numește *înălțimea paralelogramului*, *corespunzătoare laturii AD* (sau *BC*).



Perimetrul paralelogramului este suma lungimilor laturilor sale. Cum laturile opuse sunt congruente, obținem:

$$\mathcal{P} = AB + BC + CD + DA = 2(AB + BC).$$

Pentru a afla aria paralelogramului *ABCD*, descompunem suprafața paralelogramului în două suprafețe triunghiulare, despre care arătăm că sunt congruente.
Triunghiurile *ABD* și *BDC* au toate laturile respectiv congruente; deci, aplicând cazul L.L.L., obținem congruența lor.
Două figuri geometrice congruente au perimetre și arii egale.
Obținem:



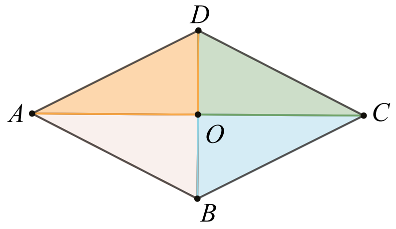
$$\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{ABD} + \mathcal{A}_{BCD} = 2 \cdot A_{ABD} = 2 \cdot \frac{DE \cdot AB}{2} = DE \cdot AB.$$

Aria unui paralelogram este egală cu produsul dintre lungimea unei laturi și înălțimea corespunzătoare.

C. Perimetrul și aria rombului

Toate laturile rombului sunt congruente, deci perimetrul este: $\mathcal{P} = AB + BC + CD + DA = 4 \cdot AB$.

Vom descompune suprafața rombului în patru triunghiuri determinate de laturi și diagonale. Se poate arăta ușor, pe baza proprietăților rombului (diagonalele se înjumătățesc și sunt perpendiculare) că cele patru triunghiuri dreptunghice sunt congruente (aplicăm cazul C.C.), deci ariile lor sunt egale.



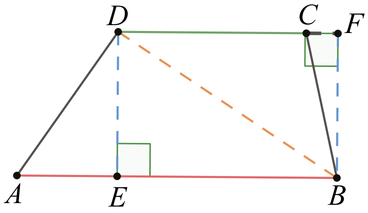
$$\mathcal{A}_{ABCD} = 4 \cdot \mathcal{A}_{AOB} = 4 \cdot \frac{AO \cdot OB}{2} = \frac{AC \cdot BD}{2}.$$

Dacă notăm cu d_1 și d_2 lungimile diagonalelor *AC*, respectiv *BD*, obținem: $\mathcal{A}_{ABCD} = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2}$.

Aria rombului este egală cu semiprodusul lungimilor diagonalelor sale.

Perimetrul și aria trapezului

Trapezul este un patrulater. Prin urmare, perimetrul său este: $\mathcal{P} = AB + BC + CD + DA$.



Pentru a afla aria trapezului, vom face aceeași împărțire a suprafeței sale în două suprafețe triunghiulare: $\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{ABD} + \mathcal{A}_{BDC}$.
Notăm cu E și F picioarele perpendicularelor duse din D pe AB, respectiv din B pe DC. Cum $AB \parallel DC$, rezultă $DE = BF$. Aplicând formula ariei în cele două triunghiuri, avem: $\mathcal{A}_{ABCD} = \dfrac{AB \cdot DE}{2} + \dfrac{DC \cdot BF}{2} = \dfrac{(AB + DC) \cdot DE}{2}$.

Dacă într-un trapez, notăm baza mare cu B, baza mică cu b și distanța dintre baze, numită înălțimea trapezului, cu h, atunci: $\mathcal{A}_{ABCD} = \dfrac{(B + b) \cdot h}{2}$.

Aria trapezului este egală cu semiprodusul dintre suma lungimii bazelor și distanța dintre baze.

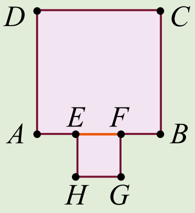
Aplicația 2:

a) Pe latura AB, de lungime L, a pătratului $ABCD$, se consideră punctele E și F care o împart în trei părți egale.
În exteriorul pătratului $ABCD$ se construiește pătratul $EHGF$.
Calculați perimetrul și aria poligonului $AEHGFBCD$.

b) Aflați perimetrul și aria poligonului obținut dacă facem aceeași construcție pe fiecare dintre laturile pătratului $ABCD$.

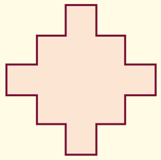
c) Aflați perimetrul și aria poligonului obținut dacă pe fiecare segment din figura de la b) construim, pe treimea din mijloc, pătratul în exterior.

a)



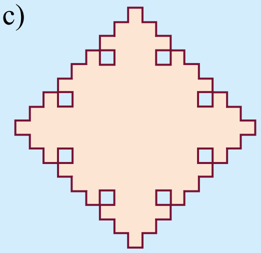
$$\mathcal{P} = \frac{14 \cdot L}{3}$$
$$\mathcal{A} = \frac{10 \cdot L^2}{9}$$

b)



$$\mathcal{P} = \frac{20 \cdot L}{3}$$
$$\mathcal{A} = \frac{13 \cdot L^2}{9}$$

c)



$$\mathcal{P} = \frac{100 \cdot L}{9}$$
$$\mathcal{A} = L^2 + 4\frac{L^2}{9} + 20\frac{L^2}{81}$$

Indicație: Observând figurile, în fiecare dintre cele trei cazuri, argumentați rezultatele scrise mai sus.

Reținem!

- **Perimetrul** unui poligon este suma lungimilor laturilor sale.
- **Aria triunghiului** este egală cu semiprodusul dintre lungimea unei laturi și înălțimea corespunzătoare acesteia.
- **Aria dreptunghiului** este egală cu produsul lungimilor a două laturi alăturate.
- **Aria pătratului** este egală cu pătratul lungimii laturii sale.
- **Aria unui paralelogram** este egală cu produsul dintre lungimea unei laturi și înălțimea corespunzătoare.
- **Aria rombului** este egală cu semiprodusul lungimilor diagonalelor sale.
- **Aria trapezului** este egală cu semiprodusului dintre suma lungimii bazelor și distanța dintre baze.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Calculați perimetrul patrulaterului convex $ABCD$ știind că:

a) $AB + BC = 18$ dm, $BC + CD = 22$ dm, $CD + DA = 24$ dm, $DA + AB = 20$ dm.

b) $AD = 7$ cm, $CD = 9$ cm, $\mathcal{P}_{ADC} = 28$ cm și triunghiul ABC este echilateral.

2 Fie paralelogramul $ABCD$ cu $AC \cap BD = \{O\}$. Știind că $\mathcal{P}_{AOB} = 26$ cm, $\mathcal{P}_{BOC} = 24$ cm și $AC + BD = 28$ cm, calculați perimetrul paralelogramului.

3 $ABCD$ este dreptunghi, $AC \cap BD = \{O\}$, $BC = 9$ cm, iar $\mathcal{P}_{AOD} = 24$ cm.

a) Calculați lungimile segmentelor AC și AB.

b) Calculați perimetrul și aria dreptunghiului.

4 Un triunghi dreptunghic are catetele de 5 cm și 12 cm.

a) Calculați aria triunghiului.

b) Calculați lungimea ipotenuzei și lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei.

5 Ipotenuza unui triunghi dreptunghic isoscel este de 10 cm. Calculați înălțimea corespunzătoare ipotenuzei, apoi aria triunghiului.

6 Calculați aria triunghiului ABC, în care $AB = 8$ cm, $BC = 1$ dm și $\sphericalangle ABC = 150°$.

7 $ABCD$ este un paralelogram cu $AB = 8$ cm, $AD = 6$ cm și $\sphericalangle BAD = 30°$. Calculați:

a) $d(D, AB)$ și $d(C, AD)$;

b) perimetrul și aria paralelogramului.

8 Un romb are perimetrul de 40 cm și un unghi de 150°. Calculați aria rombului, apoi produsul lungimilor diagonalelor acestuia.

9 Fie M mijlocul laturii BC a triunghiului ABC. Arătați că ΔABM și ΔACM au aceeași arie.

10 Punctul N aparține laturii BC a triunghiului ABC și $BN = 3 \cdot CN$.

a) Calculați raportul ariilor triunghiurilor ABN și CAN, apoi calculați raportul segmentelor BN și CN.

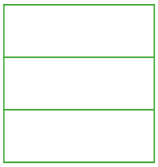
b) Găsiți o relație între rapoartele aflate.

11 $ABCD$ este un paralelogram și O este punctul în care se intersectează diagonalele sale.

a) Demonstrați că triunghiurile AOB și BOC au aceeași arie.

b) Dacă $\mathcal{A}_{AOD} = 8\text{ dm}^2$, calculați aria paralelogramului.

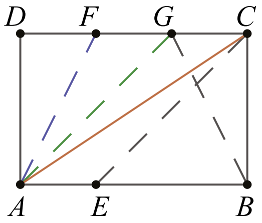
12 Un teren în formă de pătrat este împărțit în trei suprafețe dreptunghiulare prin două drepte paralele cu una dintre laturile pătratului. Știind că fiecare dreptunghi are perimetrul de 80 dam, calculați:



a) lungimea laturii pătratului;

b) aria fiecărei suprafețe dreptunghiulare și aria terenului, exprimând rezultatele în hectare.

13 În desenul de mai jos $ABCD$ este dreptunghi, $AB = 18$ cm, $BC = 12$ cm, $BE = 2 \cdot AE$ și $CG = GF = DF$.



Calculați:

a) aria dreptunghiului $ABCD$;

b) aria fiecăruia dintre triunghiurile: ADF, AGB, ACE;

c) aria fiecăruia dintre patrulaterele: $ADFE$, $AFGE$, $BCFA$, $ABCG$, $BEDF$.

14 Trapezul dreptunghic $ABCD$ are bazele $AB = 12$ cm, $CD = 8$ cm și $\sphericalangle A = 45°$.

a) Determinați înălțimea trapezului.

b) Calculați aria trapezului și aria triunghiului ADC.

15 Aria unui trapez este 400 dm^2, raportul bazelor sale este $\frac{1}{3}$, iar înălțimea sa este media aritmetică a bazelor. Calculați lungimile bazelor și înălțimea trapezului dat.

16 În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, punctul O este intersecția diagonalelor. Demonstrați că triunghiurile AOD și BOC au aceeași arie.

17 Dreapta PQ, cu $P \in AB$, $Q \in CD$, împarte paralelogramul $ABCD$, în două suprafețe echivalente (cu arii egale). Demonstrați că patrulaterele $ADQP$ și $BCQP$ au același perimetru.

18 Punctul M este situat în interiorul dreptunghiului $ABCD$. Demonstrați că:

$$\mathcal{A}_{MAB} + \mathcal{A}_{MDC} = \mathcal{A}_{MAD} + \mathcal{A}_{MBC} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{ABCD}.$$

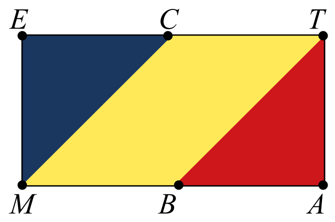
Evaluare sumativă

Se acordă 10 puncte din oficiu.

I. *La cerințele următoare alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.*

5p	**1.** În triunghiul ABC, AD și BE sunt înălțimi. Dacă $BC = 25$ cm, $AC = 15$ cm, $AD = 12$ cm, atunci $BE =$: A. 12 cm B. 18 cm C. 20 cm D. 16 cm
5p	**2.** Aria triunghiului dreptunghic isoscel cu ipotenuza de 24 cm este: A. 128 cm^2 B. 132 cm^2 C. 136 cm^2 D. 144 cm^2
5p	**3.** Punctele M și N sunt mijloacele laturilor AB și AD ale pătratului $ABCD$, $CD = 20$ cm. Calculând aria patrulaterului $BCNM$, se obține: A. 200 cm^2 B. 220 cm^2 C. 240 cm^2 D. 250 cm^2
5p	**4.** Dreptunghiul $ABCD$ are aria 100 cm^2 și $AB = 2 \cdot BC$. Perimetrul dreptunghiului este: A. $20\sqrt{2}$ cm B. $30\sqrt{2}$ cm C. $25\sqrt{2}$ cm D. $15\sqrt{2}$ cm
5p	**5.** Despre patrulaterul $DEFG$ se știe că $DE \parallel FG$, $DG \parallel EF$, $DE = 14$ cm, $EF = 6$ cm, $\sphericalangle DEF = 150^\circ$. Patrulaterul are aria: A. 21 cm^2 B. 28 cm^2 C. 42 cm^2 D. 84 cm^2
5p	**6.** Lungimile bazelor unui trapez dreptunghic sunt 5 cm, respectiv 9 cm, iar unul dintre unghiuri are măsura de 45°. Calculând aria trapezului, se obține: A. 38 cm^2 B. 28 cm^2 C. 42 cm^2 D. 84 cm^2
5p	**7.** $ABCD$ este un dreptunghi cu aria 320 cm^2, iar punctul P este situat pe dreapta AB. Aria triunghiului PCD este: A. 160 cm^2 B. 180 cm^2 C. 144 cm^2 D. 140 cm^2
5p	**8.** Un romb are aria 6 cm^2 și diagonalele exprimate în centimetri, prin numere naturale consecutive. Perimetrul rombului este: A. 20 cm B. 15 cm C. 10 cm D. 12 cm

II. *La problemele următoare se cer rezolvări complete.*

	1. Perimetrul dreptunghiului $MATE$ este 144 cm. Dragoș a colorat suprafața acestuia ca în figura alăturată, în trei culori: albastru, galben și roșu. Se știe că punctele B și C sunt mijloacele laturilor MA, respectiv ET și că $AB = ME$. Calculați:	
10p	a) aria suprafeței colorate cu galben;	
10p	b) cât la sută din suprafața dreptunghiului reprezintă suprafața care nu este colorată cu albastru.	
15p	**2.** Se consideră paralelogramul $CDEF$ cu $CE \cap DF = \{O\}$. Dreapta d trece prin punctul O și intersectează laturile CD și EF în punctele P, respectiv Q. Demonstrați că $\mathcal{P}_{CPOF} = \mathcal{P}_{EQOD}$.	
	3. Trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$ are $AB = 12$ cm, $CD = 8$ cm și înălțimea de 4 cm. Se consideră M, N, P mijloacele laturilor AB, BC, respectiv AD. Calculați:	
10p	a) aria patrulaterelor $ABNP$ și $CDPN$;	
5p	b) aria triunghiului CMP.	

5

Cercul

Competențe specifice:

1.5 **2.5** **3.5** **4.5** **5.5** **6.5**

5.1 Unghi înscris în cerc. Tangente dintr-un punct exterior la un cerc

L1 Coarde și arce în cerc, proprietăți

Cine și-ar mai putea imagina existența cotidiană fără obiecte care au formă de cerc?
Dacă mergem la Londra, nu putem rata o vizită, la „*London Eye*” , o atracție oarecum recentă, dar extrem de populară. Roata are diametrul de 120 metri, are 80 de spițe, pe ea fiind dispuse 32 de capsule, numerotate de la 1 la 33, numărul 13 fiind omis.

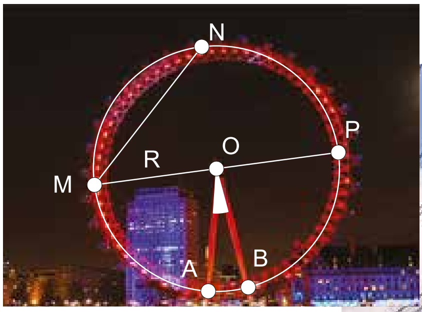


Fig. 1

Fig. 2

Ne amintim

1) **Cercul** este mulțimea punctelor din plan egal depărtate de un punct fix, numit centrul cercului. Centrul cercului se notează, de regulă, cu *O*.

2) Distanța de la centrul cercului la un punct oarecare al acestuia este constantă, se numește **rază** și se notează cu *R* sau *r*.

Exemplu:
În figura 1, punctele situate la distanța *R* de punctul fix *O* formează cercul cu centrul *O* și de rază R . Îl vom nota $\mathcal{C}(O,R)$ sau $\mathcal{C}(O,r)$.
Pe acest cerc, remarcăm punctele *A*, *B*, *M*, *N*, *P*.
Atunci, $AO = BO = MO = NO = PO = r$.

3) Segmentul care unește două puncte de pe cerc se numește **coardă** a cercului.
O coardă care conține centrul cercului se numește **diametru**.

Exemplu: În figura 1, *MN* și *MP* sunt coarde.
MP este coardă și $O \in MP$, deci *MP* este diametru.
$MP = d = MO + ON = 2 \cdot r$.

4) Mulțimea punctelor de pe cerc, situate de aceeași parte a unei coarde, la care adăugăm capetele coardei, se numește **arc de cerc**.
Oricare două puncte distincte ale cercului determină două arce de cerc.
Pentru a diferenția arcul despre care vorbim, se poate folosi o notație cu trei puncte.

Exemplu: Pentru punctele *M* și *N* există arcul mare *MN* și arcul mic *MN*, ambele notate cu $\overset{\frown}{MN}$. Deseori, dacă nu se precizează altfel, prin arcul $\overset{\frown}{MN}$ vom înțelege arcul mic.
Arcul mare $\overset{\frown}{MN}$ conține punctele *A*, *B*, *P* și se poate nota și $\overset{\frown}{MPN}$ sau $\overset{\frown}{MAN}$ sau $\overset{\frown}{MBN}$.

5) Un arc de cerc determinat de un diametru se numește **semicerc.**

Diametrul *MP* delimitează cele două semicercuri $\overset{\frown}{MNP}$ și $\overset{\frown}{MAP}$.

6) Unghiul cu vârful în centrul cercului se numește **unghi la centru**.

Exemplu: $\sphericalangle AOB$ este un unghi la centru.

7) Pentru oricare două puncte situate pe cerc, **măsura arcului** mic $\overset{\frown}{AB}$ este egală cu măsura unghiului la centru corespunzător acestuia.

Exemplu: $\overset{\frown}{AB} = \sphericalangle AOB$.
$\overset{\frown}{MP} = 180°$, pentru că *MP* este diametru al cercului.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

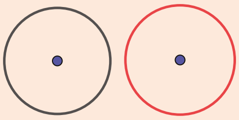
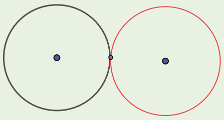
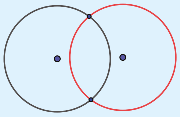
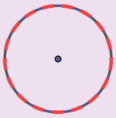
Sonia și Natalia privesc „London Eye” și poartă următorul dialog:

– Natalia, știind că la M este capsula 8, iar la N este capsula 17, ce măsură crezi că are arcul mic $\overset{\frown}{MN}$?
– Am înțeles, Sonia, vrei să vezi dacă știu că, pe roată, nu există capsula cu numărul 13, adică între 8 și 17 sunt 7 capsule în loc de 8.
– Bravo, înseamnă că împreună cu capsulele din capăt, care au numerele 8 și 17, avem 9 capsule, care formează 8 unghiuri congruente cu a 32-a parte dintr-un cerc întreg.
– Corect, draga mea prietenă, să facem calculul. 360 : 32 = 11,25, deci măsura unghiului format de spițele a două capsule consecutive este $11^\circ 15'$. Măsura arcului mic $\overset{\frown}{MN}$ va fi de $8 \cdot 11^\circ 15' = 90^\circ$.
– Crezi, Natalia, că-i putem întreba pe colegii noștri ce număr are capsula din punctul P ?

Observați poziția punctului P pe cercul din imagine, efectuați calculele necesare și răspundeți la întrebarea celor două prietene.

Definiția 1. Două cercuri cu raze egale se numesc ***cercuri congruente***.

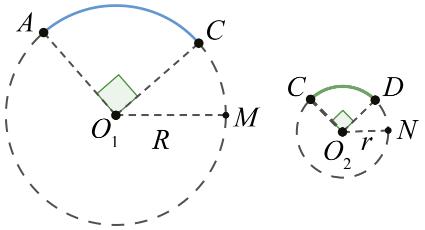
Două cercuri congruente pot avea următoarele poziții relative:

cercuri exterioare congruente	cercuri tangente exterior congruente	cercuri secante congruente	cercuri concentrice congruente (identice)
			

Definiția 2. Într-un cerc, sau în cercuri congruente, vom spune că ***două arce sunt congruente*** dacă au aceeași măsură. Pentru arcele congruente $\overset{\frown}{AB}$ și $\overset{\frown}{CD}$ scriem $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CD}$.

Observație:
Nu este suficient ca arcele să aibă aceeași măsură pentru a putea spune că acestea sunt congruente.
Este esențial ca acestea să fie arce ale aceluiași cerc sau ale unor cercuri congruente.

În figura alăturată, avem $\overset{\frown}{AB} = 90^\circ$ și $\overset{\frown}{CD} = 90^\circ$ și se observă imediat că arcele nu sunt congruente.



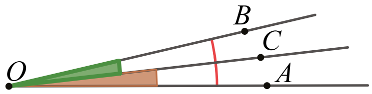
Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Teorema 1. Dacă punctele A, B, C aparțin cercului $\mathscr{C}(O, r)$, $C \in \overset{\frown}{AB}$, atunci $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CB}$.

$C \in AB$

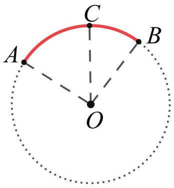
$AB = AC + CB$

$OC \in Int\,(\sphericalangle AOB)$



$\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOC + \sphericalangle COB$

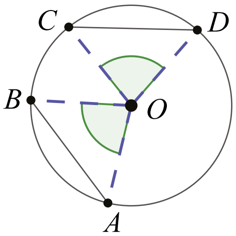
$C \in \overset{\frown}{AB}$



$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CB}$

Teorema 2.
1) În același cerc sau în cercuri congruente, la coarde congruente corespund arce congruente.
2) În același cerc sau în cercuri congruente, la arce congruente corespund coarde congruente.

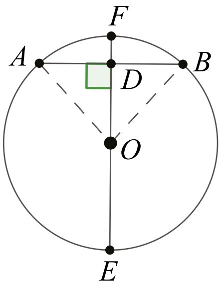
Demonstrație:



1) Se consideră pe cercul $\mathscr{C}(O, r)$ punctele A, B, C și D astfel încât $AB \equiv CD$.
În triunghiurile OAB și OCD, laturile OA, OB, OC și OD sunt raze ale cercului, deci sunt congruente, iar din ipoteză, avem $AB \equiv CD$. Cazul L.L.L. conduce la $\Delta OAB \equiv \Delta OCD$, iar de aici rezultă $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$, sau $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CD}$.
2) Fie $A, B, C, D \in \mathscr{C}(O, r)$ cu $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CD}$, fapt ce implică $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$.
În triunghiurile ΔOAB și ΔOCD, $AO \equiv CO$, $BO \equiv DO$, iar prin aplicarea cazului L.U.L., rezultă $\Delta OAB \equiv \Delta OCD$, adică $AB \equiv CD$.

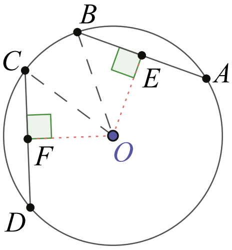
Teorema 3.
1) Dacă un diametru al unui cerc este perpendicular pe o coardă a sa, atunci acesta împarte coarda și arcele corespunzătoare în câte două părți congruente.
2) Dacă un diametru al unui cerc împarte o coardă sau unul dintre arcele determinate de aceasta în părți congruente, atunci acest diametru este perpendicular pe coardă.

Demonstrație: Fie $A, B, E, F \in \mathscr{C}(O, r)$, $O \in EF$ și $EF \cap AB = \{D\}$.



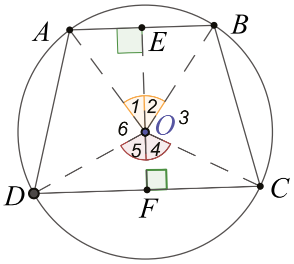
1) Dacă $EF \perp AB$, atunci triunghiurile ADO și BDO sunt dreptunghice și congruente (cazul I.C.): $OD \equiv OD$ (latură comună) și $AO \equiv BO$ (raze ale cercului).
Rezultă $AD \equiv DB$ și $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle BOD$, ultima relație conducând la $\overset{\frown}{AF} \equiv \overset{\frown}{FB}$.
Arcele $\overset{\frown}{EAF}$ și $\overset{\frown}{EBF}$ sunt semicercuri și atunci: $\overset{\frown}{AE} = 180° - \overset{\frown}{AF} = 180° - \overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{BE}$.
2) Știm că un diametru conține mijlocul unei coarde sau al unuia dintre arcele determinate de această coardă. În triunghiul isoscel AOB, diametrul include mediana corespunzătoare bazei sau bisectoarea unghiului format de laturile congruente. Atunci, diametrul include și înălțimea corespunzătoare bazei. Rezultă $EF \perp AB$, adică diametrul este perpendicular pe acea coardă.

Teorema 4. Două coarde ale unui cerc sunt congruente dacă și numai dacă sunt egal depărtate de centrul cercului.

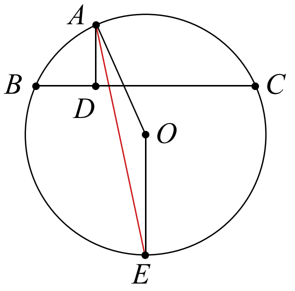


Demonstrație: Fie $A, B, C, D \in \mathscr{C}(O, r)$, $OE \perp AB$, $E \in AB$ și $OF \perp CD$, $F \in CD$.
Dreptele OE și OF conțin diametre perpendiculare pe coarde, deci E și F sunt mijloacele coardelor AB și CD, adică $AB = 2 \cdot BE$ și $CD = 2 \cdot CF$.
Dacă $AB \equiv CD$, atunci $BE \equiv CF$, iar triunghiurile BEO și CFO sunt congruente (I.C.); rezultă $OE \equiv OF$, adică $d(O, AB) = d(O, CD)$.
Reciproc, dacă $d(O, AB) = d(O, CD)$, adică $OE \equiv OF$, atunci $\Delta BEO \equiv \Delta CFO$ (I.C.).
Rezultă congruența $BE \equiv CF$, echivalentă cu $AB \equiv CD$.

Teorema 5. Două coarde ale aceluiași cerc, cuprinse între drepte paralele, sunt congruente.



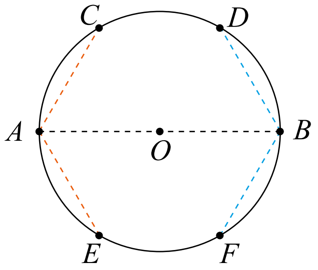
Demonstrație: Considerăm punctele A, B, C, D pe cercul $\mathscr{C}(O, r)$ cu $AB \parallel CD$.
Construim $OE \perp AB$ și fie $OE \cap AB = \{F\}$. Atunci, din $AB \parallel CD$ obținem și $OF \perp DC$. Triunghiurile ABO și CDO sunt isoscele ($OA = OB = OC = OD = r$), iar OE, respectiv OF, sunt înălțimi corespunzătoare bazelor, deci sunt și bisectoare. Deducem că: $\sphericalangle O_1 \equiv \sphericalangle O_2$ și $\sphericalangle O_4 \equiv \sphericalangle O_5$.
Deoarece semidreptele OE și OF sunt opuse, rezultă $\sphericalangle O_3 = 180° - \sphericalangle O_2 - \sphericalangle O_4 =$
$= 180° - \sphericalangle O_1 - \sphericalangle O_5 = \sphericalangle O_6$.
Din cazul L.U.L., obținem $\Delta OBC \equiv \Delta OAD$, apoi $BC \equiv AD$ și $\overset{\frown}{BC} \equiv \overset{\frown}{AD}$.



Aplicația 1: Punctele A, B, C sunt situate pe $\mathcal{C}(O, r)$, iar $AD \perp BC$, $D \in BC$. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle DAO$ intersectează cercul în punctul E.

Demonstrați că $\overset{\frown}{BE} \equiv \overset{\frown}{CE}$.

Soluție: În triunghiul isoscel AOE ($AO = OE = r$) avem $\sphericalangle EAO \equiv \sphericalangle AEO$.
Dar AE este bisectoarea $\sphericalangle DAO$ și $\sphericalangle EAO \equiv \sphericalangle EAD$.
Rezultă $\sphericalangle AEO \equiv \sphericalangle EAD$ ceea ce înseamnă că $EO \parallel AD$.
Deoarece $AD \perp BC$, se obține $EO \perp BC$. Dreapta EO conține un diametru al cercului, deci împarte arcul $\overset{\frown}{BC}$ în două arce congruente. Rezultă $\overset{\frown}{BE} \equiv \overset{\frown}{CE}$.



Aplicația 2: Pe un cerc de centru O și diametru AB, se consideră punctele C, D de o parte a diametrului și punctele E, F de cealaltă parte a diametrului, astfel încât $AC \equiv AE$ și $BD \equiv BF$. Arătați că $\overset{\frown}{CD} \equiv \overset{\frown}{EF}$ și $d(O, CD) = d(O, EF)$.

Soluție: Într-un cerc, la coarde congruente corespund arce congruente.
Din $AC \equiv AE$ obținem $\overset{\frown}{AC} \equiv \overset{\frown}{AE}$, iar din $BD \equiv BF$ obținem $\overset{\frown}{BD} \equiv \overset{\frown}{BF}$.
Deoarece diametrul împarte cercul în două semicercuri rezultă
$\overset{\frown}{CD} = 180^\circ - \overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BD} = 180^\circ - \overset{\frown}{AE} - \overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{EF}$, deci $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{EF}$.
Arcele *CD și EF* sunt situate pe același cerc și sunt congruente. Deducem, din teorema 2, că $CD \equiv EF$, apoi din teorema 4, coardele CD și EF sunt situate la aceeași distanță față de punctul O, centrul cercului.

Reținem!

1) În același cerc sau în cercuri congruente, la coarde congruente corespund arce congruente.
2) În același cerc sau în cercuri congruente, la arce congruente corespund coarde congruente.
3) Dacă un diametru al unui cerc este perpendicular pe o coardă a sa, atunci acesta împarte coarda și arcele corespunzătoare în câte două părți congruente.
4) Dacă un diametru al unui cerc împarte o coardă sau unul dintre arcele determinate de aceasta în părți congruente, atunci acest diametru este perpendicular pe coardă.
5) Două coarde ale unui cerc sunt congruente dacă și numai dacă sunt egal depărtate de centrul cercului.
6) Două coarde ale aceluiași cerc, cuprinse între drepte paralele, sunt congruente.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Desenați un cerc cu centrul O și reprezentați trei puncte distincte A, B, C pe acest cerc.
a) Numiți arcele și coardele determinate de cele trei puncte.
b) Numiți unghiul la centru care conține punctele B și C.

2 Desenați un cerc și fixați pe el punctele A, B, C, astfel încât $\overset{\frown}{AB} = 60°$, $\overset{\frown}{BC} = 90°$.
Calculați măsura arcului mic $\overset{\frown}{AC}$.
Analizați toate cazurile posibile.

3 Desenați un cerc cu centrul O, apoi fixați pe acest cerc punctele A, B, C astfel încât măsurile arcelor $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ și $\overset{\frown}{CA}$ să fie 50°, 150° respectiv 160°. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:
a) $O \in AC$.
b) Arcul mare $\overset{\frown}{AC}$ are măsura de 200°.
c) $\sphericalangle AOC = 80^\circ$.
d) Triunghiul AOB este isoscel.

4 Construiți, prin punctul A, interior cercului $\mathcal{C}(O, r)$, o coardă BC, astfel încât A să fie mijlocul ei.
a) Descrieți fiecare etapă a construcției.
b) Dacă $BC = r$, calculați măsura unghiului OBC și măsura arcului mic $\overset{\frown}{BC}$.

5 AB este un diametru al cercului $\mathcal{C}(O, r)$, iar AC și AD sunt coarde congruente ale acestui cerc. Demonstrați că:
a) $\overset{\frown}{BC} \equiv \overset{\frown}{BD}$; b) $AB \perp CD$.

6 În cercul $\mathcal{C}(O, r)$, coardele $AB = 6$ cm și $CD = 12$ cm nu au puncte comune și sunt situate la distanța de 6 cm, respectiv 3 cm, de centrul cercului. Demonstrați că $\sphericalangle ABO + \sphericalangle BAO = \sphericalangle COD$.

7 Coardele AB și CD ale cercului $\mathcal{C}(O, r)$ sunt perpendiculare și se intersectează în punctul P. Fie E și F mijloacele celor două coarde. Demonstrați că $EF = OP$.

8 Cercul $\mathcal{C}(O, r)$ conține vârfurile A, B, C ale paralelogramului $ABCD$ și intersectează latura CD în punctul E. Demonstrați că triunghiul ADE este isoscel.

9 Pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$, cu $r = 12$ cm, sunt situate punctele A, B, C, D, astfel încât AB este diametru, $\overset{\frown}{CAD} = 120°$ și $CD \perp AB$.
a) Demonstrați că triunghiurile OCD și ACD sunt isoscele.
b) Calculați măsurile arcelor $\overset{\frown}{AC}$ și $\overset{\frown}{BD}$;
c) Calculați distanța de la punctul B la dreapta CD.

10 Punctele A, B, C, D, E sunt situate pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$ astfel încât, oricum am considera două dintre arcele de cerc $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{DE}$, $\overset{\frown}{EA}$, acestea nu au puncte comune. Se știe că $\overset{\frown}{ABC} = \overset{\frown}{CDE} = \overset{\frown}{AE} = 120°$ și $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} = 2 \cdot \overset{\frown}{BC}$.
a) Calculați măsurile celor cinci arce.
b) Demonstrați că triunghiul ΔACE este echilateral.

L2 Unghi înscris în cerc

Anterior aprofundării cercului, studiul geometriei s-a bazat, în general, pe rezultate referitoare la triunghi.

Definiția cercului și proprietățile lui oferă posibilitatea completării acestor rezultate și mijloace noi de demonstrare a unora dintre ele.

Ne amintim

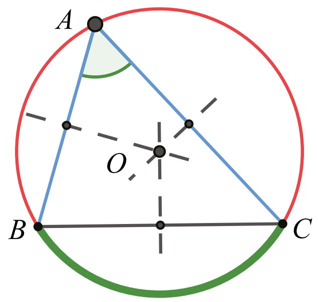
1) Orice punct situat pe mediatoarea unui segment este egal depărtat de capetele acestuia.
2) Mediatoarele unui triunghi sunt concurente într-un punct, notat de regulă cu O.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

În figura alăturată, sunt construite mediatoarele laturilor triunghiului ABC. Este reprezentat, de asemenea, cercul care conține cele trei vârfuri ale triunghiului.

Să identificăm elementele cunoscute despre triunghi și despre cerc și eventuale legături între acestea:

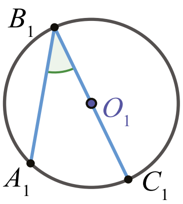
1) Cercul reprezentat are centrul O și avem $OA = OB = OC = r$.
2) Laturile triunghiului ABC sunt coarde ale cercului.
3) Fiecărei laturi îi corespunde un arc mic și un arc mare.
4) Unghiurile triunghiului au vârful pe cerc.
5) În interiorul fiecărui unghi al triunghiului, se află doar unul dintre arcele corespunzătoare laturii opuse.

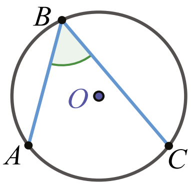


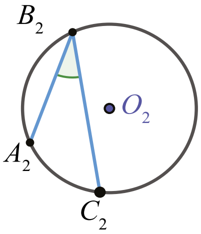
Definiție: Se numește **unghi înscris în cerc** un unghi care are vârful pe cerc, iar laturile sale sunt coarde ale cercului.

Sunt posibile următoarele trei situații:

1) centrul cercului se află pe o latură a unghiului;
2) centrul cercului se află în interiorul unghiului;
3) centrul cercului se află în exteriorul unghiului.







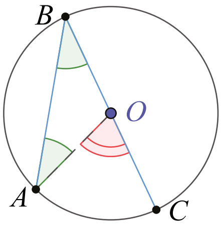
Teoremă. Măsura unui unghi înscris în cerc este egală cu jumătate din măsura arcului de cerc subîntins de laturile sale (determinat de laturile unghiului și situat în interiorul acestuia).

Demonstrație: Despre unghiul înscris în cerc nu cunoaștem decât definiția. Știm, însă, că măsura unui unghi la centru este egală cu măsura arcului de cerc cuprins între laturile sale. Vom folosi acest rezultat.
Fie unghiul ABC, înscris în cercul de centru O și rază r.

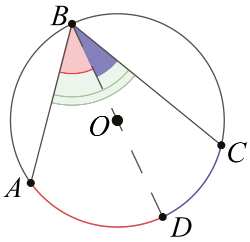
1) Considerăm, pentru început, cazul când una dintre laturile unghiului este diametrul cercului. Fie această latură BC. Din $OA = OB = r$, rezultă că ΔAOB este isoscel, de unde $\sphericalangle BAO \equiv \sphericalangle ABO$. Unghiul $\sphericalangle AOC$ este exterior triunghiului AOB, deci $\sphericalangle AOC = \sphericalangle BAO + \sphericalangle ABO = 2 \cdot \sphericalangle ABO = 2 \cdot \sphericalangle ABC$.

Dar $\sphericalangle AOC$ este unghi la centru și are măsura egală cu a arcului mic $\overset{\frown}{AC}$.

Rezultă $\sphericalangle ABC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$.

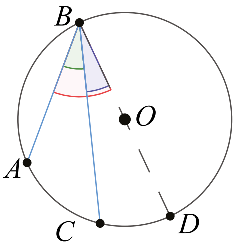


2) Fie O în interiorul unghiului $\sphericalangle ABC$. Notăm cu D punctul diametral opus punctului B. Condiția impusă pentru O implică descompunerea unghiului înscris în cerc în două unghiuri adiacente și descompunerea arcului corespunzător în două arce alăturate. Aplicând, pentru fiecare, rezultatul anterior, obținem: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD + \sphericalangle DBC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{DC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$.



3) Fie O în exteriorul unghiului ABC și D punctul diametral opus punctului B. Aplicând rezultatul obținut la 1), obținem:

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD - \sphericalangle DBC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD} - \frac{1}{2}\overset{\frown}{CD} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}.$$

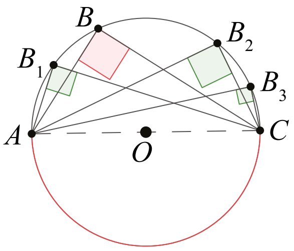


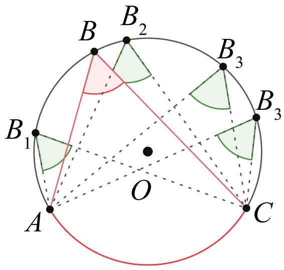
Teorema de mai sus ne permite să formulăm câteva **consecințe**, foarte utile în aplicații.

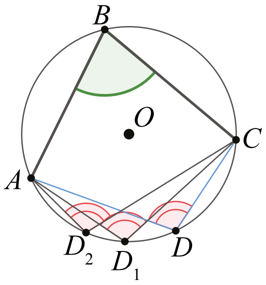
C_1: Măsura oricărui unghi înscris într-un semicerc este de 90°.

C_2: Dacă A și C sunt două puncte fixe pe un cerc, atunci oricare ar fi B_n, un punct situat pe arcul $\overset{\frown}{ABC}$, are loc relația:
$\sphericalangle AB_nC \equiv \sphericalangle ABC$

C_3: Dacă A și C sunt două puncte fixe pe un cerc, atunci oricare ar fi D, un punct al cercului, care nu aparține arcului $\overset{\frown}{ABC}$, are loc relația:
$\sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC = 180°$.







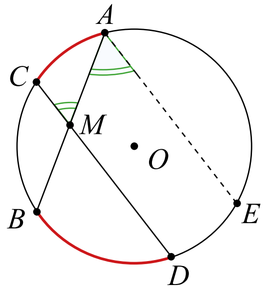
Argumentați, folosind figurile de mai sus, validitatea acestor rezultate.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicația 1: Fie AB și CD două coarde ale unui cerc și M punctul lor de intersecție, situat în interiorul cercului. Demonstrați că $\sphericalangle AMC = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}\right)$.

Soluție: Prin punctul A, construim paralela AE la CD, E punct al cercului. Atunci, arcele $\overset{\frown}{AC}$ și $\overset{\frown}{DE}$ sunt congruente, fiind cuprinse între coarde paralele. Dreptele paralele AE și CD formează, cu secanta AB, unghiuri alterne interne congruente, deci $\sphericalangle AMC \equiv \sphericalangle BAE$, iar $\sphericalangle BAE$ este unghi înscris în cerc. Obținem:

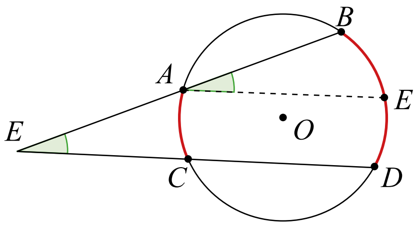
$$\sphericalangle AMC = \sphericalangle BAE = \frac{1}{2}\cdot \overset{\frown}{BDE} = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{DE}\right) = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{AC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}\right).$$



Aplicația 2: Fie AB și CD două coarde ale unui cerc. Dreptele suport ale coardelor se intersectează în punctul N, situat în exteriorul cercului. Arătați că $\sphericalangle ANC = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AC}\right)$.

Soluție: Construim, prin A, coarda $AE \parallel CD$. Obținem arcele situate între ele, congruente: $\overset{\frown}{AC} \equiv \overset{\frown}{ED}$. Paralelele AE și CD formează, cu secanta AN, unghiuri corespondente congruente, deci $\sphericalangle ANC \equiv \sphericalangle BAE$, iar $\sphericalangle BAE$ este un unghi cu vârful pe cerc. Obținem:

$$\sphericalangle ANC = \sphericalangle BAE = \frac{1}{2}\cdot \overset{\frown}{BE} = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{DE}\right) = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AC}\right).$$



Reținem!

Se numește *unghi înscris în cerc* un unghi care are vârful pe cerc, iar laturile sale sunt coarde ale cercului.
Măsura unui unghi înscris în cerc este egală cu jumătate din măsura arcului de cerc subîntins de laturile sale (determinat de laturile unghiului și situat în interiorul acestuia).

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Desenați un cerc $\mathcal{C}(O, r)$ și alegeți trei puncte A, B, C ale acestuia.

a) Numiți unghiurile înscrise în cercul $\mathcal{C}(O, r)$.

b) Dacă $\overset{\frown}{AB} = 40°$, $\overset{\frown}{BC} = 100°$, calculați măsurile unghiurilor $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCA$, $\sphericalangle CAB$.

2 Punctele A, B, C aparțin cercului $\mathcal{C}(O, r)$, $O \in AB$, iar $\overset{\frown}{AC} = 52°$. Determinați măsurile unghiurilor $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCA$, $\sphericalangle CAB$.

3 Se consideră punctele A, B, C, D pe cercul de centru O, astfel încât C și D sunt situate de aceeași parte a dreptei AB, ca și punctul O.

a) Demonstrați că $\sphericalangle ACB + \sphericalangle ADB = \sphericalangle AOB$.

b) Pentru $\overset{\frown}{AB} = 70°$, calculați măsurile unghiurilor $\sphericalangle ACB$ și $\sphericalangle AOB$.

4 Punctele E, F, G, H aparțin cercului de centru O, astfel încât G și H sunt situate de o parte și de alta a dreptei EF.

a) Calculați $\sphericalangle EGF + \sphericalangle EHF$.

b) Pentru $\overset{\frown}{EF} = 80°$, determinați măsurile unghiurilor $\sphericalangle EHF$, $\sphericalangle EOF$, $\sphericalangle EGF$, analizând cazurile posibile (când G aparține arcului mic EF, respectiv arcului mare EF).

5 Fie A un punct al cercului $\mathcal{C}(O, r)$, cu $r = 6$ cm. Mediatoarea segmentului OA intersectează cercul în punctele B, respectiv C.

a) Calculați perimetrul patrulaterului $ABOC$.

b) Calculați măsurile unghiurilor $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle ACO$.

6 Triunghiul DEF are vârfurile pe un cerc $\mathcal{C}(O, r)$, iar bisectoarea unghiului EDF intersectează cercul, a doua oară, în punctul M.

a) Demonstrați că $\sphericalangle EFM \equiv \sphericalangle FEM$.

b) Pentru $\overset{\frown}{DE} = 90°$, $\overset{\frown}{DF} = 150°$, calculați măsurile unghiurilor triunghiului DFM.

7 Coardele AB și AC ale cercului $\mathcal{C}(O, r)$ sunt perpendiculare și $\sphericalangle ABO = 80°$. Determinați măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

8 Patrulaterul $MNPQ$ are vârfurile pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$ și $\overset{\frown}{MN} \equiv \overset{\frown}{NP}$, $\overset{\frown}{MQ} \equiv \overset{\frown}{PQ}$.

a) Demonstrați că $O \in NQ$.

b) Știind că $\overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{MQ} - 40°$, aflați măsurile unghiurilor patrulaterului $MNPQ$.

9 Punctele A, B, C sunt situate pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$, iar AB este diametru. Bisectoarea unghiului ACB intersectează cercul în punctul D.
Calculați:

a) măsura arcului mic $\overset{\frown}{BD}$;

b) măsura unghiului AOD.

10 Triunghiul ABC este isoscel, $AB = AC$, iar cercul de centru A, având raza $r < AB$, intersectează laturile AB și AC în punctele D, respectiv E.

a) Demonstrați că $DE \parallel BC$.

b) Calculați măsura arcului mare $\overset{\frown}{DE}$, știind că $\sphericalangle BAC + \sphericalangle ECB = 115°$.

11 Fie AB diametru al cercului $\mathcal{C}(O, r)$, punctul C aparține cercului și M este mijlocul arcului mic $\overset{\frown}{BC}$.

a) Demonstrați că $OM \parallel AC$.

b) Fie $BD \parallel OM$, D fiind situat pe cerc. Demonstrați că punctele C, D, O sunt coliniare.

12 Pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$, cu $r = 10$ cm, se consideră punctele A, B, C, astfel încât $AO \perp OB$, iar C este situat pe arcul mic $\overset{\frown}{AB}$. Dreapta $CM \perp OA$, $M \in OA$, intersectează cercul în P, iar dreapta $CN \perp OB$, $N \in OB$, intersectează cercul în Q.

a) Calculați lungimea segmentului MN.

b) Arătați că punctele P, O, Q sunt coliniare.

c) Dacă $CMON$ este pătrat, aflați măsura unghiului ACM.

13 Punctele M și N sunt diametral opuse pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$, iar punctul P este mijlocul unui arc de cerc cu capetele M și N. Mediatoarea segmentului PM intersectează arcul mare $\overset{\frown}{PM}$ în punctul Q, iar mediatoarea segmentului PN intersectează arcul mare $\overset{\frown}{PN}$ în punctul R. Calculați măsurile unghiurilor triunghiului PQR.

L3 Tangente dintr-un punct exterior la un cerc

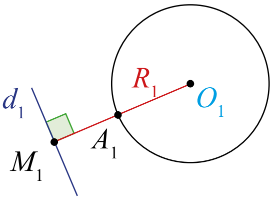
Ne amintim

1) Fiind dat un punct A, există o infinitate de cercuri care îl conțin.
2) Fiind date două puncte distincte A și B, există o infinitate de cercuri care conțin aceste puncte. Centrele acestor cercuri se află pe mediatoarea segmentului AB.
3) Oricare trei puncte distincte ale unui cerc sunt necoliniare.
4) Trei puncte necoliniare determină un cerc și numai unul. Cercul care conține punctele necoliniare A, B, C se numește **cercul circumscris** triunghiului ABC, centrul său fiind punctul de intersecție a mediatoarelor laturilor triunghiului.
5) O dreaptă și un cerc pot avea cel mult două puncte comune.

Sunt posibile următoarele poziții relative ale unei drepte față de un cerc:

dreaptă exterioară cercului

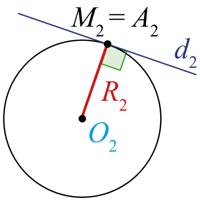
$\mathcal{C}(O_1, R_1) \cap d_1 = \varnothing$



$d(O_1, d_1) > R_1$

dreaptă tangentă la cerc

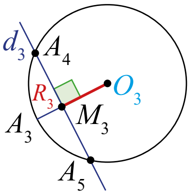
$\mathcal{C}(O_2, R_2) \cap d_2 = \{A_2\}$



$d(O_2, d_2) = R_2$

dreaptă secantă cercului

$\mathcal{C}(O_3, R_3) \cap d_3 = \{A_4, A_5\}$



$d(O_3, d_3) < R_3$

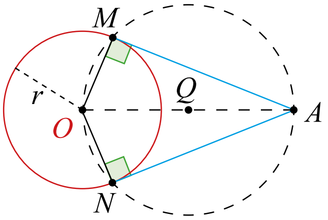
Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Teorema 1. O dreaptă d este tangentă la cercul $\mathcal{C}(O, r)$, în punctul A, dacă și numai dacă $d \perp OA$.

Demonstrație: Considerăm dreapta d, tangentă la cercul $\mathcal{C}(O, r)$, în punctul A. Vom demonstra că $d \perp OA$. Presupunem, prin reducere la absurd, că dreapta d nu este perpendiculară pe OA. Fie atunci $OB \perp d$, $B \in d$. În triunghiul OAB, cu $\sphericalangle OBA = 90^\circ$, avem $\sphericalangle OBA > \sphericalangle OAB$, deci $OA > OB$. Deoarece A este pe cerc, rezultă că punctul B este în interiorul cercului și atunci dreapta d ar mai avea un punct, diferit de A, comun cu cercul. Se ajunge la o contradicție. Presupunerea este falsă, prin urmare $d \perp OA$.
Pe de altă parte, știm că într-un punct A, al unei drepte OA, se poate construi o singură perpendiculară d, ceea ce ne spune că singura dreaptă perpendiculară pe OA, în punctul A este tangenta la cerc, în acest punct.
Într-un punct al unui cerc, se poate construi o singură tangentă la cerc. Ne întrebăm dacă există drepte distincte, care au un punct comun și sunt tangente la un cerc. Vom considera un cerc de centru O și rază r.

Teorema 2. Prin orice punct A, exterior unui cerc $\mathcal{C}(O, r)$, se pot construi două tangente AM și AN, la cerc. Segmentele determinate de punctul A și punctele de tangență sunt congruente.

Demonstrație: Considerăm punctul A care aparține exteriorului cercului $\mathcal{C}(O, r)$, deci $OA > r$. A găsi punctul de contact al unei tangentei din A la cerc înseamnă a construi un triunghi dreptunghic cu ipotenuza AO și cu vârful unghiului drept pe cercul dat. Știm că un unghi drept este înscris într-un semicerc, deci vom construi cercul de diametru AO.

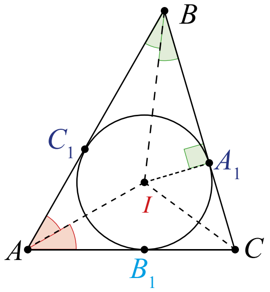


Notăm centrul său cu Q; raza va fi $R = \frac{OA}{2}$. Notăm cu M, respectiv N, punctele de intersecție a celor două cercuri, iar unghiurile $\sphericalangle OMA$ și $\sphericalangle ONA$ sunt unghiuri drepte. Dreptele AM și AN sunt tangente la cerc. Considerăm triunghiurile OAM și OAN, dreptunghice și congruente (OA latură comună și $OM \equiv ON$, ca raze ale cercului); deci catetele corespunzătoare, MA și NA sunt congruente.

Congruența triunghiurilor OAM și OAN ne oferă încă un rezultat remarcabil, foarte util în rezolvarea problemelor: *Semidreapta determinată de un punct exterior unui cerc și centrul cercului este bisectoarea unghiului format de tangentele la cerc din acel punct*. În desen (Teorema 2), semidreapta AO este este bisectoarea unghiului $\sphericalangle MAN$.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

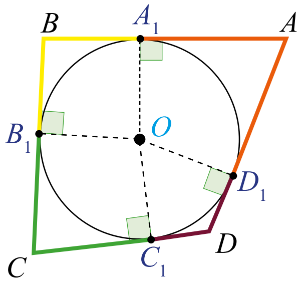
Aplicația 1: În triunghiul ABC notăm $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Bisectoarele unghiurilor triunghiului se intersectează în punctul I. Cum fiecare punct al bisectoarei unui unghi este egal depărtat de laturile unghiului, rezultă că punctul I este este situat la aceeași distanță față de cele trei laturi ale triunghiului. Notăm această distanță cu r, deci $d(I, AB) = d(I, BC) = d(I, AC) = r$. Construim cercul de centru I și cu raza egală cu r. Acest cerc se numește **cercul înscris** *în triunghiul ABC* și intersectează laturile triunghiului în punctele $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, respectiv $C_1 \in AB$ (punctele de tangență ale laturilor cu cercul înscris). Calculați lungimile segmentelor: AB_1, AC_1, BA_1, BC_1, CA_1, CB_1 în funcție de a, b, c și de semiperimetrul triunghiului.



Soluție: Laturile triunghiului sunt tangente cercului înscris și aplicând teorema 2. obținem congruențele: $AB_1 \equiv AC_1$, $BC_1 \equiv BA_1$, și $CA_1 \equiv CB_1$. Notăm lungimile segmentelor: $AB_1 = x$, $BC_1 = y$ și $CA_1 = z$.
Atunci, lungimile laturilor triunghiului sunt: $a = y + z$, $b = x + z$, $c = x + y$ (1),
iar perimetrul triunghiului ABC este $P = 2x + 2y + 2z$. Notăm $p = x + y + z$ (2),
semiperimetrul triunghiului ABC. Scăzând pe rând din egalitatea (2) câte una din egalitățile (1), rezultă $AB_1 = AC_1 = p - a$, $BC_1 = BA_1 = p - b$ și $CA_1 = CB_1 = p - c$.

Aplicația 2: Din punctul A, exterior cercului $\mathscr{C}(O, r)$, construim tangentele AA_1 și AD_1. În interiorul unghiului $\sphericalangle A_1AD_1$ și în exteriorul cercului, considerăm punctul C, din care construim tangentele la cerc: CB_1 și CC_1. Astfel patrulaterul $A_1B_1C_1D_1$ este patrulater convex.
Notăm $\{B\} = AA_1 \cap CB_1$ și $\{D\} = AD_1 \cap CC_1$.

a) Realizați, cu ajutorul instrumentelor geometrice, desenul alăturat, respectând datele problemei.
b) Demonstrați că patrulaterul convex $ABCD$ are proprietatea $AB + CD = BC + AD$.



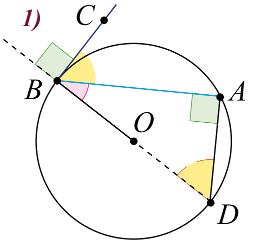
Soluție: Segmentele reprezentate cu aceeași culoare sunt tangentele dintr-un punct exterior, la cercul dat, deci sunt congruente Se obține $AB + CD = BC + AD$.

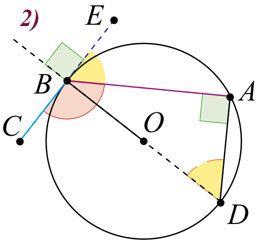
Puțină istorie

Rezultatul prezentat de Aplicația 2 a fost descoperit de inginerul francez Henri Pitot, în anul 1725.
Henri Pitot a trăit între anii 1695–1771.

Henri Pitot

Aplicația 3: Fie $\sphericalangle ABC$, cu vârful pe cercul de centru O, astfel încât o latură este tangentă la un cerc, iar cealaltă latură este coardă a cercului. Măsura unghiului $\sphericalangle ABC$ este egală cu jumătate din măsura arcului de cerc, situat în interiorul unghiului.
Demonstrație: Fie unghiul ABC, cu latura BC tangentă în punctul B la cerc, iar latura BA coardă a aceluiași cerc. Sunt posibile următoarele trei cazuri:



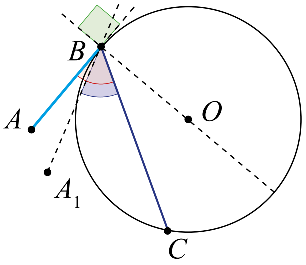


1) Unghiul $\sphericalangle ABC$ este ascuțit. Știind că $\sphericalangle OBC = 90^\circ$, rezultă $O \notin Int(\sphericalangle ABC)$. Notăm cu D punctul diametral opus lui B și se obține $\sphericalangle BAD = 90^\circ$ (înscris în semicerc). Unghiurile $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle ADB$ au același complement (unghiul $\sphericalangle ABD$), deci sunt congruente. Deoarece unghiul $\sphericalangle ADB$ este înscris în cerc, se obține $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$.

2) Unghiul $\sphericalangle ABC$ este obtuz. Atunci, arcul din interiorul unghiului este arcul mare $\overset{\frown}{ADB}$.

Fie BE semidreapta opusă semidreptei BC. Unghiul ABE este ascuțit, cu o latură tangentă și cealaltă coardă a cercului. Aplicând cazul 1), obținem $\sphericalangle ABC = 180^\circ - \sphericalangle ABE = 180^\circ - \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB} = \frac{1}{2}\left(360^\circ - \overset{\frown}{AB}\right) = \frac{1}{2}\overset{\frown}{ADB}$.

3) Unghiul $\sphericalangle ABC$ este unghi drept. Atunci, AB este diametru, unghiul $\sphericalangle ABC$ are în interior semicercul $\overset{\frown}{AB}$ cu măsura 180°, deci $\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB} = 90^\circ = \sphericalangle ABC$.



Aplicația 4: Unghiul $\sphericalangle ABC$ are vârful B pe cerc, iar BC, este coardă a cercului. Dacă $\sphericalangle ABC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$, atunci AB este tangenta în B la cerc.
Demonstrație: Presupunem, prin reducere la absurd, că AB nu este tangenta în B la cerc. Atunci, există o dreaptă BA_1 tangentă în B la cerc. Aplicăm rezultatul obținut la Aplicația 3, cazul 1) și avem: $\sphericalangle A_1BC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC} = \sphericalangle ABC$. Rezultă că dreptele BA și BA_1 coincid, deci AB este tangenta în B, la cerc.

Rezultatul prezentat în Aplicația 4 ne oferă o modalitate de a arăta că o dreaptă este tangentă la un cerc: *dacă măsura unui unghi cu vârful pe cerc este jumătate din măsura arcului din interiorul unghiului, iar o latură este coardă a cercului, atunci cealaltă latură a unghiului este tangentă la cerc.*

Reținem!

- Trei puncte necoliniare determină un cerc și numai unul.
- O dreaptă și un cerc pot avea cel mult două puncte comune.
- O dreaptă este tangentă la un cerc dacă și numai dacă este perpendiculară pe raza cercului, în punctul de intersecție al dreptei cu cercul.
- Prin orice punct A, exterior unui cerc $\mathcal{C}(O, r)$, se pot construi două tangente la acest cerc. Segmentele determinate de punctul A și punctele de tangență sunt congruente.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Realizați câte un desen care să corespundă datelor de mai jos, apoi scrieți, folosind simboluri matematice, relația dintre raza cercului și distanța de la centrul cercului la dreaptă, pentru fiecare dintre cazurile:

a) cercul cu centrul A are raza r_1 și dreapta a este exterioară cercului.

b) cercul cu centrul B are raza r_2 și dreapta b este tangentă cercului.

c) cercul cu centrul C are raza r_3 și dreapta c este secantă cercului.

2 Desenați prin punctul A, exterior cercului $\mathcal{C}(O, r)$, o dreaptă exterioară, o dreaptă tangentă și o dreaptă secantă cercului. Notați punctele cercului prin care trec dreptele desenate, apoi, pentru fiecare dintre cele trei drepte, scrieți mulțimea punctelor de intersecție dintre dreaptă și cerc.

3 Desenați cercul cu centrul O și de rază $r = 3$ cm. Fixați punctul A pe cerc și construiți tangenta TA la acest cerc. Completați pe caiet spațiile libere astfel încât să obțineți propoziții adevărate:

a) $\sphericalangle TAO = \ldots^\circ$;

b) $d(O, TA) = \ldots = \ldots$ cm.

4 Se consideră cercul $\mathcal{C}(O, r)$, $r = 0{,}4$ dm și o dreaptă d. Distanța de la punctul O, centrul cercului, la dreapta d, este exprimată, în centimetri, prin numărul $x \in \mathbb{N}$, $x < 10$. Alegeți numărul x astfel încât dreapta d să fie:

a) exterioară cercului;

b) tangentă cercului;

c) secantă cercului.

5 Fie M un punct al cercului $\mathcal{C}(O, r)$, cu raza $r = 3$ cm și punctul T, exterior cercului, astfel încât $TM = 4$ cm și $TO = 5$ cm. Stabiliți poziția dreptei TM față de cercul dat.

6 Punctul A este exterior cercului $\mathcal{C}(O, r)$, AB este tangentă la cerc, punctul B este situat pe cerc, $OA = 18$ cm și $\sphericalangle OAB = 30^\circ$. Calculați raza cercului.

7 Prin punctul B, exterior cercului $\mathcal{C}(O, r)$, se construiesc dreptele BC și BD, tangente la cerc, $C, D \in \mathcal{C}(O, r)$. Știind că $OB = 16$ cm și că triunghiul COD este echilateral, calculați:

a) BC și BD;

b) distanța de la punctul B la dreapta CD.

8 Punctele A, B, C sunt situate pe un cerc astfel încât $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{AC}$. Demonstrați că tangenta la cerc, în punctul A, este paralelă cu dreapta BC.

9 Într-un cerc, se consideră arcul $\overset{\frown}{AB} = 72^\circ$. Tangenta la cerc în punctul A intersectează mediatoarea segmentului AB în punctul C.

a) Demonstrați că CB este tangentă la cerc;

b) Calculați măsura unghiului ACB.

10 Pe un cerc de centru O și rază 8 cm, se iau punctele A și B, astfel încât $\overset{\frown}{AB} = 120^\circ$. Tangentele în A și B la cerc se intersectează în punctul T.

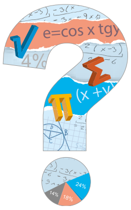
a) Determinați lungimea segmentului TO.

b) Dacă $AB \cap OT = \{D\}$, arătați că $TD = 3 \cdot DO$.

11 Tangentele AB și AC la cercul $\mathcal{C}(O, r)$ sunt perpendiculare, punctele B și C fiind pe cerc. Dreapta AO intersectează cercul în punctele D și E.

a) Calculați măsurile unghiurilor patrulaterului $BDCE$.

b) Demonstrați că tangentele în D, respectiv în E, la acest cerc, sunt paralele cu dreapta BC.



5.2 Poligoane regulate înscrise într-un cerc

Nevoia de frumos a omenirii s-a manifestat din cele mai vechi timpuri. În natură, întâlnim forme de o regularitate și frumusețe aparte. Să privim câteva imagini ilustrative:





Stilizat, remarcăm forma perfectă de cerc, împărțit în părți egale, în fiecare parte fiind adăugate detalii specifice, perfect simetrice.

Puțină istorie

Problema diviziunii cercului în părți egale (folosind rigla și compasul) era cunoscută din Antichitate. Pentru $n = 2^a$ (a fiind număr natural nenul), $n = 3$, $n = 5$ sau produs de două sau trei numere de această formă, erau cunoscute modalitățile de construcție.

Gauss, în lucrarea sa *Disquisitiones Arithmeticae* (1801), extinde posibilitatea împărțirii cercului în părți egale și în cazul unor numere de altă formă.

Karl Friedrich Gauß (Gauss) este cel care a construit, folosind numai rigla și compasul, un *poligon regulat* cu 17 laturi, o revelație a vremii.

Karl Friedrich Gauß

Ne amintim

Triunghiul echilateral are *toate laturile* și *toate unghiurile* congruente.
Pătratul are *toate laturile* și *toate unghiurile* congruente.
Ne întrebăm:

1) Există și alte poligoane, astfel încât să aibă toate laturile și toate unghiurile congruente?
2) Ce proprietăți comune au acestea?
3) Ce proprietăți specifice (proprietăți care le diferențiază) au acestea?

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

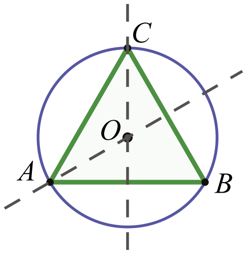
Definiția 1.
Poligonul convex care are *toate laturile congruente* și toate *unghiurile*, formate de două laturi alăturate, *congruente* se numește **poligon regulat**.

Exemple:
Poligonul regulat cu trei laturi este *triunghiul echilateral.*
Poligonul regulat cu patru laturi este *pătratul*.
Poligonul regulat cu cinci laturi se numește *pentagon regulat*.
Poligonul regulat cu șase laturi se numește *hexagon regulat*.

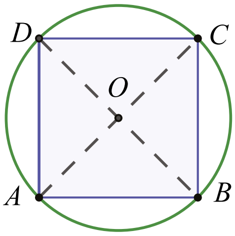
Definiția 2. Cercul care conține toate vârfurile unui poligon se numește **cercul circumscris** acestuia.

Definiția 3. Poligonul care are toate vârfurile pe un cerc se numește **poligon înscris** în acel cerc.

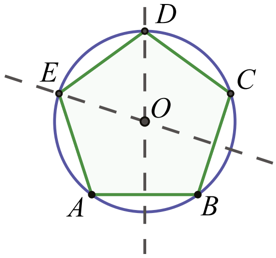
Să remarcăm, fără demonstrație, pentru moment, că orice poligon regulat poate fi înscris într-un cerc.
Exemple: Triunghiul echilateral, pătratul, pentagonul regulat, hexagonul regulat.



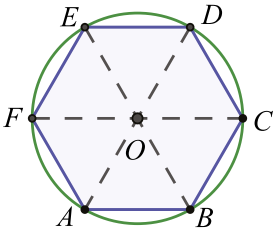
Triunghiul *ABC*
este înscris în cerc.



Pătratul *ABCD*
este înscris în cerc.



Pentagonul *ABCDE*
este înscris în cerc.



Hexagonul *ABCDEF*
este înscris în cerc.

Observând imaginile de mai sus, putem deduce:
1) Centrul cercului circumscris unui poligon regulat este intersecția mediatoarelor laturilor acestuia.
2) Centrul cercului circumscris unui poligon regulat este intersecția bisectoarelor unghiurilor acestuia.
3) Laturile unui poligon regulat sunt coarde ale cercului circumscris.
4) Vârfurile unui poligon regulat cu n laturi determină n arce congruente.
5) Fiecare unghi al unui poligon regulat cu n laturi este unghi înscris în cerc și subîntinde un arc format din $n - 2$ arce congruente.
6) Razele OA, OB, ... care conțin un vârf al unui poligon regulat, sunt bisectoare ale unghiurilor corespunzătoare acestora.

Temă de portofoliu

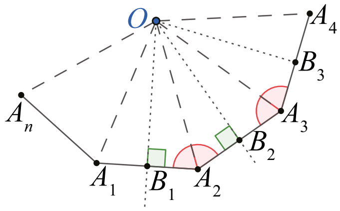
a) Observați poligoanele regulate din desenele de mai sus, copiați pe caiete tabelul următor și completați-l.

Poligonul	Triunghiul *ABC*	Pătratul *ABCD*	Pentagonul regulat *ABCDE*	Hexagonul regulat *ABCDEF*
laturile	*AB*, *BC*, *AC*		*AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EA*	
diagonalele	Nu are			*AC*, *AD*, *AE*, *BD*, *BE*, *BF*, *CE*, *CF*, *DF*
unghiurile		*ABC*, *BCD*, *CDA*, *DAC*		

b) Demonstrați că diagonalele și laturile unui poligon regulat cu n laturi, corespunzătoare aceluiași vârf, determină $n - 2$ unghiuri congruente, pentru $n = 4$, $n = 5$ și $n = 6$.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Teorema 1. Există un cerc care trece prin toate vârfurile unui poligon regulat cu n laturi.



Demonstrație:
Considerăm poligonul regulat $A_1A_2A_3A_4 \dots A_n$. Notăm mijloacele laturilor A_1A_2, A_2A_3 și A_3A_4 cu B_1, B_2, respectiv B_3.
Deoarece punctele A_1, A_2, A_3 sunt necoliniare, rezultă că există un punct O, centrul cercului circumscris triunghiului $A_1A_2A_3$, și anume intersecția mediatoarelor laturilor sale. Atunci, OB_1 este mediatoarea laturii A_1A_2, iar OB_2 este mediatoarea laturii A_2A_3.

Să arătăm că și mediatoarea laturii A_3A_4 trece prin punctul O. Triunghiurile OB_1A_2 și OB_2A_2 sunt dreptunghice, au latura comună OA_2, iar $B_1A_2 \equiv A_2B_2$ (jumătăți ale unor segmente congruente).

Folosind cazul I.C., rezultă $\Delta OB_1A_2 \equiv \Delta OB_2A_2$, de unde $\sphericalangle OA_2B_1 = \sphericalangle OA_2B_2 = \frac{1}{2} \sphericalangle A_1A_2A_3$.
Din congruența unghiurilor de la baza triunghiului isoscel OA_2A_3 obținem

$\sphericalangle OA_3B_2 = \sphericalangle OA_2B_2 = \frac{1}{2} \sphericalangle A_1A_2A_3 = \frac{1}{2} \sphericalangle A_2A_3A_4$, deci, semidreapta A_3O este bisectoarea $\sphericalangle A_2A_3A_4$.

Triunghiurile OA_3B_2 și OA_3B_3 au latura comună OA_3, $A_3B_2 \equiv A_3B_3$ (jumătăți de laturi congruente), iar $\sphericalangle OA_3B_2 = \sphericalangle OA_3B_3$ deoarece A_3O este bisectoare. Din cazul L.U.L. rezultă $\Delta OA_3B_2 \equiv \Delta OA_3B_3$.
Prin urmare $\sphericalangle OB_3A_3 = \sphericalangle OB_2A_3 = 90^\circ$ și $A_3B_2 = A_3B_3$ sunt jumătate din latura poligonului.
Am arătat că OB_3 este mediatoarea laturii A_3A_4, deci cercul cu centru în O, care trece prin A_1, A_2, A_3, va conține și punctul A_4.
Continuând raționamentul pentru mediatoarele celorlalte laturi ale poligonului, arătăm că toate vârfurile poligonului regulat se găsesc pe cercul de centru O și rază $R = OA_1$.
Observație: Demonstrația teoremei de mai sus este laborioasă, dar parcurgerea ei este un bun exercițiu de raționament logic.

Reținem!

- Poligonul convex care are toate laturile congruente și toate unghiurile formate de două laturi alăturate, congruente se numește poligon regulat.
- Fiecare semidreaptă cu originea într-un vârf al unui poligon regulat și care conține centrul O al cercului este bisectoarea unghiului poligonului, corespunzător acelui vârf.
- Suma măsurilor unghiurilor poligonului regulat cu n laturi este $(n - 2) \cdot 180^\circ$.
- Mediatoarele laturilor unui poligon regulat sunt concurente în centrul cercului circumscris acestuia.
- Unghiul format de două laturi alăturate ale unui poligon regulat cu n laturi are măsura de $\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Desenați un cerc de centru O și rază r. Fixați un punct A pe cerc. Luați în deschiderea compasului lungimea razei și marcați pe cerc, în această ordine, punctele A, B, C, D, E, F astfel încât $AB = BC = CD = DE = EF = r$. Demonstrați că:

a) $AF = r$;

b) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{FA}$;

c) triunghiul ACE și hexagonul $ABCDEF$ sunt poligoane regulate.

2 Desenați un cerc cu centrul în O, iar prin punctul O, desenați dreptele perpendiculare a și b. Dreapta a intersectează cercul în punctele A și C, iar dreapta b intersectează cercul în punctele B și D. Demonstrați că A, B, C, D sunt vârfurile unui poligon regulat.

3 Un triunghi echilateral are înălțimea de 9 cm. Calculați raza cercului circumscris triunghiului.

4 Vârfurile unui pătrat cu aria 144 cm^2 se află pe un cerc. Calculați lungimea diametrului cercului.

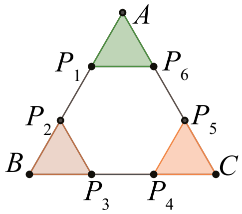
5 Vârfurile unui hexagon regulat, cu perimetrul 108 cm, se află pe un cerc. Calculați raza cercului.

6 Desenați un dreptunghi $ABCD$ în care $AB = 4$ cm și $\sphericalangle ABD = 60^\circ$.

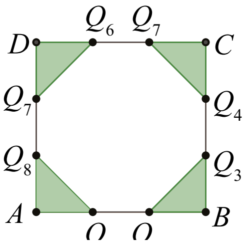
a) Demonstrați că există un cerc pe care se află vârfurile dreptunghiului. Determinați centrul și raza acestui cerc, apoi desenați-l.

b) Mediatoarea laturii AD intersectează cercul, desenat la subpunctul a), în punctele E, respectiv F. Demonstrați că A, B, C, D, E, F sunt vârfurile unui hexagon regulat.

7 Fie ABC triunghi echilateral. Fiecare latură a triunghiului este împărțită în trei părți congruente, ca în figura de mai jos. Decideți dacă poligonul obținut prin îndepărtarea colțurilor colorate este un poligon regulat.



8 Fiecare latură a pătratului $DEFG$ este împărțită în trei părți congruente, ca în figura de mai jos. Decideți dacă poligonul obținut prin îndepărtarea colțurilor colorate este un poligon regulat. Justificați răspunsul dat.



9 Se consideră triunghiurile echilaterale ABC, ACD, ADE, AEF, AFG, având interioarele disjuncte, două câte două.

a) Stabiliți dacă $BCDEFG$ este hexagon regulat. Justificați răspunsul dat.

b) Stabiliți natura patrulaterelor $ABCD$ și $EFGB$.

10 $MNPQRS$ este un hexagon regulat și $MP = 8\sqrt{3}$ cm. Calculați raza cerului circumscris hexagonului.

11 Pe laturile dreptunghiului $ABCD$ cu $AB = a$ cm, $BC = b$ cm, se construiesc în exterior pătrate.

a) Demonstrați că centrele acestor pătrate sunt vârfurile unui poligon regulat.

b) Calculați raza cercului circumscris acestui poligon.

12 În cercul $\mathcal{C}(O, r)$ este înscris un poligon regulat cu n laturi, $n \geq 3$, A_1A_2 fiind una dintre laturile poligonului. Calculați măsura arcului $\overset{\frown}{A_1A_2}$, pentru $n \in \{3, 4, 5, 6\}$.

13 În hexagonul regulat $MNPQRS$, punctele A, B, C și D sunt mijloacele laturilor MN, PQ, QR respectiv SM.

a) Calculați măsura unghiului format de dreptele AC și BD.

b) Stabiliți natura patrulaterului $ABCD$.

14 $ABCDEF$ este un hexagon regulat, înscris în cercul $\mathcal{C}(O, r)$. Tangentele la cerc, în punctele A și C, se intersectează în punctul T. Demonstrați că:

a) TAC este un poligon regulat;

b) $OB = BT$.

5.3 Lungimea cercului și aria discului

Pe un cerc de centru O și rază R, punem în evidență două puncte A și B. Ne întrebăm care este lungimea întregului cerc, adică a arcului $\overset{\frown}{ABA}$. Pe baza noțiunilor matematice parcurse până acum, nu vom putea demonstra formula, dar un mic experiment ne poate lămuri.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Pe marginea unei monede, marcăm un punct B. Rostogolim moneda, în linie dreaptă, pe o foaie de hârtie, apoi măsurăm segmentul cuprins între două atingeri consecutive ale punctului marcat, cu hârtia (B și B_2). Calculând raportul dintre lungimea obținută prin măsurare și lungimea diametrului monezii, se observă că acesta este cuprins între 3,1 și 3,2.
Repetând experimentul cu cercuri de diferite diametre, vom constata că acest raport are aceeași valoare, indiferent de raza cercului.
Această constantă se notează cu litera grecească π, citim „pi” și este prima literă a cuvântului grecesc „perimetros” care înseamnă perimetru. Este un număr irațional (are o infinitate de zecimale) cu valoarea aproximativă: $\pi = 3{,}1415926535\ldots$. În aplicații, de obicei folosim primele două zecimale, adică $\pi \approx 3{,}14$.
În concluzie, am obținut formula de calcul pentru lungimea cercului de rază R: $L_{\text{cerc}} = 2\cdot\pi\cdot R$
Ea corespunde lungimii cercului întreg, deci a unui arc de cerc cu măsura de 360°.
Pentru un arc oarecare $\overset{\frown}{AB}$ al cercului $\mathcal{C}(O, R)$, lungimea este direct proporțională cu măsura arcului, adică:

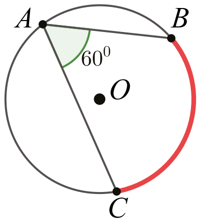
$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{L_{\overset{\frown}{AB}}} = \frac{360^\circ}{2\cdot\pi\cdot R}.$$

Dacă sunt date două puncte A și B pe un cerc și dorim să calculăm lungimile arcelor determinate de acestea, atunci:

– lungimea arcului mic $\overset{\frown}{AB}$ al cercului $\mathcal{C}(O, R)$ este $L_{\overset{\frown}{AB}} = \dfrac{\pi\cdot R\cdot \overset{\frown}{AB}}{180^\circ} = \dfrac{\pi\cdot R\cdot \sphericalangle AOB}{180^\circ}$;

– lungimea arcului mare $\overset{\frown}{AB}$ al cercului $\mathcal{C}(O, R)$ este

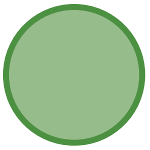
$$L_{\overset{\frown}{AB}} = 2\cdot\pi\cdot R - \frac{\pi\cdot R\cdot \overset{\frown}{AB}}{180^\circ} = \frac{\pi\cdot R\cdot(360^\circ - \overset{\frown}{AB})}{180^\circ} = \frac{\pi\cdot R\cdot(360^\circ - \sphericalangle AOB)}{180^\circ}.$$



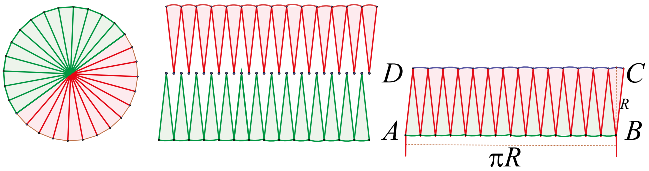
Exemplu: Să calculăm lungimea arcului de cerc din $\mathcal{C}(O, R)$ cuprins în interiorul unui unghi înscris în cerc, cu măsura de 60°. Unghiul BAC este înscris în cerc și $\sphericalangle BAC = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$, deci $\overset{\frown}{BC} = 2 \cdot 60° = 120°$. Din $\dfrac{\overset{\frown}{BC}}{L_{\overset{\frown}{BC}}} = \dfrac{120^\circ}{L_{\overset{\frown}{BC}}} = \dfrac{360^\circ}{2\cdot\pi\cdot R}$ se obține $L_{\overset{\frown}{BC}} = \dfrac{2\cdot\pi\cdot R}{3}$.

Observație: Calculul lungimii unui arc de cerc se poate face și utilizând regula de trei simplă pentru cele două mărimi direct proporționale: măsura arcului de cerc și lungimea arcului aceluiași cerc.

Definiția 1. Se numește **disc** de centru O și rază R mulțimea tuturor punctelor situate în interiorul cercului $\mathcal{C}(O, R)$ sau pe acest cerc.



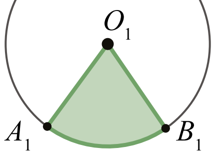
Aria discului mărginit de cerc se calculează cu o formulă a cărei demonstrație depășește cunoștințele învățate în clasele elementare. Vom face o estimare a ariei discului, prin împărțirea cercului în $2n$ sectoare (părți, felii) egale, prin unghiuri la centru congruente. Alegem o valoare rezonabilă, $2n = 28$, unghiurile la centru având aceeași măsură. Colorăm diferit cele două semicercuri delimitate de un diametru și le desfășurăm de-a lungul unei drepte, „bazele” sectoarelor fiind orientate diferit (vezi figura de mai jos). Apoi, cele două figuri se întrepătrund, obținând „aproape” un paralelogram (când n este foarte mare figura se apropie foarte mult de un dreptunghi) cu o latură egală cu jumătate din lungimea cercului, adică $\pi \cdot R$, iar înălțimea se apropie de valoarea R. Atunci, aria paralelogramului este *aproximativ egală* cu valoarea $\pi \cdot R^2$.

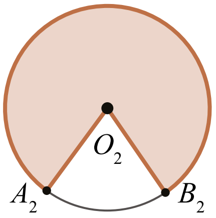


Am găsit formula de calcul pentru aria discului:
$\mathcal{A} = \pi \cdot R^2$.

Definiția 2. Figura geometrică delimitată de două raze OA și OB ale aceluiași cerc $\mathcal{C}(O, R)$, împreună cu arcul de cerc cu capetele A și B se numește **sector de cerc**.

În primul cerc, este reprezentat un sector de cerc delimitat de razele O_1A_1 și O_1B_1 cu arcul mic $\overset{\frown}{A_1B_1}$, iar în al doilea cerc este reprezentat sectorul de cerc determinat de razele și O_2A_2 și O_2B_2 cu arcul mare $\overset{\frown}{A_2B_2}$.
Aria sectorului de cerc este direct proporțională cu măsura arcului de cerc corespunzător.





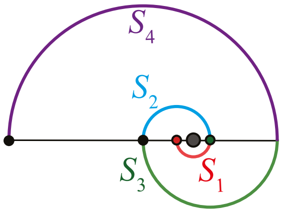
Pentru sectorul mărginit de arcul mic $\overset{\frown}{A_1B_1}$, din $\dfrac{\overset{\frown}{A_1B_1}}{\mathcal{A}_{A_1O_1B_1}} = \dfrac{360^\circ}{\pi \cdot R^2}$ se obține $\mathcal{A}_{A_1O_1B_1} = \dfrac{\pi \cdot R^2 \cdot \overset{\frown}{A_1B_1}}{360^\circ}$.

Pentru sectorul mărginit de arcul mare $\overset{\frown}{A_2B_2}$ avem $\mathcal{A}_{A_2O_2B_2} = \pi \cdot R^2 - \dfrac{\pi \cdot R^2 \cdot \overset{\frown}{A_2B_2}}{360^\circ}$, în formulă fiind vorba de arcul mic $\overset{\frown}{A_2B_2}$.

Observație: Calculul ariei unui sector de cerc se poate face și utilizând regula de trei simplă pentru cele două mărimi direct proporționale: măsura arcului de cerc și aria sectorului de cerc corespunzător acelui arc.

Aplicația 1: Formăm o spirală din patru semicercuri cu razele 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, ca în figura alăturată. Calculați lungimea acestei spirale.

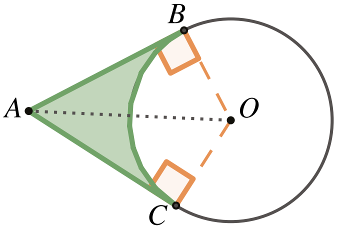
Soluție: Am format spirala din semicercul roșu de rază 1, semicercul albastru de rază 2, semicercul verde de rază 4 și semicercul violet de rază 8. Lungimea spiralei este $L = \pi + 2 \cdot \pi + 4 \cdot \pi + 8 \cdot \pi = 15 \cdot \pi$.



Aplicația 2: Fie cercul $\mathcal{C}(O, R)$, și A un punct exterior acestuia. Tangentele din punctul A la cerc formează un unghi cu măsura de 60°. Calculați aria suprafeței mărginite de tangente și arcul mic de cerc $\overset{\frown}{BC}$, unde B și C sunt punctele de tangență.

Soluție: Vom afla aria cerută scăzând din aria patrulaterului $ABOC$, aria sectorului de cerc mărginit de arcul mic $\overset{\frown}{BC}$. Deoarece $AB \equiv AC$, $BO \equiv CO$, triunghiurile dreptunghice ΔAOB și ΔAOC sunt congruente. Rezultă că AO este bisectoarea $\sphericalangle BAC$ și $\mathcal{A}_{ABOC} = 2 \cdot \mathcal{A}_{ABO}$.
În triunghiul AOB, cateta OB se opune unghiului de 30°, adică $AO = 2 \cdot OB = 2 \cdot R$, iar $AB = R\sqrt{3}$.

$$\mathcal{A}_{ABOC} = 2 \cdot \mathcal{A}_{ABO} = 2 \cdot \frac{AB \cdot BO}{2} = R^2\sqrt{3}.$$



În patrulaterul $ABOC$, măsura unghiului BOC este $\sphericalangle BOC = 360° - \sphericalangle ABO - \sphericalangle ACO - \sphericalangle BAC = 120°$. Dar unghiul BOC este unghi la centru, deci arcul mic $\overset{\frown}{BC}$ are măsura 120°. Aria sectorului de cerc, mărginit de arcul mic $\overset{\frown}{BC}$ este $\mathcal{A}_S = \dfrac{\pi \cdot R^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} = \dfrac{\pi \cdot R^2}{3}$, apoi aria suprafeței cerute este $\mathcal{A} = R^2\sqrt{3} - \dfrac{\pi \cdot R^2}{3} = R^2\left(\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Reținem!

- Pentru a calcula lungimea unui cerc de rază R, folosim formula: $L_{\text{cerc}} = 2 \cdot \pi \cdot R$.
- Într-un cerc $\mathcal{C}(O, R)$, lungimea unui arc de cerc este direct proporțională cu măsura acelui arc.
- Pentru a calcula aria unui disc de rază R, folosim formula: $\mathcal{A}_{\text{disc}} = \pi \cdot R^2$.
- Într-un cerc $\mathcal{C}(O, R)$, aria unui sector de cerc este direct proporțională cu măsura arcului de cerc corespunzător.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Pregătiți: un compas, o riglă gradată, o sfoară sau un șnur (care nu este elastic), cu lungimea mai mare de 35 cm și o foarfecă. Desenați un cerc cu raza $r = 5$ cm. Marcați un punct A pe cerc. Fixați un capăt al șnurului în punctul A, apoi suprapuneți șnurul, perfect întins, peste cerc, până ajungeți din nou în punctul A. Tăiați din șnur partea rămasă. Măsurați lungimea șnurului obținut prin suprapunere și comparați rezultatul cu numărul 10π, folosind aproximarea $\pi \approx 3{,}14$.

2 Calculați, folosind formula, lungimea cercului care are raza:

a) 5 cm; b) 7,5 cm; c) $\dfrac{10}{\pi}$ cm.

3 Aflați lungimea diametrului unui cerc, știind că lungimea cercului este:

a) 14π cm; b) 5 dm.

4 Aflați aria unui disc știind că are raza de:

a) 6 cm; b) $\dfrac{9}{2}$ cm; c) π cm.

5 Aria unui disc este $4{,}84\ \pi$ cm². Aflați diametrul discului.

6 Lungimea unui cerc este $36\ \pi$ cm. Calculați aria discului mărginit de acest cerc.

7 Numerele reale A și l reprezintă aria unui disc, exprimată în cm², respectiv lungimea cercului care determină discul, exprimată în centimetri. Știind că $\dfrac{A}{l} = \dfrac{5}{2}$, aflați numerele A și l.

8 Se consideră cercurile $\mathcal{C}_1(O, r_1)$ și $\mathcal{C}_2(O, r_2)$ cu $r_1 = 17$ cm și $r_2 = 21$ cm.

a) Aflați cu cât este mai mare lungimea cercului $\mathcal{C}_2$ decât lungimea cercului $\mathcal{C}_1$.

b) Calculați aria suprafeței cuprinse între cele două cercuri.

9 Punctele A, B, C sunt situate pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$, astfel încât $\overset{\frown}{AB} = 120°$, iar C este mijlocul arcului mare $\overset{\frown}{AB}$. Dacă $AD \perp BC$, $D \in BC$ și $AD = 18$ cm, calculați lungimea cercului dat.

10 Pătratul $EFGH$ are vârfurile pe un cerc $\mathcal{C}(O, r)$, iar distanța de la centrul cercului la una dintre laturi este $4\sqrt{2}$ cm. Calculați raza și lungimea cercului în care este înscris pătratul $EFGH$, apoi calculați aria discului mărginit de acest cerc.

11 Dreptunghiul $ABCD$ este înscris într-un cerc de centru O și $AC = 2 \cdot BC$.

a) Demonstrați că O este punctul în care se intersectează diagonalele dreptunghiului;

b) Știind că aria triunghiului AOD este $4\sqrt{3}$ cm², calculați lungimea cercului și aria discului delimitat de acest cerc.

12 Fie A, B, C puncte ale cercului $\mathcal{C}(O,r)$, astfel încât $\overset{\frown}{AC}$ este un semicerc, iar $\overset{\frown}{AB} = 120°$. Știind că $BC = 16$ cm, calculați aria discului de centru O și rază r.

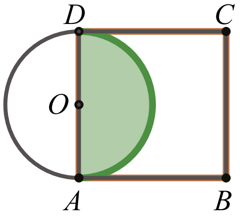
13 Segmentele AB și BC sunt coarde perpendiculare ale cercului $\mathcal{C}(O,r)$, iar $AB = BC = \sqrt{2}$ m. Calculați lungimea cercului.

14 Se consideră punctele coliniare A, B, C, D, în această ordine, astfel încât $AB = BC - 1 = CD - 2 = 3$, lungimile fiind exprimate în centimetri. Fie l_1, l_2, l_3 lungimile cercurilor de diametre AB, BC respectiv CD. Calculați numărul $a = \dfrac{l_1}{l_2 + l_3} + \dfrac{l_2}{l_3 + l_1} + \dfrac{l_3}{l_1 + l_2}$.

15 În figura alăturată, este reprezentată o suprafață formată cu ajutorul pătratului $ABCD$ și al cercului $\mathcal{C}(O,r)$. Suprafața colorată are aria 8π cm^2.

a) Calculați lungimea cercului și aria pătratului;

b) Determinați aria suprafeței formate din punctele situate în interiorul pătratului dar care nu aparțin suprafeței colorate



16 În triunghiul ABC, se știe că $\sphericalangle A = 60^\circ$, $AB = x$, $AC = 2x$.

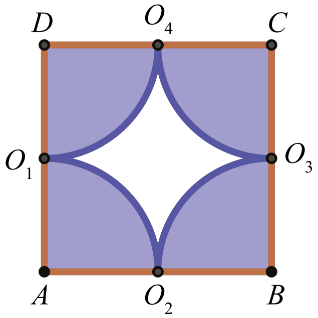
a) Exprimați, în funcție de x, raza cercului circumscris triunghiului ABC;

b) Folosind rezultatul obținut la subpunctul a), calculați lungimea cercului circumscris triunghiului ABC și aria discului determinat de acesta.

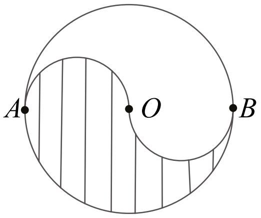
17 Suprafața pătratică maximă care se poate decupa dintr-un disc are aria de 32 cm^2. Determinați aria discului.

18 O brățară are forma unui cerc de rază 4 cm. Pentru a o micșora, bijutierul scoate arcul de cerc AB cu măsura de 90°, unind apoi capetele A și B astfel încât să obțină un nou cerc. Determinați lungimea acestui cerc și aria discului cu aceeași rază.

19 Figura de mai jos reprezintă schița unui rondou ornamental. Pe suprafața hașurată se vor planta flori, iar în rest se va pune gazon. Știind că $ABCD$ este pătrat iar arcele $\overset{\frown}{O_1O_2}$, $\overset{\frown}{O_2O_3}$, $\overset{\frown}{O_3O_4}$, $\overset{\frown}{O_4O_1}$ provin din cercurile de centre A, B, C respectiv D și au raze de aceeși lungime, stabiliți dacă este mai mare suprafața pe care se plantează flori decât cea cu gazon.

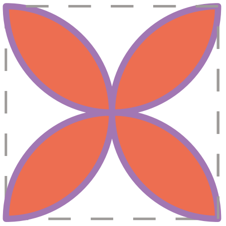


20 De o parte și de alta a diametrului AB din cercul de centru O și rază $R = 6$ cm se construiesc semicercurile de diametre OA respectiv OB.

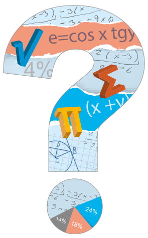


Determinați aria și suma lungimilor arcelor care mărginesc porțiunea hașurată.

21 În interiorul pătratului de latură 8 cm, cu centrul în mijlocul fiecărei laturi, se construiesc semicercuri, obținându-se o floare.



Găsiți lungimea totală a arcelor ce formează floarea și aria florii.



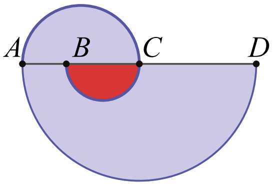
Evaluare sumativă

Se acordă 10 puncte din oficiu.

I. *La cerințele următoare alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.*

5p	**1.** Lungimea unui cerc este π cm. Diametrul cercului are lungimea: A. 2 cm B. 0,5 cm C. 1 cm D. 1,5 cm
5p	**2.** Cercul cu raza $\sqrt{2}$ dm are aria: A. 2π dm^2 B. $\sqrt{2}\,\pi$ dm^2 C. π dm^2 D. $2\sqrt{2}\,\pi$ dm^2
5p	**3.** Triunghiul echilateral ABC are vârfurile pe un cerc cu raza 15 cm. Lungimea arcului $\overset{\frown}{AB}$ este: A. 5π cm B. 10π cm C. 15π cm D. 20π cm
5p	**4.** Un sector de cerc are aria o optime din aria discului din care provine. Măsura unghiului la centru este: A. 90° B. 60° C. 35° D. 45°
5p	**5.** Pătratul $ABCD$ este înscris într-un cerc cu raza 20 cm, iar punctul P este mijlocul arcului mic $\overset{\frown}{AB}$. Lungimea arcului $\overset{\frown}{PC}$ este: A. 10π cm B. 15π cm C. 20π cm D. 40π cm
	6. Poligonul regulat $A_1A_2 \ldots A_n$ este înscris într-un cerc, $n \geq 3$.
5p	a) Pentru $n = 3$, măsura arcului $\overset{\frown}{A_1A_2A_3}$ este: A. 60° B. 90° C. 120° D. 240°
5p	b) Pentru $n = 4$, măsura arcului $\overset{\frown}{A_2A_3A_4}$ este: A. 90° B. 120° C. 180° D. 240°
5p	c) Pentru $n = 6$, măsura arcului $\overset{\frown}{A_3A_4A_5}$ este: A. 240° B. 120° C. 180° D. 90°

II. *La problemele următoare se cer rezolvări complete.*

	1. Punctele A, B, C, D sunt coliniare, $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm, $CD = 8$ cm iar $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{AD}$ sunt semicercuri (ca în figură). 
5p	a) Realizați pe caiete cu ajutorul instrumentelor de geometrie, un desen care să corespundă datelor problemei.
5p	b) Calculați aria suprafeței colorate.
5p	c) Calculați aria suprafeței colorate cu albastru.
10p	d) Calculați lungimea spiralei $BCAD$.
10p	**2.** În exteriorul pătratului $ABCD$ se construiesc triunghiurile echilaterale MAB, NBC, PCD, QDA. Demonstrați că $MNPQ$ este poligon regulat.
	3. În exteriorul triunghiului echilateral MNP se construiesc pătratele $MNBA$, $NPDC$, $PMFE$.
5p	a) Calculați măsurile unghiurilor poligonului $ABCDEF$.
10p	b) Stabiliți dacă $ABCDEF$ este poligon regulat. Justificați răspunsul dat.

6 Asemănarea triunghiurilor

Competențe specifice:

1.6 **2.6** **3.6** **4.6** **5.6** **6.6**

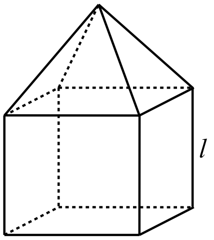
6.1 Segmente proporționale. Teorema paralelelor echidistante

L1 Segmente proporționale

Ne amintim

1) Numerele reale $a_1, a_2, \dots, a_n$ sunt *direct proporționale* (sau simplu, *proporționale*) cu numerele reale $b_1, b_2, \dots, b_n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, dacă $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots\ldots = \frac{a_n}{b_n} = k$.
   Valoarea k a rapoartelor egale se numește *factor de proporționalitate* sau *raport de proporționalitate*.
2) Centrul de greutate al unui triunghi se află pe fiecare mediană, la două treimi de vârf și o treime de latura opusă acelui vârf.

Rezolvăm și observăm



Problemă. Tudor dorește să construiască o căsuță pentru păsări, având scheletul din șipci de lemn, ca în figura alăturată, toate șipcile având lungimi egale. El vrea să afle cea mai mare lungime l, exprimată printr-un număr întreg de centimetri, a fiecăreia dintre cele 16 șipci necesare, știind că are la dispoziție o șipcă de lemn lungă de 3 m.

Soluție: El știe că numărul 16 al șipcilor se poate obține împărțind lungimea totală L a materialului folosit, la lungimea maximă l, a unei șipci, adică $16 = \frac{L}{l}$. Tudor procedează astfel: exprimă lungimea materialului pe care-l are la dispoziție 3 m = 300 cm.

Avem $300 = 16 \cdot 18 + 12$, deci câtul împărțirii este 18. Așadar, fiecare șipcă trebuie să aibă 18 cm.

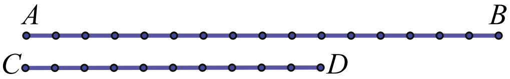
Comentariu: Din cei 300 cm de material, Tudor va folosi 288 cm.

Numărul șipcilor pe care le va folosi Tudor reprezintă **raportul a două lungimi de segmente**, exprimate în **aceeași unitate de măsură**, și anume lungimea totală a materialului folosit și lungimea unei șipci.

Definiția 1: Raportul a două segmente este raportul lungimilor acestora, exprimate în aceeași unitate de măsură.

Aplicația 1: Calculați raportul dintre segmentele AB și CD, știind că măsurând AB și CD cu aceeași unitate de măsură, AB are 16 unități, iar CD are 10 unități.

Raportul segmentelor AB și CD este $\frac{AB}{CD} = \frac{16}{10} = 1{,}6$.



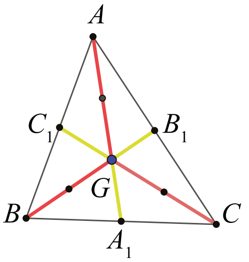
Aplicația 2: Calculați raportul, cu o zecimală exactă, dintre dimensiunile unui card bancar, știind că lungimea dreptunghiului care delimitează cardul este aproximativ 8,6 cm, iar lățimea acestuia este 5,4 cm.

Soluție: $\frac{AB}{CD} = \frac{8{,}6}{5{,}4} = 1{,}6\ldots$. Acest număr se apropie, de fapt, de numărul irațional $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180\ldots$, celebrul „raport de aur”, care dă echilibru și armonie imaginilor, regăsindu-se în natură, în pictură, în sculptură, pe întregul glob terestru.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Definiția 2: Spunem că segmentele A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, … , A_nB_n sunt proporționale cu segmentele C_1D_1, C_2D_2, C_3D_3, … , C_nD_n, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, cu raportul de proporționalitate k, dacă lungimile lor sunt proporționale, cu factorul de proporționalitate k. Scriem: $\frac{A_1B_1}{C_1D_1} = \frac{A_2B_2}{C_2D_2} = \frac{A_3B_3}{C_3D_3} = \ldots = \frac{A_nB_n}{C_nD_n} = k$.

Exemplu: Segmentele determinate de vârfurile unui triunghi ABC cu centrul de greutate G sunt proporționale cu segmentele determinate de centrul de greutate și mijloacele laturilor, A_1, B_1 respectiv C_1. Să aflăm raportul de proporționalitate.



Soluție: Segmentele AA_1, BB_1, CC_1 sunt mediane și G este centru de greutate.

Atunci, $G \in AA_1$ și $AG = \frac{2}{3}AA_1$, $GA_1 = \frac{1}{3}AA_1$. Analog, pentru celelalte două mediane.

Obținem $\frac{AG}{GA_1} = \frac{\frac{2}{3}AA_1}{\frac{1}{3}AA_1} = 2$ și analoagele, deci $\frac{AG}{GA_1} = \frac{BG}{GB_1} = \frac{CG}{GC_1} = 2$. Raportul de proporționalitate este $k = 2$.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Pentru oricare două segmente se poate determina raportul lor (raportul lungimilor acestora, exprimate în aceeași unitate de măsură), care este un număr real, pozitiv. Apare, în mod firesc, întrebarea: Pentru un număr real pozitiv k și un segment AB, putem găsi un punct C coliniar cu A și cu B astfel încât raportul segmentelor AC și BC să fie k?

Propoziția 1. Pentru orice număr real pozitiv k există un unic punct C, pe segmentul AB, astfel încât $\frac{AC}{BC} = k$. Vom spune că **punctul *C* împarte segmentul *AB* în raportul *k*.**

Demonstrație: Din $\frac{AC}{BC} = k$ deducem $\frac{AC}{AC+BC} = \frac{k}{k+1}$ sau $AC = \frac{k}{k+1} \cdot AB$

Cum $\frac{k}{k+1} < 1$ pentru orice k număr real pozitiv, obținem că C aparține segmentului AB. În plus, există un singur punct C pe segmentul AB, situat la distanța $\frac{k}{k+1} \cdot AB$ de punctul A. În particular, pentru $k = 1$, punctul C este mijlocul segmentului AB.

Propoziția 2. Pentru orice număr real pozitiv $k \neq 1$ există un unic punct C, exterior segmentului AB, astfel încât $\frac{AC}{BC} = k$.

Demonstrație: Sunt posibile următoarele cazuri:

1) Pentru $k > 1$, $AC > BC$ și C este exterior segmentului AB, ceea ce este posibil doar dacă punctele sunt dispuse în ordinea $A–B–C$.

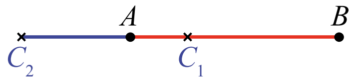
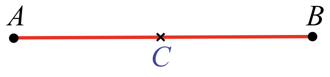
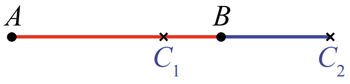
Relația $\frac{AC}{BC} = k$ este echivalentă cu $\frac{AC-BC}{BC} = \frac{k-1}{1}$ sau $BC = \frac{1}{k-1} \cdot AB$.

Punctul C este situat pe semidreapta opusă semidreptei BA, la distanța $\frac{1}{k-1} \cdot AB$ de punctul B.

2) Pentru $0 < k < 1$, avem $AC < BC$ și C este exterior segmentului AB, ceea ce este posibil doar dacă punctele sunt dispuse în ordinea $C–A–B$.

În ambele propoziții, unicitatea punctului C rezultă din construcția acestuia.

Concluzie: Pentru orice k, număr real pozitiv $k \neq 1$, există două puncte C_1 și C_2, coliniare cu A și B, unul în interiorul segmentului AB, celălalt în exteriorul său, care împart segmentul AB în raportul k. Pentru $k = 1$, există un singur punct C, mijlocul segmentului AB.

$k < 1$	$k = 1$	$k > 1$
		

Aplicația 3: Între două localități A și B, legate de un drum în linie dreaptă cu lungimea de 24,5 km, se află un punct de lucru P, raportul distanțelor PA și PB fiind 0,75. Determinați distanțele de la punctul de lucru la cele două localități.

Soluție: Din ipoteză, avem două relații și anume $PA + PB = 24{,}5$ și $\frac{PA}{PB}=\frac{3}{4}$.

Cu ajutorul proporțiilor derivate deducem $\frac{PA}{PA+PB}=\frac{3}{3+4}$ sau $\frac{PA}{24{,}5}=\frac{3}{7}$, de unde $PA = 10{,}5$ și $PB = 14$.

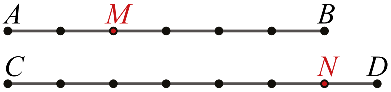
Distanțele de la punctul de lucru la cele două localități sunt 10,5 km, respectiv 14 km.

Reținem!

- Raportul a două segmente este raportul lungimilor acestora, exprimate în aceeași unitate de măsură.
- Pentru orice k, număr real pozitiv ($k \neq 1$), există două puncte C_1 și C_2, coliniare cu A și B, unul în interiorul segmentului AB, celălalt în exteriorul său, care împart segmentul AB în raportul k.
- Singurul punct care împarte un segment în raportul $k = 1$ este mijlocul segmentului.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Observați desenele de mai jos, apoi determinați valoarea fiecăruia dintre rapoartele:
$\frac{AM}{AB}, \frac{MB}{AM}, \frac{CN}{CD}, \frac{NC}{ND}$.

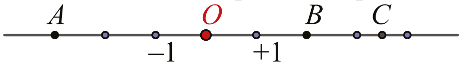


2 Determinați valoarea raportului segmentelor AB și CD, în următoarele cazuri:
a) $AB = 25$ mm, $CD = 15$ mm;
b) $AB = 0{,}17$ m, $CD = 510$ mm.

3 Punctele $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$, în această ordine, împart segmentul PQ în 11 segmente congruente.
Calculați valoarea fiecăruia dintre rapoartele:
$\frac{PA_1}{PQ}, \frac{PQ}{A_5A_6}, \frac{A_3A_7}{A_2A_9}$.

4 Desenați segmentul CD cu lungimea de 6 cm. Punctul E este situat pe dreapta CD.
Determinați lungimile segmentelor EC și ED, apoi rapoartele $\frac{EC}{CD}$ și $\frac{ED}{CD}$ pentru fiecare dintre situațiile:
a) E este interior segmentului CD și $EC = 2ED$;
b) E nu aparține segmentului CD și $CE = 9$ cm.

5 Pe axa numerelor cu originea O și cu unitatea de măsură 1 cm, sunt reprezentate punctele A, B și C.



a) Calculați lungimile segmentelor AO, BO, BC.
b) Calculați rapoartele: $\frac{AO}{BO}, \frac{AO}{CO}, \frac{BO}{AC}, \frac{AB}{BC}$.

6 Punctele D și E sunt mijloacele laturilor AB, respectiv AC ale triunghiului ABC. Calculați rapoartele: $\frac{AD}{DB}, \frac{EC}{AC}, \frac{P_{ADE}}{P_{ABC}}$.

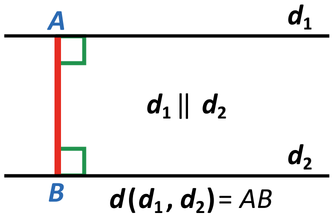
7 În interiorul segmentului MN cu lungimea de 14 cm, se consideră punctul C, astfel încât $\frac{CM}{CN}=\frac{2}{5}$. Calculați lungimile segmentelor CM și CN.

8 În interiorul segmentului AB cu lungimea de 84 mm, se consideră punctul C, astfel încât $7 \cdot AC = 4 \cdot AB$. Aflați lungimea segmentului BC, apoi calculați valoarea raportului $\frac{BC}{AC}$.

9 Pe dreapta d, se consideră punctele A, B, C astfel încât $AB = 15$ cm și $\frac{AC}{BC}=\frac{2}{3}$.
a) Calculați lungimile segmentelor AC și BC.
b) Stabiliți ordinea de reprezentare a punctelor pe dreapta d.

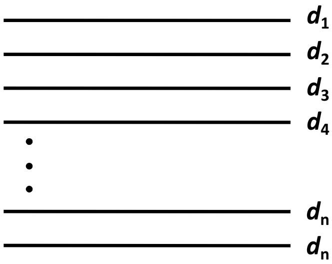
L2 Teorema paralelelor echidistante

Definiția 1. Se numește distanța dintre două drepte paralele d_1 și d_2 lungimea segmentului AB, unde $A \in d_1$ și $B \in d_2$, iar $AB \perp d_1$.
Notăm distanța dintre dreptele paralele d_1 și d_2 cu $d(d_1, d_2)$



Observație: Distanța dintre două drepte paralele este egală cu distanța de la un punct oarecare al uneia dintre ele la cealaltă dreaptă.
Folosind notațiile din desen, $d(d_1, d_2) = d(A, d_2) = d(B, d_1) = AB$.

Definiția 2. Șirul de drepte diferite, paralele între ele, $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel \ldots \parallel d_n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, se numesc **paralele echidistante** dacă $d(d_1, d_2) = d(d_2, d_3) =$ $= d(d_3, d_4) = \ldots = d(d_{n-1}, d_n)$.

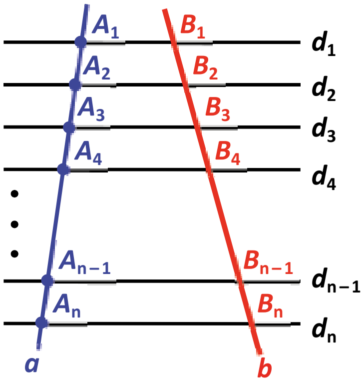


Exemplu: O scară pe care o folosesc pompierii în intervenții are treptele situate pe drepte paralele, între oricare două trepte consecutive fiind aceeași distanță.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Teorema paralelelor echidistante
Mai multe drepte paralele și echidistante determină, pe orice secantă, segmente congruente.

Detaliind, înțelegem că dacă dreptele paralele $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel \ldots \parallel d_n$ determină pe o secantă segmente congruente, atunci aceste drepte vor determina pe orice secantă segmente congruente.

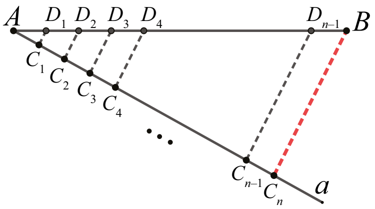


Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

O aplicație practică folosită frecvent a teoremei paralelelor echidistante este împărțirea ***unui segment*** în ***n părți cu aceeași lungime*** ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$).

Aplicație: Determinați, folosind doar rigla și compasul, punctele $D_1, D_2, \ldots, D_n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, situate pe segmentul AB, astfel încât $AD_1 = D_1D_2 = D_2D_3 = \ldots = D_{n-2}D_{n-1} = D_{n-1}B$.
Soluție: Vom urma pașii:

1) Pe o semidreaptă a, cu originea A, construim, folosind compasul, n segmente congruente $AC_1 \equiv C_1C_2 \equiv C_2C_3 \equiv \ldots \equiv C_{n-1}C_n$.
2) Trasăm dreapta C_nB
3) Prin fiecare dintre punctele $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$, trasăm câte o paralelă la C_nB, care taie segmentul AB în $D_1, D_2, \ldots, D_{n-1}$. Punctele obținute împart segmentul AB în n segmente (părți) cu aceeași lungime,
$$AD_1 \equiv D_1D_2 \equiv D_2D_3 \equiv \ldots \equiv D_{n-2}D_{n-1} \equiv D_{n-1}B = \frac{AB}{n},$$ deoarece, pe secanta a paralelele formează segmente congruente.

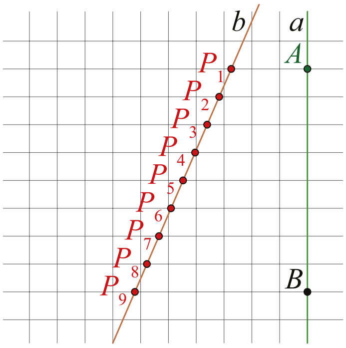


Reținem!

Mai multe drepte paralele și echidistante determină, pe orice secantă, segmente congruente.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Pe o foaie de matematică, desenăm o dreaptă b. Liniile orizontale ale foii de matematică intersectează dreapta b în punctele $P_1, P_2, \dots, P_9$ (vezi figura de mai jos).

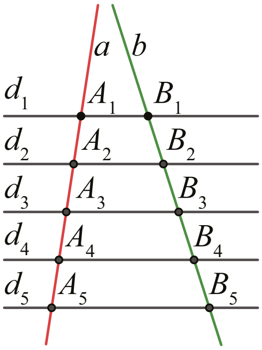


a) Demonstrați că $P_1P_2 \equiv P_2P_3 \equiv \dots \equiv P_8P_9$.

b) Stabiliți dacă P_5 este mijlocul segmentului P_1P_9.

c) Știind că $P_2P_8 = 5{,}4$ cm, calculați lungimea segmentului P_3P_7, apoi calculați raportul $\dfrac{P_1P_3}{P_3P_5}$.

2 Dreptele a și b intersectează dreptele paralele d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 în punctele A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 respectiv B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 (vezi figura de mai jos).



Se știe că $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$ și $B_1B_3 = $ 5,6 cm.
Calculați lungimile segmentelor B_1B_2, B_1B_5, B_2B_5.

3 Pe o semidreaptă cu originea O, se reprezintă punctele A, B, C astfel încât $OA = 1$ cm, $OB = 2$ cm, $OC = 3$ cm. Patru drepte paralele construite prin punctele O, A, B, C intersectează o dreaptă oarecare d în punctele M, N, P, respectiv Q.

a) Calculați lungimile segmentelor AB și BC.

b) Arătați că punctul P este mijlocul segmentului NQ.

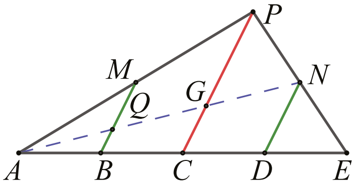
c) Pentru $NP = 2{,}8$ cm, calculați $4 \cdot MQ$.

4 Pe segmentul CD cu lungimea de 7 cm, reprezentați punctele P_1, P_2, P_3, P_4 astfel încât segmentele $CP_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4D$ să fie congruente.

5 Desenați un paralelogram $ABCD$ și punctele E, F pe latura AB astfel încât $AE = EF = FB$. Dreptele paralele prin E, respectiv F, la dreapta AC intersectează dreapta BC în punctele M, respectiv N. Demonstrați că $MN = \dfrac{1}{3} \cdot AD$.

6 În trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, linia mijlocie MN ($M \in AD$ și $N \in BC$) intersectează diagonala BD în punctul P, iar $PQ \parallel BM$, $Q \in AD$. Demonstrați că $AM = 2 \cdot DQ$.

7 Punctele A, B, C, D, E sunt coliniare, în această ordine, și $AB = BC = CD = DE$, iar P este un punct exterior dreptei AB. Paralela prin punctul B la dreapta PC intersectează dreapta AP în M, iar paralela prin punctul D la dreapta PC intersectează dreapta PE în N.



a) Demonstrați că AN este mediană a triunghiului AEP.

b) Dacă $BM \cap AN = \{Q\}$ și $PC \cap AN = \{G\}$ demonstrați că $AQ = QG = GN$.

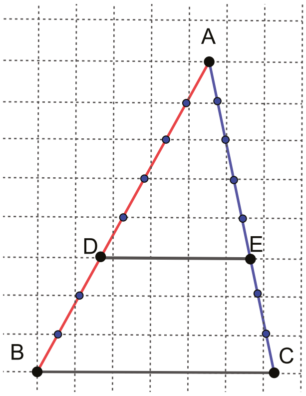
c) Demonstrați că dreptele AN, EM și PC sunt concurente.

6.2 Teorema lui Thales. Reciproca teoremei lui Thales. Împărțirea unui segment în părți proporționale cu numere date

L1 Teorema lui Thales

Ne amintim

1) Distanța dintre două drepte paralele este distanța de la un punct oarecare al uneia dintre ele la cealaltă dreaptă.
2) Mai multe drepte paralele sunt echidistante dacă distanța între oricare două drepte „vecine” este aceeași.



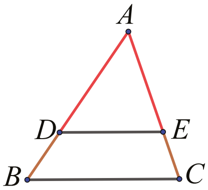
Exemplu: Rețeaua de pătrate a unei pagini din caietul de matematică ne permite să considerăm liniile orizontale ca fiind drepte paralele echidistante.
Desenăm un triunghi ABC astfel încât A să aparțină unei drepte orizontale, iar B și C să aparțină, ambele, altei drepte orizontale.
O a treia dreaptă orizontală intersectează laturile AB și AC în D respectiv în E.
Rețeaua de linii orizontale ale paginii caietului determină pe segmentele AD și AE același număr p de segmente congruente. La fel se întâmplă și cu segmentele DB și EC, care sunt împărțite de rețeaua orizontală, fiecare, în q segmente congruente.
Lungimea fiecărui segment determinat pe AB de rețeaua de linii orizontale este aceeași; o vom nota cu u. Atunci, $AD = p \cdot u$, iar $DB = q \cdot u$. Același raționament este valabil pentru AC, unde notăm lungimea fiecărui segment determinat de rețeaua de drepte orizontale cu v și obținem $AE = p \cdot v$ iar $EC = q \cdot v$.
Observăm că $\frac{AD}{DB} = \frac{p \cdot u}{q \cdot u} = \frac{p}{q}$, iar $\frac{AE}{EC} = \frac{p \cdot v}{q \cdot v} = \frac{p}{q}$, deci $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.
În cazul din figură, $p = 5$ și $q = 3$.

Puțină istorie

Thales din Milet (623 – 546 î. Hr), filozof grec, considerat părinte al științelor, a avut contribuții importante în matematică, astronomie, filozofie.

Teorema lui Thales
O paralelă la una din laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi segmente proporționale.

Cu notațiile din figură, pentru triunghiul ABC, teorema lui Thales se scrie:



Dacă $D \in AB$, $E \in AC$ și $DE \parallel BC$, atunci $\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC}$.

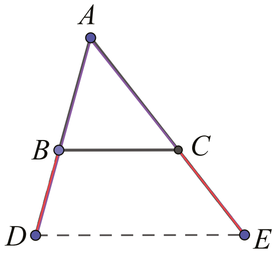
Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Aplicația 1: Rezultatul teoremei rămâne valabil și pentru cazurile când paralela la una din laturi intersectează dreptele suport ale celorlalte laturi în exteriorul laturilor.
Vom demonstra această afirmație.
Fie triunghiul ABC, oarecare. Dreapta d este paralelă cu BC și intersectează dreptele AB și AC în punctele D respectiv E, astfel încât D și E nu aparțin segmentelor AB, respectiv AC.

Sunt posibile următoarele cazuri:

1) Punctul B aparține segmentului AD și punctul C aparține segmentului AE.
Aplicând Teorema lui Thales în triunghiul ADE, pentru paralela BC, obținem

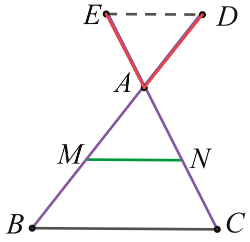
$$\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CE},\ \text{iar cu proporții derivate,}\ \frac{AB+BD}{BD}=\frac{AC+CE}{CE},\ \text{adică}\ \frac{DA}{DB}=\frac{EA}{EC}.$$



2) Punctul A este pe segmentul BD și pe segmentul EC.
Fie M simetricul punctului D față de A și N simetricul punctului E față de A.
Atunci, $MA = AD$ și $NA = AE$ și triunghiurile AMN, ADE sunt congruente (L.U.L).
Din congruența unghiurilor AMN și ADE, rezultă $MN \parallel ED$.
Dar $ED \parallel BC$, deci $MN \parallel BC$. Aplicăm teorema lui Thales pentru triunghiul ABC cu paralela MN, la latura BC.

Avem $\dfrac{AM}{MB}=\dfrac{AN}{NC}$, iar cu proporții derivate, $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AC}$ sau $\dfrac{DA}{AB}=\dfrac{EA}{AC}$,

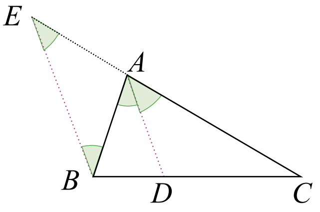
apoi $\dfrac{DA}{DB}=\dfrac{EA}{EC}$.



Cele trei rezultate conduc, împreună, la următoarea formulare a teoremei lui Thales:

> *O paralelă la una din laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi, sau pe prelungirile lor, segmente proporționale.*

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni



Aplicația 2: Teorema Bisectoarei. Se consideră un triunghi ABC, AB și AC având lungimi diferite, AD bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$, $D \in BC$.

Demonstrați că $\dfrac{DC}{DB}=\dfrac{AC}{AB}$.

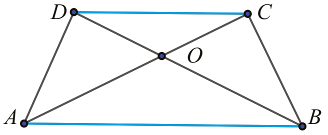
Soluție: Construim paralela prin vârful B la dreapta AD și notăm cu E punctul de intersecție cu dreapta AC. Considerăm dreptele paralele AD și EB cu secanta AC, apoi cu secanta AB. Atunci, $\sphericalangle BEA \equiv \sphericalangle DAC$ (corespondente) și $\sphericalangle EBA \equiv \sphericalangle BAD$ (alterne interne).
Dar, $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle DAC$ (AD este bisectoare). Rezultă $\sphericalangle BEA \equiv \sphericalangle EBA$, deci triunghiul ABE este isoscel cu baza EB, adică $AE \equiv AB$. (1)
Aplicăm teorema lui Thales în triunghiul CEB, cu paralela AD la latura EB.

Obținem $\dfrac{DC}{DB}=\dfrac{AC}{AE}$ care, folosind (1), devine $\dfrac{DC}{DB}=\dfrac{AC}{AB}$.

Observație: Pentru cazul $AB \equiv AC$, triunghiul ABC este isoscel, deci bisectoarea AD este și mediană, ceea ce arată că $\dfrac{DC}{DB}=\dfrac{AC}{AB}=1$.

Aplicația 3: Fie $ABCD$ trapez și O intersecția diagonalelor sale. Demonstrați că punctul O determină pe diagonale segmente proporționale.

Soluție: Fie trapezul $ABCD$ cu bazele AB, CD și $AC \cap BD = \{O\}$.
Segmentele determinate de O pe diagonale sunt OA, OC și OB, OD, despre care trebuie să arătăm că sunt proporționale.
Considerăm triunghiul OAB, cu $C \in AO$, $D \in BO$ și $CD \parallel AB$.



Aplicăm teorema lui Thales și obținem $\dfrac{CO}{CA}=\dfrac{DO}{DB}$.

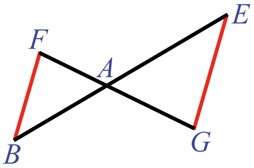
Cu proporții derivate, obținem $\dfrac{CO}{OA}=\dfrac{DO}{OB}$, apoi $\dfrac{OA}{OB}=\dfrac{OC}{OD}$, adică proporționalitatea cerută.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 a) Construiți triunghiul ABC cu $AB = 6$ cm și $AC = 8$ cm. Fixați un punct M pe segmentul AB, astfel încât $AM = 2$ cm.
b) Trasați paralela la BC prin M și notați cu N punctul de intersecție a acesteia cu latura AC.
c) Măsurați AN cu rigla gradată.
d) Calculați, folosind teorema lui Thales, lungimea segmentului AN și comparați rezultatul cu cel obținut prin măsurare.

2 Fie triunghiul ABC, $D \in AB$, $E \in AC$ și $DE \parallel BC$. Completați pe caiete spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:
a) $\frac{AD}{DB} = \ldots$; b) $\frac{EC}{AE} = \ldots$; c) $\frac{AE}{AC} = \ldots$.

3 În figura de mai jos, punctele F, A, G, respectiv B, A, E sunt coliniare, iar $FB \parallel EG$.



Completați pe caiete spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate.
a) $\frac{FA}{AG} = \ldots$; b) $\frac{EA}{AB} = \ldots$; c) $\frac{AG}{FG} = \ldots$.

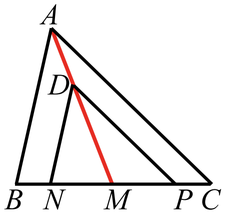
4 Fie un triunghi ABC. O paralelă la latura BC intersectează laturile AB și AC în punctele D, respectiv E, astfel încât $\frac{AD}{DB} = \frac{1}{4}$. Calculați rapoartele $\frac{AE}{EC}, \frac{AE}{AC}, \frac{AC}{EC}$.

5 Pe laturile AB și BC ale triunghiului ABC se consideră punctele M și N, $MN \parallel AC$, $AM = 2$ cm, $AB = 6$ cm, $BC = 9$ cm. Calculați lungimile segmentelor BN și NC.

6 Dreapta d este paralelă cu latura NP a triunghiului MNP și intersectează prelungirile laturilor MN și MP în punctele A, respectiv B. Calculați lungimile segmentelor AM și AN știind că:
a) $BM = 3{,}6$ cm, $MP = 4{,}8$ cm și $MN = 6$ cm.
b) $\frac{BM}{BP} = \frac{2}{5}$ și $MN = 15$ cm.

7 Fie O punctul de intersecție a diagonalelor trapezului $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB > CD$ și $EO \parallel AB$, $E \in AD$. Se știe că $\frac{AO}{OC} = \frac{4}{3}$, $DO = 6$ cm, $DE = 9$ cm. Aflați lungimile segmentelor AD și BD.

8 AM este mediană în ΔABC, $M \in BC$ și D un punct situat pe mediana AM.



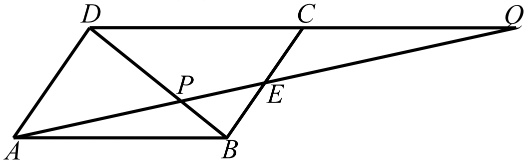
a) Dacă $DN \parallel AB$ și $DP \parallel AC$, cu $N, P \in BC$, arătați că DM este mediană a ΔDNP.
b) Dacă $\frac{AD}{DM} = \frac{1}{2}$ și $BC = 18$ cm, calculați NP.

9 Punctul P este situat pe latura BC a triunghiului ABC, iar $PE \parallel AB$, $E \in AC$ și $PF \parallel AC$, $F \in AB$. Dacă $AB = 9$ cm, $AC = 12$ cm și $PC = 2\,BP$, calculați perimetrul patrulaterului $AEPF$.

10 În punctul A de pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$, $r = 5$ cm, se trasează tangenta la cerc și se fixează pe aceasta punctul B, cu $AB = 12$ cm.
a) Calculați lungimea segmentului OB.
b) Semidreapta OB intersectează cercul în punctul C și $CD \perp OA$, $D \in OA$. Calculați lungimea segmentului OD.

11 Fie ABC un triunghi, $M \in AB$ și $MN \parallel BC$, $N \in AC$, $MP \parallel AC$, $P \in BC$.
Arătați că $\frac{AN}{AC} + \frac{BP}{BC} = 1$.

12 În desenul de mai jos, $ABCD$ este paralelogram, E este mijlocul laturii BC și $AE \cap BD = \{P\}$, $AE \cap CD = \{Q\}$.



a) Arătați că $AP = 2\,PE$.
b) Arătați că $AP^2 = PE \cdot PQ$.

L2 Reciproca teoremei lui Thales

Ne amintim

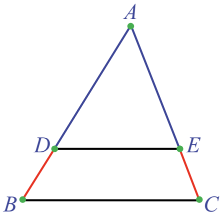
O paralelă la una din laturile unui triunghi determină, pe celelalte două laturi sau pe prelungirile lor, segmente proporționale.
Teorema lui Thales ne oferă o modalitate practică de a demonstra proporționalitatea unor segmente.

Ne întrebăm: *Care ar fi o condiție suficientă ca o dreaptă să fie paralelă cu una din laturile triunghiului?*
Răspunsul ne este dat în secvența următoare.
Pornind de la o teoremă (numită *teoremă directă*), se poate construi un alt enunț, în care ipoteza conține concluzia teoremei directe, iar concluzia noului enunț este ipoteza teoremei directe (sau o parte a acesteia). Acest enunț se numește *reciproca teoremei directe*. Spus mai sugestiv, dar nu întotdeauna corect, ipoteza și concluzia își schimbă locurile între ele.
Reciproca unei teoreme poate fi adevărată sau falsă. Dacă reciproca este adevărată, atunci se numește *teorema reciprocă* și poate fi folosită în aplicații.
Să detaliem: Cu notațiile din figură, teorema lui Thales și reciproca sa se referă la un triunghi oarecare ABC și la o dreaptă care intersectează două dintre laturile acestuia, în punctele D și E.

Teorema lui Thales

Ipoteza
O dreaptă este paralelă cu una din laturile unui triunghi.
$D \in AB$, $E \in AC$ și $DE \parallel BC$
Concluzia
Segmentele determinate de punctele de intersecție ale dreptei cu celelalte două laturi ale triunghiului sunt proporționale

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$



Reciproca teoremei lui Thales

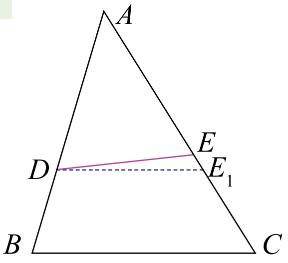
Ipoteza
Segmentele determinate de punctele de intersecție ale unei drepte cu două laturi ale triunghiului sunt proporționale.
$D \in AB$, $E \in AC$ și $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$
Concluzia
Dreapta este paralelă cu a treia latură a triunghiului.

$$DE \parallel BC$$

Vom demonstra că reciproca teoremei lui Thales este adevărată. Aceasta ne este de mare ajutor pentru a demonstra că două drepte sunt paralele, în condițiile cunoașterii proporționalității unor segmente.

Reciproca teoremei lui Thales
Dacă o dreaptă determină pe două laturi ale unui triunghi segmente proporționale, atunci această dreaptă este paralelă cu a treia latură a triunghiului.

Demonstrație: Fie D și E punctele în care o dreaptă intersectează laturile AB, respectiv AC ale triunghiului ABC, și care determină pe AB, respectiv AC, segmente proporționale, adică $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$. (1)
Vom demonstra că dreapta DE este paralelă cu BC.
Presupunem, prin reducere la absurd, că DE și BC nu sunt paralele. Atunci, există, prin D, o paralelă DE_1 la BC, E_1 fiind punctul de intersecție cu AC.



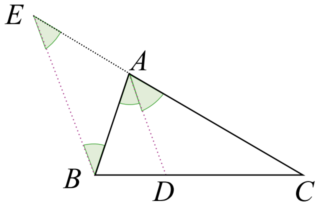
Aplicăm teorema lui Thales în triunghiul ABC pentru $DE_1 \parallel BC$ și avem: $\frac{AD}{DB}=\frac{AE_1}{E_1C}$. (2)

Folosind relațiile (1) și (2), rezultă $\frac{AE}{EC}=\frac{AE_1}{E_1C}$, apoi $\frac{AE}{AE+EC}=\frac{AE_1}{AE_1+E_1C}$ și $\frac{AE}{AC}=\frac{AE_1}{AC}$.
Deducem $AE=AE_1$, prin urmare punctele E și E_1 coincid.
Am ajuns la o contradicție, deci presupunerea făcută a fost falsă. În concluzie, $DE \parallel BC$.
Rezultatul demonstrat rămâne valabil și în cele două cazuri în care punctul D se află pe prelungirea laturii AB, ceea ce implică și despre punctul E același lucru.
Demonstrația acestor cazuri se face printr-un raționament similar, modificând corespunzător figura.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicație: Reciproca teoremei bisectoarei

Punctul D este situat pe latura BC a triunghiului ABC, astfel încât $\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}$. Demonstrați că AD este bisectoarea unghiului A.
Soluție: Căutăm o modalitate de a aplica teorema de mai sus. Observăm că punctele B, D, C sunt coliniare. Construim segmentul AE congruent cu AB pe prelungirea lui AC.



Atunci, $\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AC}$. Relația din ipoteză devine $\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AC}$ adică dreapta AD determină pe laturile CE și CB ale triunghiul BCE segmente proporționale și, conform reciprocei teoremei lui Thales, dreptele AD și BE sunt paralele.
Dreptele paralele AD și BE formează cu secanta AB unghiuri alterne interne congruente, $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ABE$, iar cu secanta AC, unghiuri corespondente congruente, $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle AEB$. Deoarece triunghiul ABE este isoscel, cu baza BC, rezultă $\sphericalangle ABE \equiv \sphericalangle AEB$, adică, $\sphericalangle BAD \equiv$ $\equiv \sphericalangle ABE \equiv \sphericalangle AEB \equiv \sphericalangle DAC$. În concluzie $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle DAC$, deci AD este bisectoare a unghiului $\sphericalangle BAC$.

Temă de portofoliu

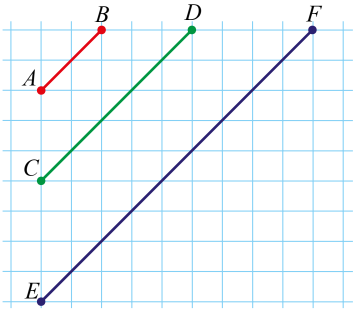
Demonstrați că dacă în patrulaterul convex $ABCD$, punctul O, de intersecție a diagonalelor, determină pe acestea segmente proporționale, atunci $ABCD$ este trapez sau paralelogram.

Reținem!

Dacă o dreaptă determină pe două laturi ale unui triunghi sau pe prelungirile acestora segmente proporționale, atunci ea este paralelă cu a treia latură a triunghiului

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Pe o foaie de matematică sunt desenate segmentele AB, CD și EF (vezi figura de mai jos).



Demonstrați că dreptele AB, CD și EF sunt paralele.

2 În triunghiul ABC, $M \in AB$, $N \in AC$. Precizați poziția dreptelor MN și BC în următoarele situații:

a) $AM = 4$ cm, $AN = 6$ cm, $MB = 10$ cm, $NC = 15$ cm.

b) $AB = 15$ cm, $BM = 9$ cm, $\frac{AN}{NC} = \frac{2}{3}$.

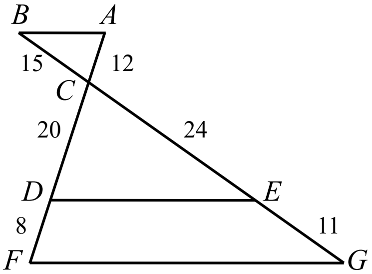
3 Pe laturile AB, BC, CA ale triunghiului ABC se consideră punctele D, E, respectiv F, astfel încât $AD = 3 \cdot BD$, $BC = 4 \cdot BE$ și $CF = 0{,}25\ AC$. Arătați că:

a) dreptele DF și BC sunt paralele.

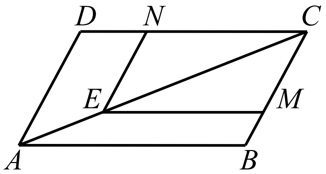
b) dreptele DE și AC sunt paralele.

4 Fie triunghiul CDE, $CD = 20$ cm și $CE = 24$ cm. Prelungim latura CD cu segmentele $AC = 12$ cm și $DF = 8$ cm. Prelungim latura CE cu segmentele $CB = 15$ cm și $EG = 11$ cm. Precizați dacă propozițiile de mai jos sunt adevărate sau false. Justificați.

a) $DE \parallel FG$ b) $AB \parallel DE$ c) $AB \parallel FG$



5 Punctul E este situat pe diagonala AC a paralelogramului $ABCD$, iar $EM \parallel AB$, $M \in BC$ și $EN \parallel AD$, $N \in CD$. Arătați că $MN \parallel BD$.



6 Fie D mijlocul laturii BC a triunghiului ABC și semidreptele DE, DF bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle ADB$, respectiv $\sphericalangle ADC$; $E \in AB$, $F \in AC$. Demonstrați că $EF \parallel BC$.

7 Se consideră triunghiul MNP echilateral, cu lungimea laturii de 18 cm și punctele $R \in MN$, $S \in NP$, astfel încât $NR = PS = 12$ cm. Demonstrați că dreapta RS este paralelă cu bisectoarea unghiului $\sphericalangle NMP$.

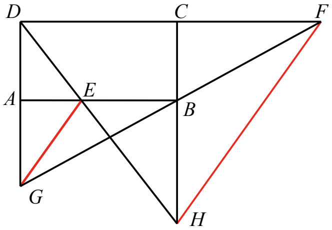
8 Laturile unghiului ascuțit xOy sunt intersectate de cercurile $\mathcal{C}_1(O,r_1)$ în punctele A și B și de cercul $\mathcal{C}_2(O,r_2)$, $r_2 > r_1$, în punctele C și D. Demonstrați că $AB \parallel CD$.

9 În trapezul $ABCD$, avem $AB \parallel CD$, cu $E \in AC$, $F \in BC$, $G \in CD$, $AE = 1$ cm, $AC = 4$ cm, $BC = 8$ cm, $CF = 6$ cm.

a) Arătați că $EFCG$ este trapez sau paralelogram.

b) Demonstrați că dacă $GE \parallel AD$, atunci $FG \parallel BD$.

10 Fie punctul E situat pe latura AB a dreptunghiului $ABCD$ și punctul F situat pe prelungirea laturii CD, ca în desenul de mai jos. Fie $\{G\} = AD \cap BF$ și $\{H\} = DE \cap BC$. Demonstrați că $GE \parallel FH$



L3 Împărțirea unui segment în părți proporționale cu numere date

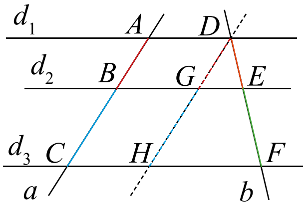
Ne amintim

Mai multe paralele echidistante determină pe orice secantă segmente congruente.
Teorema paralelelor echidistante ne oferă o modalitate de împărțire a unui segment într-un număr oarecare de segmente congruente. Aceasta ne-a ajutat să înțelegem teorema lui Thales, care ne conduce către segmente proporționale, determinate de două drepte paralele pe două drepte concurente.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Ne întrebăm:

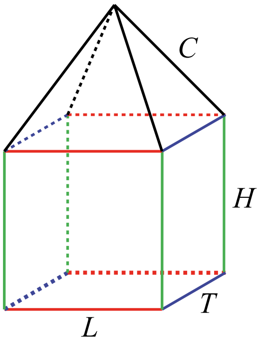
1) Prin ce relație sunt caracterizate segmentele determinate pe două secante, de mai mult de două drepte paralele?
2) Cum putem împărți un segment dat în două sau mai multe părți, între care există proporții date?



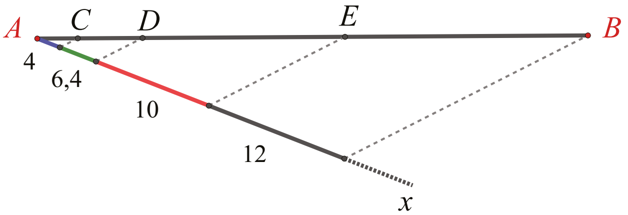
Aplicația 1: Trei dreptele paralele d_1, d_2, d_3 determină pe secantele a și b segmente proporționale.
Demonstrație: Dreptele d_1, d_2, d_3 intersectează secanta a în A, B, respectiv C și secanta b în punctele D, E, respectiv F.
Vom demonstra egalitatea $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$.
Dorim să găsim un triunghi pentru care una dintre dreptele date să fie paralelă cu o latură a triunghiului.

Prin punctul D ducem o paralelă la dreapta a. Aceasta intersectează dreptele d_2 și d_3 în G, respectiv în H.
Se formează parelelogramele $ABGD$ și $BCHG$. Într-un paralelogram, laturile opuse sunt congruente, deci $AB \equiv DG$ și $BC \equiv GH$. Aplicăm teorema lui Thales în triunghiul DHF, cu $GE \parallel HF$,
și obținem $\frac{DG}{GH}=\frac{DE}{EF}$. Apoi, folosind congruențele demonstrate, deducem $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$.
Se obțin rezultate similare pentru orice număr de drepte paralele.

Aplicația 2: Horia, prietenul lui Tudor, dorește să realizeze dintr-o șipcă cu lungimea de 3 m, o colivie asemănătoare cu cea a lui Tudor, dar care să nu aibă toate șipcile de aceeași lungime.
Segmentele colorate identic (vezi figura alăturată) au lungimi egale, notate L, T, H, C.
Se cunosc rapoartele: $\frac{L}{H}=\frac{H}{T}=1,6$, iar $\frac{C}{L}=1,2$. Să-l ajutăm pe Horia să determine lungimile șipcilor necesare pentru a construi noua colivie.
Rezolvare: Pentru ușurarea calculelor, folosim numere cu o singură zecimală.
Presupunem lățimea T ca fiind unitatea, $T = 1$. Atunci, înălțimea $H = 1,6$;
lungimea $L = 2,5$, iar pentru acoperiș, $C = 3$.
Horia trebuie să obțină din șipca de 300 cm câte patru șipci de lungimi proporționale cu numerele 1; 1,6; 2,5 și 3.
Avem $4L + 4T + 4H + 4C = 300$ cm.



Va construi un segment AB, care simbolizează șipca de 300 cm, iar din A, pe semidreapta Ax, un segment de lungime $4 \cdot 1$ cm = 4 cm. În continuarea acestuia, reprezintă un segment de lungime $4 \cdot 1{,}6$ cm = 6,4 cm, apoi un segment de lungime $4 \cdot 2{,}5$ cm = 10 cm. În final, reprezintă un segment de lungime $4 \cdot 3$ cm = 12 cm. Unind capătul ultimului segment cu B și ducând paralele la acesta, obține punctele C, D și E.



Avem $\frac{AC}{4}=\frac{CD}{6,4}=\frac{DE}{10}=\frac{EB}{12}=\frac{AC+CD+DE+EB}{4+6,4+10+12}=\frac{300}{32,4}=9,259\ldots\approx 9,2$, ultimele relații fiind adevărate ca rezultat al proprietăților unui șir de rapoarte egale.

Deducem dimensiunile segmentelor: $AC = 36{,}8$ cm, $CD = 59$ cm, $DE = 92$ cm și $EB = 110{,}4$ cm.

Acum putem afla lungimile celor 16 bucăți. Dimensiunile coliviei sunt $T = AC : 4 = 9{,}2$ cm, $H = CD : 4 = 14{,}7$ cm, $L = DE : 4 \approx 23$ cm și $C = EB : 4 = 27{,}6$ cm. Vor fi câte patru șipci pentru fiecare dimensiune.

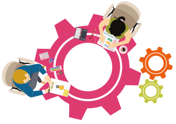
Aplicația de mai sus ne furnizează un procedeu practic prin care putem împărți un segment dat în segmente proporționale cu numere date.

Pentru a împărți un segment dat AB în segmente proporționale cu numerele pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *procedăm astfel:*

1) Construim o semidreaptă Ax pe care se reprezintă, în această ordine, punctele $P_1, P_2, \ldots, P_n$, astfel încât $AP_1 = a_1$, $P_1P_2 = a_2$, ... , $P_{n-1}P_n = a_n$.
2) Trasăm segmentul P_nB, apoi construim paralelele prin $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ la P_nB.
3) Notăm cu $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ punctele în care dreptele paralele intersectează segmentul AB. Se obțin segmentele $AQ_1, Q_1Q_2, \ldots, Q_{n-1}Q_n$. Acestea sunt proporționale cu numerele date, adică:

$$\frac{AQ_1}{a_1}=\frac{Q_1Q_2}{a_2}=\frac{Q_2Q_3}{a_3}=\ldots=\frac{Q_{n-1}B}{a_n}=\frac{AB}{a_1+a_2+\ldots..+a_n}.$$

Observație: Algoritmul de mai sus rămâne valabil dacă în loc de șirul: $a_1, a_2, ..., a_n$ considerăm șirul: $b_1, b_2, ..., b_n$ proporțional cu el astfel încât construcția punctelor $P_1, P_2, ..., P_n$ să poată fi efectuată pe caiet. Motivați!



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 În triunghiul ABC se duc paralelele $DE \parallel FG \parallel BC$, punctele D, F situate pe latura AB, iar punctele E, G situate pe latura AC. Dacă $AE = 4$ cm, $AG = 6$ cm, $EC = 7$ cm, $AB = 22$ cm, aflați lungimile segmentelor AD, DF, FB.

2 Segmentul MN este linie mijlocie a trapezului $ABCD$, $AB \parallel CD$, $M \in AD$, $N \in BC$, iar PQ este linie mijlocie a trapezului $CDMN$, $P \in DM$ și $Q \in CN$. Dacă $AP = 12$ cm și $NQ = 4$ cm, aflați lungimile segmentelor DP, BN și CQ. Stabiliți dacă trapezul $ABCD$ este isoscel.

3 Segmentul AB, cu lungimea 125 mm, este împărțit de punctul P în două segmente a căror lungimi sunt direct proporționale cu numerele 5 și 7,5. Calculați lungimile segmentelor AP și PB.

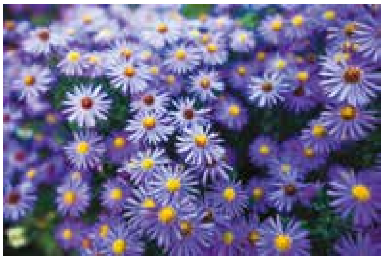
4 Punctele A, B, C, D, E sunt coliniare în această ordine: $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm, $CD = 6$ cm, $DE = 7$ cm. Prin aceste puncte, se construiesc drepte paralele care intersectează o dreaptă $d \neq AB$ în punctele M, N, P, Q, respectiv R. Calculați lungimile segmentelor MN, PQ, NR în următoarele situații:

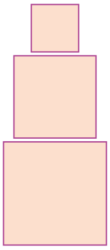
a) $MR = 33$ cm b) $NP = 2{,}5$ cm

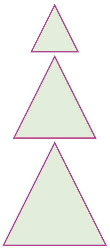
5 Fie A și B puncte interioare segmentului MN, $MB > MA$ și $MN = 0{,}51$ m. Aflați lungimile segmentelor MA, AB, BN, știind că lungimile lor sunt exprimate în centimetri prin numere naturale, direct proporționale cu trei numere naturale consecutive, ordonate crescător.

6.3 Triunghiuri asemenea. Teorema fundamentală a asemănării, aplicații. Criterii de asemănare a triunghiurilor

L1 Triunghiuri asemenea. Teorema fundamentală a asemănării







Despre două obiecte spunem că sunt *asemănătoare* dacă au *trăsături / proprietăți comune*. Arcul de Triumf din Paris are elemente arhitecturale comune cu Arcul de Triumf din București, mânzul are trăsături comune cu părinții, florile plantei din imagine seamănă foarte bine, fără a fi identice.
Figurile geometrice din desenele de mai sus se aseamănă, dar nu sunt congruente. Dimensiunile lor diferă.
Proprietățile figurilor geometrice se referă, de obicei, la numărul și la măsurile laturilor, ale unghiurilor, deci asemănarea a două figuri geometrice se referă la proprietățile acestor elemente.
Să observăm triunghiurile: remarcăm faptul că sunt echilaterale, deci au toate unghiurile congruente, dar laturile celor trei triunghiuri nu sunt congruente, acestea sunt din ce în ce mai mici.
Uneori, dimensiunile unor obiecte fiind mari, este nevoie să realizăm un *model* de dimensiuni mai reduse, dar care să păstreze unele proprietăți.

Exemplu: Dorim să amenajăm în curte un spațiu de joacă în formă de triunghi dreptunghic, cu o catetă de dimensiune 4 m, cealaltă catetă fiind de 2 m. Pentru a stabili detaliile, avem nevoie de imaginea terenului respectiv, de o schiță. Nu se poate desena pe foaia de caiet un triunghi atât de mare! Vom realiza o figură geometrică asemănătoare cu cea reală, un triunghi în care o catetă are lungimea egală cu dublul lungimii celeilalte catete.

Ne amintim

Două triunghiuri sunt congruente dacă au toate laturile și toate unghiurile respectiv congruente.
Două triunghiuri sunt congruente dacă, prin suprapunere, coincid.
Cazurile (criteriile) de congruență ne oferă modalități prin care demonstrăm că două triunghiuri sunt congruente, folosind doar trei dintre cele șase perechi de congruențe ale unghiurilor, respectiv ale laturilor unui triunghi.
Raportul a două segmente este raportul lungimilor acestora, exprimate în aceeași unitate de măsură.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Cazul de congruență L.L.L. ne demonstrează că nu există perechi de triunghiuri care să aibă toate laturile respectiv congruente, iar unghiurile să nu fie congruente.
Ne întrebăm: *Există perechi de triunghiuri care au toate unghiurile respectiv congruente, fără ca laturile să fie congruente?*

Problemă practică: Pentru rezolvarea acestei probleme, veți lucra în echipe de câte 2 elevi.
Aveți nevoie de: hârtie, creion, instrumente geometrice, foarfece.

1) Fiecare membru al echipei va desena unul din triunghiurile:
   ΔABC, cu $\sphericalangle A = 40^\circ$, $\sphericalangle B = 60^\circ$, $AB = 8$ cm;
   ΔMNP, cu $\sphericalangle M = 40^\circ$, $\sphericalangle P = 80^\circ$, $MN = 4$ cm.
2) Măsurați cu rigla gradată laturile AC și BC, respectiv MP și NP.
3) Copiați pe caiete tabelul următor și completați rezultatele obținute prin măsurare.

AB	MN	$\frac{AB}{MN}$	AC	MP	$\frac{AC}{MP}$	BC	NP	$\frac{BC}{NP}$
8 cm	4 cm	2						

4) Decupați cele două triunghiuri.
5) Suprapuneți laturile unghiului M ale triunghiul mai mic peste laturile unghiului A ale triunghiului mai mare, respectând ordinea de scriere: semidreapta MN cu semidreapta AB și semidreapta MP cu semidreapta AC.

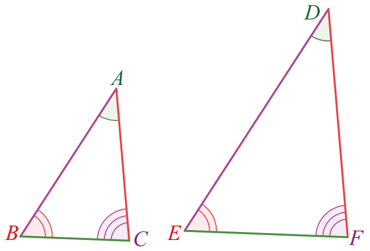
Cu cele două triunghiuri realizate și cu tabelul completat, să observăm următoarele:

a) Se pot construi o infinitate de triunghiuri astfel încât să aibă unghiurile respectiv congruente cu cele ale triunghiului ABC, iar laturile să fie de lungimi diferite de cele ale ΔABC.
b) Oricare două triunghiuri de acest fel au laturile corespunzătoare respectiv proporționale.

Definiție: Două triunghiuri sunt asemenea dacă au unghiurile respectiv congruente și laturile corespunzătoare lor respectiv proporționale.

Valoarea comună a raportului a două laturi corespunzătoare se numește *raport de asemănare*.

În cazul problemei practice precedente, raportul de asemănare este $\frac{AB}{MN} = 2$



Pentru triunghiurile asemenea ABC și DEF, vom scrie: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Să explicăm definiția folosind notațiile din figura alăturată.

Unghiurile celor două triunghiuri sunt *respectiv congruente.* $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle D$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle E$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle F$

Laturile celor două triunghiuri sunt *respectiv proporționale.* $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

Observație: Ordinea în scrierea asemănării păstrează ordinea vârfurilor corespunzătoare.
Ordinea în scrierea proporționalității laturilor păstrează ordinea dată de vârfurile corespunzătoare.
Pentru scrierea corectă a relației de asemănare dintre cele două triunghiuri, este esențial să avem în vedere:

– perechile de unghiurile congruente: $(\sphericalangle A, \sphericalangle D)$, $(\sphericalangle B, \sphericalangle E)$, $(\sphericalangle C, \sphericalangle F)$;
– latura opusă unghiului A, în triunghiul ABC, este corespunzătoare laturii opuse unghiului D în triunghiul DEF; în acest fel, obținem perechile de laturi corespunzătoare: (AB, DE), (BC, EF), (AC, DF);
– proporționalitatea laturilor corespunzătoare se va scrie: $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$.

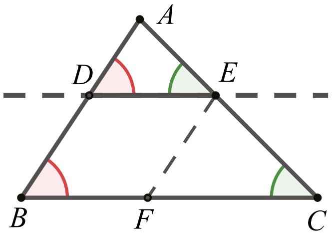
Proprietăți.

1) Orice triunghi este asemenea cu el însuși: $\Delta ABC \sim \Delta ABC$.
2) Dacă $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, atunci $\Delta DEF \sim \Delta ABC$.
3) Dacă $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ și $\Delta DEF \sim \Delta MNP$, atunci $\Delta ABC \sim \Delta MNP$.
4) Două triunghiuri asemenea, cu raportul de asemănare egal cu 1, au toate laturile respectiv congruente, deci sunt triunghiuri congruente.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Suntem interesați să găsim construcții geometrice care generează triunghiuri asemenea.
Ne ajută, în acest sens, următorul rezultat:

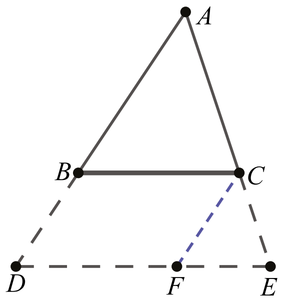
Teorema fundamentală a asemănării
O paralelă la una din laturile unui triunghi formează cu celelalte două laturi, sau cu prelungirile lor, un triunghi asemenea cu triunghiul inițial.



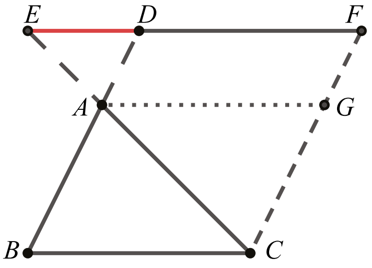
Demonstrație: Considerăm triunghiul ABC și dreapta d paralelă cu BC. Dreapta d poate intersecta două laturi ale triunghiului sau prelungirile a două laturi ale triunghiului.

I. Dreapta d intersectează laturile AB și AC în punctele D, respectiv E.
Se evidențiază triunghiurile ADE și ABC și demonstrăm că sunt asemenea.
a) *Congruențele unghiurilor:* pentru $DE \parallel BC$, secantele DB și EC determină perechile de unghiuri corespondente congruente $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle ABC$, respectiv $\sphericalangle AED \equiv \sphericalangle ACB$.
Unghiurile $\sphericalangle DAE$ și $\sphericalangle BAC$ coincid, deci sunt congruente.
b) *Proporționalitatea laturilor:* Aplicăm teorema lui Thales în triunghiul ABC cu $DE \parallel BC$ și rezultă $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$. Construim prin E paralela la AB și notăm cu F punctul în care aceasta intersectează latura BC.
Aplicăm teorema lui Thales în triunghiul ABC, cu $EF \parallel AB$, și obținem $\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$. Patrulaterul $DEFB$ este paralelogram, deci $DE \equiv BF$ și egalitatea rapoartelor devine $\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$. Din cele două egalități rezultă $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$, adică proporționalitatea laturilor.

Am demonstrat că unghiurile triunghiurilor ADE și ABC sunt respectiv congruente și laturile sunt respectiv proporționale. Conform definiției, cele două triunghiuri sunt asemenea.



II. Dreapta d nu intersectează laturile triunghiului, dar intersectează dreptele suport.
a) Punctul B este situat pe segmentul AD, punctul C este situat pe segmentul AE și $DE \parallel BC$. Considerând triunghiul ADE și dreapta BC paralelă cu latura DE a triunghiului ADE, suntem în condițiile date de cazul I. Aplicând rezultatul demonstrat, se obține congruența unghiurilor și proporționalitatea laturilor, deci asemănarea triunghiurilor.
b) Punctul A este situat pe segmentele BD și CE, iar $DE \parallel BC$.
Pentru $DE \parallel BC$ și secanta BD, avem $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle ABC$ (alterne interne), iar pentru $DE \parallel BC$ și secanta CE, avem $\sphericalangle AED \equiv \sphericalangle ACB$ (alterne interne). Pe de altă parte, $\sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle BAC$ (opuse la vârf). (1)
Construim $CF \parallel AD$, $F \in DE$ și $AG \parallel BC$, $G \in CF$, deci $BC \parallel AG \parallel DF$.
Atunci, $BCFD$, $AGFD$ și $BCGA$ sunt paralelograme și au loc relațiile $DF \equiv BC$, $GF \equiv AD$ și $GC \equiv AB$.



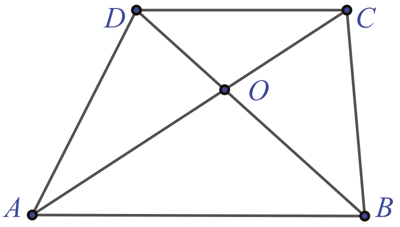
În triunghiul CEF, avem $AG \parallel EF$.

Aplicând teorema lui Thales, obținem $\frac{AE}{AC} = \frac{GF}{GC}$ sau $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$.

În triunghiul CEF, avem $AD \parallel CF$.

Aplicând teorema lui Thales obținem: $\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{DF}$ sau $\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$.

În concluzie $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$ și împreună cu congruența unghiurilor date de relațiile (1), se ajunge la $\Delta ADE \sim \Delta ABC$.



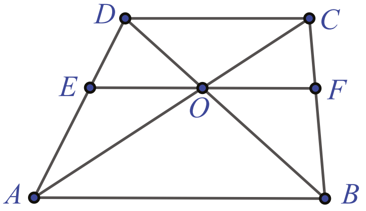
Aplicația 1: Fie trapezul $ABCD$ cu bazele AB, CD și $\{O\} = AC \cap BD$. Arătați că punctul O împarte diagonalele AC și BD într-un raport egal cu raportul bazelor trapezului.

Soluție: Considerăm triunghiul OAB, cu $DC \parallel AB$.

Teorema fundamentală a asemănării ne asigură: $\Delta OCD \sim \Delta OAB$.

Proporționalitatea laturilor triunghiurilor conduce la $\dfrac{OC}{OA} = \dfrac{OD}{OB} = \dfrac{CD}{AB}$,

adică se demonstrează că punctul O împarte diagonalele în raportul $\dfrac{CD}{AB}$.



Aplicația 2: Fie trapezul $ABCD$, $AB \parallel DC$ și $\{O\} = AC \cap BD$. Paralela prin O la baze intersectează laturile neparalele AD și BC în E, respectiv în F. Demonstrați că O este mijlocul segmentului EF.

Soluție: Avem de comparat segmentele OE și OF. Acestea sunt situate pe dreapta EF, paralelă cu AB. Conform teoremei fundamentale a asemănării, $\Delta DEO \sim \Delta DAB$, deci $\dfrac{DE}{DA} = \dfrac{DO}{DB} = \dfrac{EO}{AB}$, iar $\Delta COF \sim \Delta CAB$, deci $\dfrac{CO}{CA} = \dfrac{CF}{CB} = \dfrac{OF}{AB}$. Dar $\Delta COD \sim \Delta AOB$ (aplicația 1) și $\dfrac{OC}{OA} = \dfrac{OD}{OB}$, care prin proporții derivate devine $\dfrac{OC}{AC} = \dfrac{OD}{BD}$. Comparând primele două șiruri de rapoarte egale cu ultima proporție, rezultă $\dfrac{EO}{AB} = \dfrac{OF}{AB}$, ceea ce este echivalent cu $EO \equiv OF$, adică O este mijlocul segmentului EF.

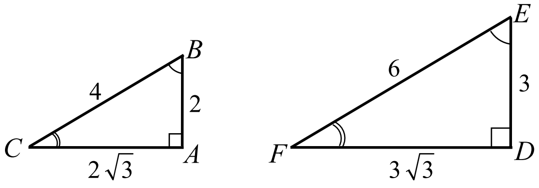
Reținem!

- Două triunghiuri sunt asemenea dacă au unghiurile respectiv congruente și laturile corespunzătoare lor respectiv proporționale.
- O paralelă la una din laturile unui triunghi formează cu celelalte două laturi, sau cu prelungirile lor, un triunghi asemenea cu triunghiul inițial.

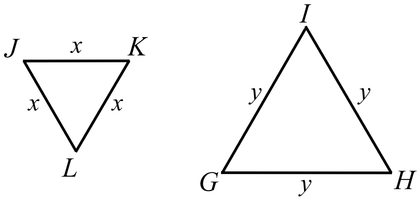
Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Folosind definiția, arătați că următoarele perechi de triunghiuri sunt asemenea. Scrieți, pentru fiecare pereche, relațiile între laturi, respectiv relațiile între unghiuri.

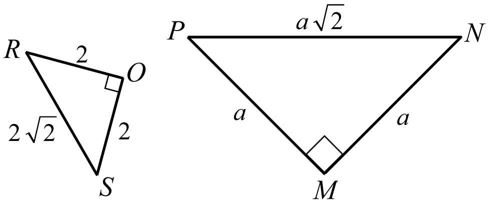
a)



b)



c)



2 Se știe că ΔABC este asemenea cu ΔDEF.

a) Dacă $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm, $EF = 7{,}5$ cm, $DF = 9$ cm calculați AC și DE.

b) Dacă $\sphericalangle A = 30°$ și $\sphericalangle F = 70°$, aflați măsurile unghiurilor $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$, $\sphericalangle D$, $\sphericalangle E$.

c) Dacă $AB = 15$ cm, $BC = 24$ cm, $AC = 18$ cm și $\mathcal{P}_{\Delta DEF} = 76$ cm, calculați lungimile segmentelor DE, EF, FD.

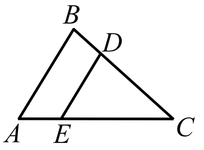
3 Dacă $\Delta ABC \sim \Delta MNP$, $AB = 8$ cm, $MN = 6$ cm, $NP = 9$ cm, $PM = 12$ cm, calculați perimetrul triunghiului ABC.

4 Dacă $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, $\sphericalangle A + \sphericalangle C = 80^\circ + \sphericalangle B$ și $\sphericalangle D = 65^\circ$, calculați măsurile unghiurilor triunghiului DEF.

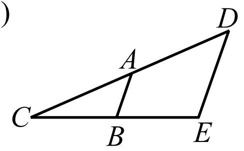
5 Se consideră triunghiurile asemenea ΔGEO și ΔMAT având raportul de asemănare $k = \frac{2}{5}$. Se știe că $GE = 4$ cm, $GE + 2\,EO = 13{,}6$ cm și $\frac{1}{4}GE + \frac{1}{3}EO + OG = 7{,}8$ cm. Aflați lungimile laturilor triunghiului ΔMAT.

6 În desenele de mai jos, avem $DE \parallel AB$. Scrieți egalitatea rapoartelor obținută prin aplicarea teoremei fundamentale a asemănării.

a)

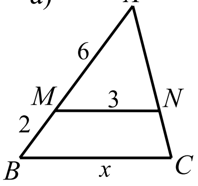


b)

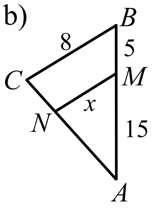


7 Se consideră triunghiul ABC, $M \in AB$, $N \in AC$ și $MN \parallel BC$. Aflați valoarea numărului x în fiecare din cele trei situații desenate.

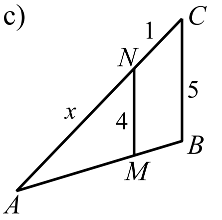
a)



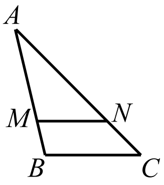
b)



c)



8 În figura alăturată, avem ΔABC, $M \in AB$, $N \in AC$ și $\sphericalangle ANM \equiv \sphericalangle ACB$.



a) Arătați că ΔAMN și ΔABC sunt asemenea. Scrieți egalitatea rapoartelor care se obțin aplicând teorema fundamentală a asemănării.

b) Dacă $\sphericalangle AMN + \sphericalangle ACB = 134°$, aflați măsura unghiului $\sphericalangle BAC$.

9 Pe laturile DE și DF ale triunghiului DEF se consideră punctele A, respectiv B, astfel încât $\frac{AD}{AE} = \frac{3}{5}$ și $\frac{BF}{DF} = \frac{5}{8}$.

a) Arătați că $AB \parallel EF$.

b) Știind că $EF = 3{,}6$ cm aflați lungimea segmentului AB.

10 Fie triunghiul ABC și punctele $P, Q \in AB$ și $M, N \in AC$, astfel încât $PM \parallel QN \parallel BC$. Se știe că $AP = PM = 3$ cm, $AM = 5$ cm, $AQ = 7{,}8$ cm, $AB = 10{,}5$ cm.

a) Calculați lungimile segmentelor PQ, AN, BC.

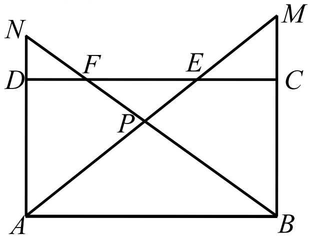
b) Calculați perimetrul trapezului $BCNQ$.

11 Fie trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AD \cap BC = \{E\}$ cu $AB = 7{,}5$ cm, $BC = 6$ cm, $CD = 3$ cm, $AD = 4{,}5$ cm. Calculați lungimile segmentelor EA, EB, EC și ED.

12 În paralelogramul $ABCD$, cu $AB = 12$ cm, $BC = 6$ cm, se consideră pe latura CD punctul E astfel încât $CE = 3DE$. Fie $AE \cap BC = \{F\}$. Determinați lungimile segmentelor EC și CF.

13 Pe laturile neparalele AD și BC ale trapezului $ABCD$, se iau punctele E respectiv F, cu $EF \parallel AB$ și $\frac{AE}{ED} = \frac{2}{7}$. Știind că $AB = 24$ cm și $CD = 6$ cm, calculați lungimea segmentului EF.

14 Pe latura CD a dreptunghiului $ABCD$, cu $AB = 24$ cm, $BC = 15$ cm, se iau punctele E și F cu $CE = \frac{AB}{3}$, $DF = \frac{CD}{4}$. Dreptele AE și BF se intersectează în punctul P, iar $AP \cap BC = \{M\}$, $BP \cap AD = \{N\}$.



a) Calculați lungimile segmentelor AN și BM.

b) Calculați distanța de la punctul P la dreapta AB.

15 Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Construim $GK \parallel BC$, $K \in AB$, $GL \parallel AC$, $L \in BC$ și $GM \parallel AB$, $M \in AC$. Știind că perimetrul triunghiului ABC este de 18 cm, calculați suma $GK + GL + GM$.

L2 Criterii de asemănare a triunghiurilor

Ne amintim

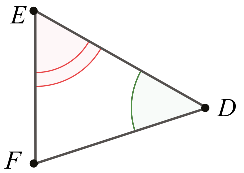
Două triunghiuri sunt **congruente** dacă au toate unghiurile respectiv congruente și toate laturile respectiv congruente.

Două triunghiuri sunt **asemenea** dacă au toate unghiurile respectiv congruente și toate laturile respectiv proporționale.

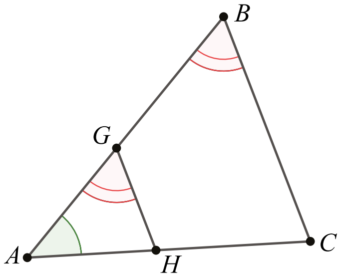
Pentru a arăta congruența a două triunghiuri, folosind definiția, este necesar să demonstrăm toate cele trei congruențe de unghiuri și trei congruențe de laturi. Teoremele numite *cazuri de congruență* ne dau condiții suficiente de congruență a triunghiurilor: (L.U.L); (U.L.U); (L.U.U) și (L.L.L).
Ne propunem să găsim condiții suficiente și pentru relația de asemănare a triunghiurilor.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Teorema 1. (cazul de asemănare U.U.)
Dacă două triunghiuri au două perechi de unghiuri respectiv congruente, atunci ele sunt triunghiuri asemenea.



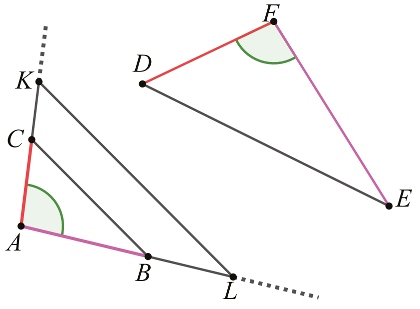
Demonstrație: Fie ΔABC, ΔDEF două triunghiuri cu $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle EDF$ și $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DEF$. Singurul indiciu care ne conduce spre triunghiuri asemenea este teorema fundamentală a asemănării.
Ne imaginăm că suprapunem triunghiul DEF peste triunghiul ABC, fixând laturile unghiului $\sphericalangle D$ peste cele ale unghiului $\sphericalangle A$.
Această suprapunere ne dă ideea: fixăm punctul G pe latura AB (sau pe semidreapta AB), astfel încât $AG \equiv DE$. Din G construim segmentul GH, $H \in AC$, astfel încât $\sphericalangle AGH \equiv \sphericalangle DEF$. Astfel, am format triunghiul AGH congruent cu triunghiul DEF (U.L.U.). Deci au loc congruențele: $GH \equiv EF$, $AH \equiv DF$ și $\sphericalangle AHG \equiv \sphericalangle DFE$.
Pentru a demonstra că triunghiurile ABC și DEF sunt asemenea, este suficient să demonstrăm că sunt asemenea triunghiurile ABC și AGH. Din $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DEF$ și $\sphericalangle DEF \equiv \sphericalangle AGH$, deducem $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle AGH$ și cum aceste unghiuri sunt corespondente, formate de dreptele GH și BC cu secanta AB, rezultă $GH \parallel BC$.



Aplicând teorema fundamentală a asemănării pentru ΔABC cu $GH \parallel BC$, obținem $\frac{AG}{AB} = \frac{AH}{AC} = \frac{GH}{BC}$.

Folosind congruențele laturilor triunghiurilor ΔABC și ΔAGH, găsim $\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC}$, adică proporționalitatea laturilor triunghiurilor ΔDEF și ΔABC. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este 180°, deci $\sphericalangle DFE = 180° - \sphericalangle DEF - \sphericalangle EDF = 180° - \sphericalangle ABC - \sphericalangle BAC = \sphericalangle ACB$.
Am demonstrat și congruența unghiurilor triunghiurilor, deci $\Delta DEF \sim \Delta ABC$.

Teorema 2. (cazul de asemănare L.U.L.)
Dacă două triunghiuri au o pereche de unghiuri respectiv congruente și laturile care formează aceste unghiuri respectiv proporționale, atunci triunghiurile sunt asemenea.

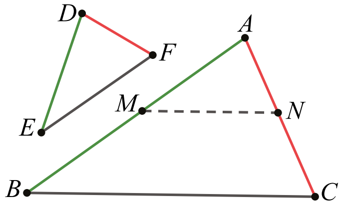


Demonstrație: Considerăm triunghiurile ABC și DEF, astfel încât $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle EDF$ și laturile care formează aceste unghiuri să fie proporționale: $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$. Pe semidreptele AB și AC, considerăm punctele L, respectiv K, astfel încât $AL \equiv DE$ și $AK \equiv DF$.

Proporționalitatea din ipoteză $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}$ devine $\frac{AB}{AL}=\frac{AC}{AK}$. Aplicăm reciproca teoremei lui Thales pentru triunghiul ΔABC cu punctele L și K pe dreptele suport ale laturilor sale și rezultă $BC \parallel LK$.

Cu teorema fundamentală a asemănării, rezultă $\Delta ABC \sim \Delta ALK$. Obținem $\frac{AB}{AL}=\frac{AC}{AK}=\frac{BC}{LK}$, iar din congruențele demonstrate, $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle EDF$, $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DEF$, $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle DFE$ și $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}$, rezultă că triunghiurile date sunt asemenea și scriem $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Teorema 3. (cazul de asemănare L.L.L.)
Dacă două triunghiuri au toate laturile respectiv proporționale, atunci triunghiurile sunt asemenea.



Demonstrație: Pentru triunghiurile ΔABC și ΔDEF, are loc $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}$.

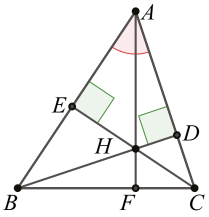
Pentru a demonstra congruența unghiurilor, alegem pe semidreptele AB și AC punctele M, respectiv N, astfel încât $AM \equiv DE$ și $AN \equiv DF$. Atunci, $\frac{AB}{AM}=\frac{AC}{AN}$ și, conform reciprocei teoremei lui Thales, $MN \parallel BC$.

Din teorema fundamentală a asemănării, obținem $\Delta ABC \sim \Delta AMN$; prin urmare, $\frac{AB}{AM}=\frac{AC}{AN}=\frac{BC}{MN}$. Ținând cont de relațiile $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}$ și $AM \equiv DE$, deducem că toate cele șase rapoarte precedente sunt egale, deci $\frac{BC}{MN}=\frac{BC}{EF}$. Rezultă $EF \equiv MN$. Prin urmare, triunghiurile ΔDEF și ΔAMN sunt congruente (L.L.L.). Folosind și condiția de congruență a unghiurilor din $\Delta ABC \sim \Delta AMN$, obținem $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle MAN \equiv \sphericalangle EDF$, $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle DEF$ și $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle ANM \equiv \sphericalangle DFE$.

Fiind îndeplinite cerințele din definiția asemănării a două triunghiuri, rezultă $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Suntem interesați să găsim construcții geometrice care generează triunghiuri asemenea.
Ne ajută, în acest sens, următorul rezultat:



Aplicația 1: Fie BD, CE înălțimi ale triunghiul ascuțitunghic ΔABC.

a) Demonstrați că triunghiurile ΔADB și ΔAEC sunt asemenea.

b) Scrieți congruențele unghiurilor corespunzătoare și proporționalitatea laturilor corespunzătoare pentru cele două triunghiuri.

Soluție: a) Fie BD și CE înălțimi ale triunghiul ΔABC. Triunghiurile ΔADB și ΔAEC au vârful comun A. Laturile opuse vârfului A în cele două triunghiuri sunt BD respectiv CE; deci triunghiurile sunt dreptunghice, adică $\sphericalangle ADB = \sphericalangle AEC = 90°$. Unghiul din A este comun, deci $\Delta ADB \sim \Delta AEC$.

b) Stabilim corespondența unghiurilor congruente în cele două triunghiuri:
$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A$, $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle AEC$ și $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle ACE$. Laturile corespunzătoare, (BD, CE), (AB, AC) și (AD, AE) sunt proporționale, deci $\frac{BD}{CE}=\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}$.

Observație: Rezultatul aplicației rămâne valabil și pentru perechile de triunghiuri (ΔBDC, ΔAFC), respectiv (ΔAFB, ΔCEB).

Comentariu: Din prima egalitate de rapoarte, găsim $BD \cdot AC = CE \cdot AB$. Din asemănarea triunghiurilor AFB și CEB, se obține $AF \cdot BC = CE \cdot AB$, adică $BD \cdot AC = CE \cdot AB = AF \cdot BC$, egalități care reprezintă un rezultat remarcabil: *într-un triunghi, produsul dintre lungimea unei înălțimi* și lungimea *laturii opuse este constant*. Dacă notăm $a = BC$, $b = AC$, $c = BC$ lungimile laturilor triunghiului și cu h_a, h_b, h_c înălțimile corespunzătoare, obținem: $a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$.

Observație: Valoarea produsului obținut mai sus este dublul ariei triunghiului ABC.

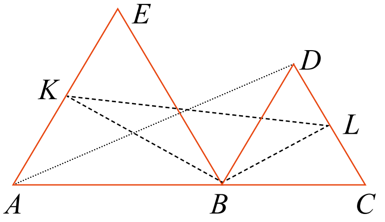
$$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{BD \cdot AC}{2}=\frac{CE \cdot AB}{2}=\frac{AF \cdot BC}{2}.$$

Temă de portofoliu

Demonstrați că rezultatul aplicației de mai sus rămâne valabil și dacă triunghiul este dreptunghic sau obtuzunghic.

Aplicația 2: Se consideră triunghiurile echilaterale ABE și BCD, $B \in AC$, punctul K mijlocul laturii AE și punctul L mijlocul laturii CD.

Demonstrați că: a) $\frac{AB}{BC} = \frac{BK}{BL}$; b) $\Delta ABD \sim \Delta KBL$.



Soluție: a) BK și BL sunt mediane în triunghiuri echilaterale, deci sunt și bisectoare: $\sphericalangle ABK = \sphericalangle CBL = 30°$. Triunghiurile ΔABK și ΔCBL au câte un unghi de 60° și câte unul de 30°. Conform cazului U.U., acestea sunt triunghiuri asemenea. Rezultă $\frac{AB}{BC} = \frac{BK}{BL}$.

b) Arătăm că triunghiurile ΔABD și ΔKBL sunt asemenea. Laturile celor două triunghiuri sunt AB, BD, AD, respectiv KB, BL, KL.

Deoarece $BC = BD$, relația demonstrată anterior devine $\frac{AB}{BD} = \frac{BK}{BL}$ sau $\frac{AB}{BK} = \frac{BD}{BL}$. Mai avem de demonstrat congruența unghiurilor $\sphericalangle ABD$ și $\sphericalangle KBL$.

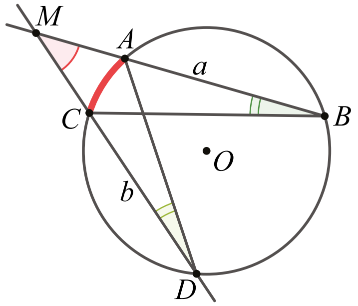
$\sphericalangle ABD = \sphericalangle ABC - \sphericalangle DBC = 180^\circ - 60^\circ = 120°$, iar

$\sphericalangle KBL = \sphericalangle ABC - \sphericalangle ABK - \sphericalangle CBL = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120°$.

Conform cazului de asemănare L.U.L., rezultă $\Delta ABD \sim \Delta KBL$.

Aplicația 3: Fie M un punct nesituat pe cercul $\mathcal{C}(O,R)$. Două secante a și b care trec prin punctul M intersectează cercul în punctele diferite A și B, respectiv C și D. Arătați că: $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

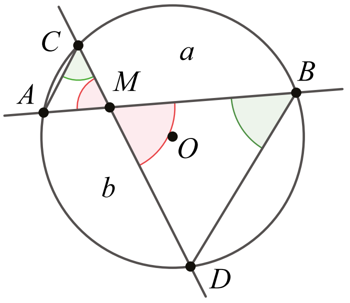
Soluție: Distingem două situații: $M \in \text{Ext}\,\mathcal{C}(O,R)$ și $M \in \text{Int}\,\mathcal{C}(O,R)$.



I. $M \in \text{Ext}\,\mathcal{C}(O,R)$.

Segmentele care formează relația de demonstrat sunt laturi ale triunghiurilor ΔMAD și ΔMCB. Unghiul M este comun pentru cele două triunghiuri, iar $\sphericalangle MDA = \sphericalangle MBC = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$, fiind unghiuri înscrise în cerc. Conform criteriului de asemănare U.U. rezultă $\Delta MAD \sim \Delta MCB$, deci $\frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} = \frac{AD}{CB}$, iar din prima egalitate de rapoarte, $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

II. $M \in \text{Int}\,\mathcal{C}(O,R)$.



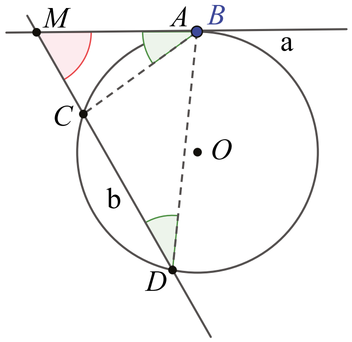
Considerăm triunghiurile ΔMAC și ΔMBD, în care $\sphericalangle AMC \equiv \sphericalangle BMD$ (opuse la vârf), iar $\sphericalangle MCA = \sphericalangle MBD = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2}$, fiind unghiuri înscrise în cerc. Conform criteriului de asemănare U.U., rezultă $\Delta MAC \sim \Delta MDB$, deci $\frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB} = \frac{AC}{DB}$.

Din prima egalitate de rapoarte obținem $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

Comentariu: În aplicația precedentă, dreptele a și b au fost considerate secante la cercul $\mathcal{C}(O,R)$.

Extindem problema la situația când una dintre drepte sau ambele sunt tangente la cerc.

Pentru cazul în care una dintre dreptele care trec prin punctul *M* (fie aceasta dreapta *a*) nu ar fi secantă la cerc, ci ar fi tangentă, punctul *A* coincide cu punctul *B*. Relația de demonstrat devine $MB^2 = MC \cdot MD$. Cercetând măsurile unghiurilor triunghiurilor ΔBCM și ΔDBM, observăm: unghiul $\sphericalangle M$ este unghi comun, iar $\sphericalangle MBC = \sphericalangle MDB = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$. Conform criteriului de asemănare U.U., rezultă $\Delta MBC \sim \Delta MDB$. Atunci, $\frac{MB}{MD} = \frac{MC}{MB} = \frac{BC}{DB}$, prima egalitate de rapoarte dând relația $MB^2 = MC \cdot MD$.

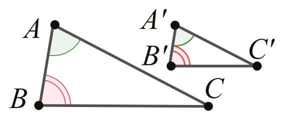
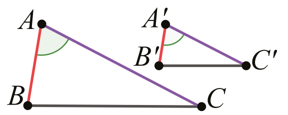
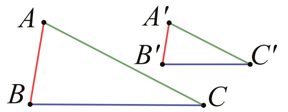


Dacă ambele drepte sunt tangente la cerc, atunci $A = B$ și $C = D$ și relația $MA^2 = MC^2$ este evidentă, deoarece tangentele dintr-un punct exterior la un cerc sunt congruente.

Reținem!

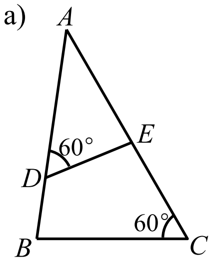
- Conform **definiției**, faptul că triunghiurile *ABC* și *A′B′C′* sunt asemenea reprezintă verificarea simultană a relațiilor: $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$ și $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$.

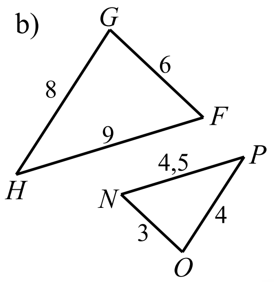
- **Cazurile de asemănare** sunt **condiții suficiente** de a demonstra asemănarea triunghiurilor. Pentru demonstrarea asemănării a două triunghiuri cazurile de asemănare reprezintă metode mai eficiente decât definiția.
Din cele șase egalități sau congruențe care apar în definiție, sunt suficiente doar două pentru ca toate celelalte să rezulte.

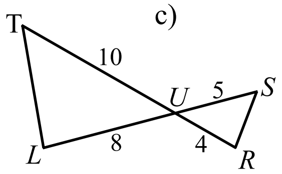
Denumire	Ipoteza	Configurația geometrică	Concluzia
Cazul U.U. (congruența a două unghiuri)	$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$ $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$		$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$ $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$
Cazul L.U.L. (o congruență de unghiuri și o egalitate de rapoarte)	$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$ $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = k$		$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$ $\frac{BC}{B'C'} = k$
Cazul L.L.L. (două egalități de rapoarte)	$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$		$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$ $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$ $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

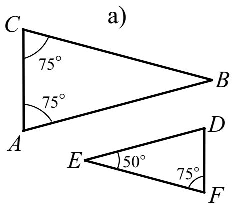
1 Numiți triunghiurile asemenea din desenele de mai jos, precizând cazul de asemănare pentru fiecare pereche de triunghiuri.

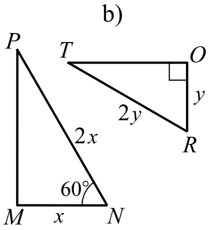






2 Arătați că perechile de triunghiuri, reprezentate în figurile de mai jos, sunt asemenea. Scrieți pentru fiecare situație proporționalitatea laturilor și congruența unghiurilor.





3 Desenați triunghiul isoscel ABC, cu $\sphericalangle BAC = 120°$ și punctul D situat pe latura BC, astfel încât $\sphericalangle ADC = 60°$.

a) Arătați că desenul conține două triunghiuri asemenea.

b) Demonstrați că $AB^2 = BC \cdot BD$.

4 Fie BD și CE înălțimi ale triunghiului ABC. Demonstrați că $\Delta ABD \sim \Delta ACE$.

5 Triunghiurile ΔABC și ΔDEF sunt asemenea, iar punctele M și N aparțin laturilor BC, respectiv EF. Arătați că:

a) dacă AM și DN sunt mediane, atunci $\Delta ABM \sim \Delta DEN$.

b) dacă AM și DN sunt bisectoare, atunci $\Delta ACM \sim \Delta DFN$.

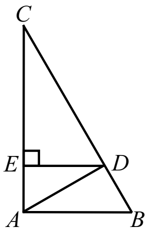
c) dacă AM și DN sunt înălțimi, atunci $\dfrac{AM}{DN} = \dfrac{BC}{EF}$.

6 ΔDEF este un triunghi echilateral cu perimetrul de 30 cm. DA este mediană, EB este înălțime, iar FC este bisectoarea unghiului $\sphericalangle DFE$, $C \in DE$.

a) Demonstrați că $\Delta DEF \sim \Delta ABC$.

b) Calculați perimetrul patrulaterului $ABDE$.

7 Segmentul AD este înălțime în triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, iar segmentul DE este înălțime în triunghiul ADC.



a) Demonstrați că $\Delta ABC \sim \Delta DAC$.

b) Demonstrați că $\Delta ABD \sim \Delta CDE$.

c) Dacă $AC = 16$ cm, $CD = 12,8$ cm, calculați lungimile segmentelor BC și EC.

8 Fie $ABCD$ un dreptunghi și $E \in AB$, astfel încât $\sphericalangle BCE \equiv \sphericalangle BDC$.

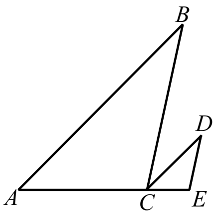
a) Demonstrați că $BC^2 = BE \cdot CD$.

b) Calculați lungimea segmentului AE, știind că $AB = 8$ cm și $BC = 6$ cm.

9 În desenul alăturat, avem $AB \parallel CD$, $BC \parallel$ DE și $AE = 4 \cdot CE$. Determinați:

a) raportul perimetrelor triunghiurilor ΔABC și ΔCDE;

b) raportul ariilor triunghiurilor ΔCDE și ΔABC.

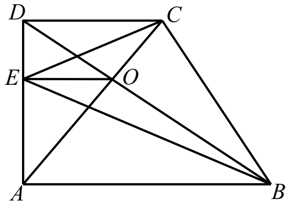


10 În paralelogramul $ABCD$, $AE \perp CD$, $E \in CD$ și $AE \cap BC = \{F\}$. Analizând cazurile în care $\sphericalangle BAD$ este ascuțit sau obtuz, stabiliți dacă triunghiurile ΔADE și ΔFCE sunt asemenea.

11 Se consideră trapezul dreptunghic $ABCD$, $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$. Paralela la bazele trapezului, prin punctul de intersecție al diagonalelor, intersectează AD în E.

a) Demonstrați că $\Delta ABE \sim \Delta DCE$.

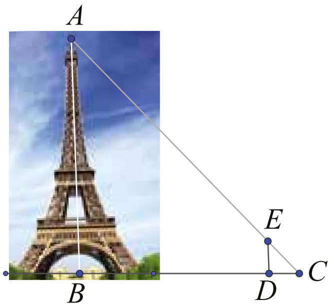
b) Demonstrați că EO este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BEC$.



L3 Aplicații practice ale asemănării triunghiurilor

Măsurarea obiectelor, chiar și cu ajutorul instrumentelor geometrice, poate conduce la valori aproximative. De multe ori, măsurarea directă este imposibilă, fie din cauza distanțelor foarte mari, fie din cauza obstacolelor care nu permit accesul în apropierea obiectelor.
Thales a aplicat proprietățile geometrice în rezolvarea unor probleme practice de această natură.
Este celebră problema aproximării înălțimii unei piramide folosind umbrele. Thales folosea proprietățile triunghiurilor asemenea pentru a afla distanța de la țărm la o corabie sau distanța dintre două corăbii, el aflându-se pe țărm.
Trebuie menționat faptul că, în aceste situații, valorile obținute sunt aproximative nu din cauza calculelor, folosind aproximări sau estimări ale numerelor, ci din cauza erorilor care pot interveni în stabilirea unor direcții, în măsurarea unor distanțe sau a unor măsuri de unghiuri. De-a lungul timpului, au fost create instrumente performante care apropie foarte mult rezultatele obținute de cele reale. Cu toate acestea, folosirea tehnicilor practice, intuitive, sunt foarte interesante și sunt de mare folos în anumite situații.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni



A. Aproximarea distanțelor, în situații practice, folosind asemănarea

1) ***Aproximarea înălțimii unor obiecte***

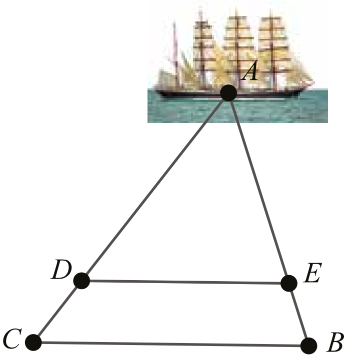
Ne propunem să calculăm înălțimea Turnului Eiffel din Paris. Măsurăm distanța de la centrul bazei turnului la punctul din exterior unde ne aflăm, distanța $BC = a$.
Plasăm între raza vizuală care merge spre vârf și cea care merge spre punctul de la bază, pe verticală, o mărime cunoscută $DE = b$ și măsurăm distanța $DC = c$.
Avem acum date suficiente pentru a determina înălțimea turnului.
Dreptele AB și DE sunt paralele (ambele au direcția verticală) și atunci triunghiurile ΔABC și ΔEDC sunt asemenea. Proporționalitatea laturilor este $\frac{AB}{ED} = \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{EC}$, iar BC, ED și CD sunt cunoscute.

Din $\frac{AB}{ED} = \frac{BC}{DC}$, aflăm înălțimea turnului: $AB = \frac{BC \cdot ED}{DC}$ sau $AB = \frac{a \cdot b}{c}$.

Temă de portofoliu

Imaginați-vă că sunteți la Paris, împreună cu prietenul vostru, care are înălțimea de 180 cm. Acesta vă ajută să găsiți înălțimea turnului, plasându-se în poziția DE. Ați măsurat distanțele $BC = 540$ m și $DC = 3$ m. Calculați înălțimea turnului, parcurgând pașii descriși în aplicația de mai sus. (Răspuns: $H_{\text{turn}} = 324$ m)

2) ***Aproximarea distanței până la un punct fix***



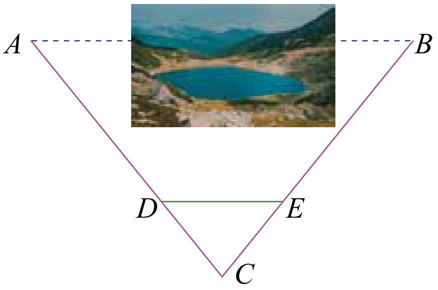
Suntem într-un punct B pe plajă și vrem să estimăm distanța până la un vapor aflat în larg, în punctul A. Cum procedăm? Iată o posibilă variantă în figura alăturată.
Ne deplasăm din punctul B până în punctul C, măsurând distanța BC. Marcăm pe nisip direcțiile BA și CA. Pe direcția BA considerăm punctul E, prin care ducem o paralelă la BC. Aceasta intersectează dreapta AC în D. Măsurăm lungimile BE și ED.
În triunghiul ABC, cu $DE \parallel BC$, aplicăm teorema fundamentală a asemănării

și rezultă: $\frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AC}$. Din $\frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC}$ sau $\frac{AB - AE}{AB} = \frac{BC - DE}{BC}$ rezultă distanța până la vapor: $d = AB = \frac{EB \cdot BC}{BC - DE}$.

Temă de portofoliu

Parcurgeți pașii descriși în rezolvarea aplicației 2, pentru $BC = 60$ m, $DE = 58$ m și $BE = 10$ m.

3) *Aproximarea distanței dintre două puncte*



Ne aflăm într-un punct A și dorim să calculăm distanța până la punctul B. Observăm că măsurarea directă este imposibilă din cauza prezenței unui obstacol (figura alăturată). Trebuie să găsim o posibilitate de a determina distanța AB.

Găsim un punct C din care putem măsura distanțele AC și BC. Trasăm direcțiile CA și CB. Dorim să fixăm un segment DE cu capetele pe CA, respectiv CB, astfel încât DE și AB să fie paralele. Trebuie ca între punctele D și E să nu fie alte obstacole. Vom proceda astfel:

1) Alegem punctul D, pe segmentul CA.

2) Măsurăm lungimile CD, AC și BC.

3) Luăm punctul E pe segmentul CB astfel încât $\dfrac{CE}{CB} = \dfrac{CD}{CA}$.

4) Măsurăm segmentul DE.

5) Aplicăm reciproca teoremei lui Thales și rezultă $DE \parallel AB$.

Teorema fundamentală a asemănării aplicată în ΔABC, conduce la: $\dfrac{DE}{AB} = \dfrac{CD}{CA} = \dfrac{CE}{CB}$.

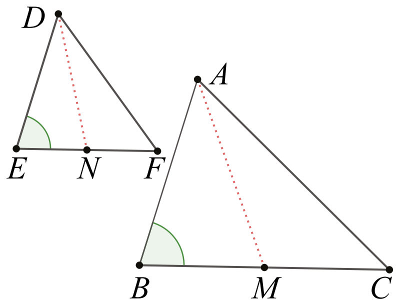
Rezultă $AB = \dfrac{CA}{CD} \cdot DE$ și distanța AB este aflată.

Exemplu: Pentru cazul particular $AC = 15$ m și $BC = 45$ m, putem alege D, astfel încât $CD = 1$ m. Luăm punctul E pe segmentul CB, astfel încât $\dfrac{CE}{CB} = \dfrac{CD}{CA}$, adică $\dfrac{CE}{45} = \dfrac{1}{15}$. Rezultă $CE = 3$ m, cu condiția ca măsurarea segmentului DE astfel obținut să nu fie împiedicată de vreun obstacol. În caz contrar, reluăm alegerea punctului D, convenabil. Prin măsurare, găsim $DE = 5$ m. Atunci, $\dfrac{5}{AB} = \dfrac{1}{15} = \dfrac{3}{45}$, adică $AB = 75$ m.

B. Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea

Știm că în calculul ariei triunghiului intervine lungimea înălțimii. Ne va fi util rezultatul:

Teorema 1.
Dacă două triunghiuri sunt asemenea, cu raportul de asemănare k, atunci:
- a) raportul medianelor corespunzătoare este egal cu k;
- b) raportul înălțimilor corespunzătoare este egal cu k;
- c) raportul bisectoarelor corespunzătoare este egal cu k.



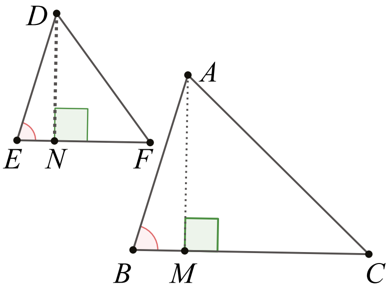
Demonstrație: Fie triunghiurile asemenea ΔDEF și ΔABC, cu raportul de asemănare k.

Atunci: $\sphericalangle D \equiv \sphericalangle A$, $\sphericalangle E \equiv \sphericalangle B$, $\sphericalangle F \equiv \sphericalangle C$ și $\dfrac{DE}{AB} = \dfrac{EF}{BC} = \dfrac{DF}{AC} = k$.

a) Arătăm că raportul dintre medianele din D și A este egal cu k.
Notăm cu M și N mijloacele laturilor BC, respectiv EF.

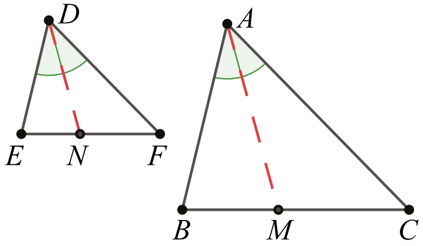
Atunci, $\dfrac{EN}{BM} = \dfrac{\frac{EF}{2}}{\frac{BC}{2}} = \dfrac{EF}{BC} = k$ și $\dfrac{DE}{AB} = \dfrac{EN}{BM}$.

Din ipoteză $\sphericalangle E \equiv \sphericalangle B$ și conform criteriului L.U.L., obținem $\Delta DEN \sim \Delta ABM$, deci $\frac{DN}{AM} = \frac{DE}{AB} = k.$ Am arătat că raportul medianelor corespunzătoare a două triunghiuri asemenea este egal cu raportul de asemănare a triunghiurilor.



b) Arătăm că raportul dintre înălțimile din D și din A este egal cu k. Fie DN și AM înălțimi în triunghiurile ΔDEF și ΔABC. Atunci, cele două triunghiuri au unghiurile drepte $\sphericalangle DNE$ și $\sphericalangle AMB$ congruente. Din $\sphericalangle E \equiv \sphericalangle B$ și cazul de asemănare U.U., rezultă $\Delta DEN \sim \Delta ABM$, deci $\frac{DN}{AM} = \frac{DE}{AB} = k.$ Am arătat că raportul înălțimilor corespunzătoare a două triunghiuri asemenea este egal cu raportul de asemănare al triunghiurilor.

c) Să precizăm, mai întâi, că atunci când vorbim de lungimile bisectoarelor ne referim la lungimile segmentelor determinate de un vârf al triunghiului cu punctul de intersecție a bisectoarei cu latura opusă. Fie DN bisectoarea unghiului $\sphericalangle EDF$, $N \in EF$ și AM bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$, $M \in BC$.



Considerând segmentele DN și AM, situate pe bisectoare, demonstrăm că raportul lor este k.

Deoarece $\sphericalangle BAM = \frac{\sphericalangle BAC}{2} = \frac{\sphericalangle EDF}{2} = \sphericalangle EDN$, $\sphericalangle B = \sphericalangle E$, conform cazului de asemănare U.U. rezultă $\Delta DEN \sim \Delta ABM$, adică $\frac{DN}{AM} = \frac{DE}{AB} = k.$

Teorema 2.
Dacă două triunghiuri sunt asemenea, cu raportul de asemănare k, atunci raportul ariilor acestora este k^2.

Demonstrație: Vom folosi figura de la teorema 1. Considerăm triunghiurile asemenea ΔDEF și ΔABC, cu raportul de asemănare k, adică $\frac{EF}{BC} = k.$ Am arătat în teorema 1 că raportul înălțimilor corespunzătoare este $\frac{DN}{AM} = k.$ Calculând raportul ariilor, se obține: $\frac{\mathcal{A}_{\Delta DEF}}{\mathcal{A}_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{EF \cdot DN}{2}}{\frac{BC \cdot AM}{2}} = \frac{EF}{BC} \cdot \frac{DN}{AM} = k \cdot k = k^2.$

Rezultatul demonstrat se poate formula și astfel:
Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare.

Aplicația 1: Triunghiul ΔABC este dreptunghic, $\sphericalangle BAC = 90°$, $AB = 8$ cm, $AC = 6$ cm. Prelungim segmentul AB cu $BD = 1$ cm și fie punctul E pe semidreapta AC astfel încât $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle ACB$.

a) Arătați că triunghiurile ΔABC și ΔAED sunt asemenea.

b) Calculați aria triunghiului ΔADE.

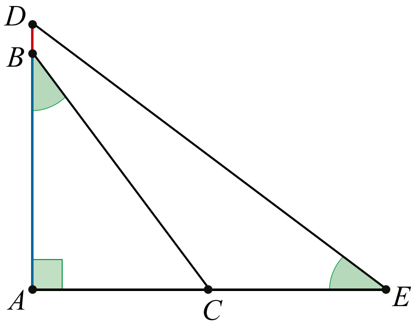
Soluție: a) Asemănarea triunghiurilor ΔABC și ΔAED este imediată și are loc conform cazului U.U. ($\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle EAD$ unghi comun și $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle ADE$ din ipoteză).

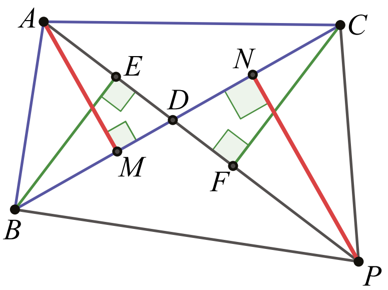
b) Din asemănarea triunghiurilor ΔABC și ΔAED, obținem raportul de asemănare

$k = \frac{AC}{AD} = \frac{AC}{AB + BD} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$ Deoarece $\frac{\mathcal{A}_{\Delta ABC}}{\mathcal{A}_{\Delta AED}} = k^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

și $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24$ (cm^2).

se obține $\mathcal{A}_{\Delta AED} = \mathcal{A}_{\Delta ABC} : \frac{4}{9} = 24 \cdot \frac{9}{4} = 54$ (cm^2).





Aplicația 2: Fie un triunghi ABC și un punct P în interiorul unghiului $\sphericalangle BAC$. Dreapta AP intersectează latura BC în punctul D. Atunci:

a) $\dfrac{\mathcal{A}_{\Delta ABP}}{\mathcal{A}_{\Delta ACP}} = \dfrac{DB}{DC}$; b) $\dfrac{\mathcal{A}_{\Delta ABC}}{\mathcal{A}_{\Delta PBC}} = \dfrac{DA}{DP}$.

Soluție: a) Fie BE, CF înălțimi în triunghiurile ABP, respectiv ACP. Triunghiurile ΔBDE și ΔCDF sunt asemenea deoarece

$\sphericalangle BED \equiv \sphericalangle CFD$ (90°) și $\sphericalangle BDE \equiv \sphericalangle CDF$ (opuse la vârf). Atunci $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{BE}{CF}$.

Se obține $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{BE}{CF} = \dfrac{BE \cdot AP}{CF \cdot AP} = \dfrac{2 \cdot \mathcal{A}_{ABP}}{2 \cdot \mathcal{A}_{ACP}} = \dfrac{\mathcal{A}_{ABP}}{\mathcal{A}_{ACP}}$.

b) Fie AM și PN înălțimi ale triunghiurilor ΔABC și ΔPBC. Triunghiurile ΔADM și ΔPDN sunt asemenea, deoarece $\sphericalangle AMD \equiv \sphericalangle PND$ (90°) și $\sphericalangle ADM \equiv \sphericalangle PDN$ (opuse la vârf). Atunci $\dfrac{DA}{DP} = \dfrac{AM}{PN}$.

Se obține $\dfrac{DA}{DP} = \dfrac{AM}{PN} = \dfrac{AM \cdot BC}{PN \cdot BC} = \dfrac{2 \cdot \mathcal{A}_{ABC}}{2 \cdot \mathcal{A}_{PBC}} = \dfrac{\mathcal{A}_{ABC}}{\mathcal{A}_{PBC}}$.

Aplicația 3

Se consideră triunghiul ABC și punctele D, E, F situate pe laturile AB, BC, respectiv AC, astfel încât $DE \parallel AC$ și $DF \parallel BC$. Se știe că aria triunghiului ADF este 4 cm² și aria triunghiului BDE este 9 cm². Calculați aria triunghiului ABC.

Soluție:

Triunghiurile ADF și ABC sunt asemenea deci $\dfrac{\mathcal{A}_{ADF}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \dfrac{AD^2}{AB^2}$ (1).

Triunghiurile BDE și BAC sunt asemenea deci $\dfrac{\mathcal{A}_{BDE}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \dfrac{BD^2}{AB^2}$ sau $\dfrac{\mathcal{A}_{ABC}}{\mathcal{A}_{BDE}} = \dfrac{AB^2}{BD^2}$ (2).

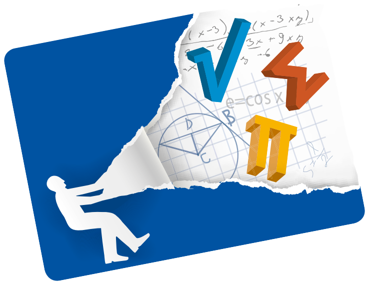
Înmulțind relațiile (1) și (2) se obține $\dfrac{\mathcal{A}_{ADF}}{\mathcal{A}_{ABC}} \cdot \dfrac{\mathcal{A}_{ABC}}{\mathcal{A}_{BDE}} = \dfrac{AD^2}{AB^2} \cdot \dfrac{AB^2}{BD^2}$, $\dfrac{\mathcal{A}_{ADF}}{\mathcal{A}_{BDE}} = \dfrac{AD^2}{DB^2}$

$\dfrac{4}{9} = \dfrac{AD^2}{DB^2}$ deci $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{2}{3}$. Cu proporții derivate deducem că $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{2}{5}$.

Din (1) rezultă $\dfrac{\mathcal{A}_{ADF}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \left(\dfrac{AD}{AB}\right)^2$, $\dfrac{4}{\mathcal{A}_{ABC}} = \dfrac{4}{25}$, de unde $\mathcal{A}_{ABC} = 25$ cm².

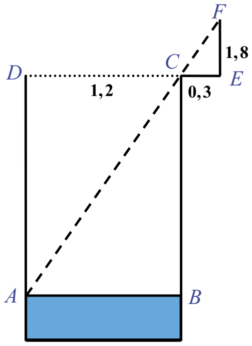
Reținem!

- Dacă două triunghiuri sunt asemenea, atunci **medianele** corespunzătoare, **înălțimile** corespunzătoare și **bisectoarele** corespunzătare determină rapoarte egale cu raportul de asemănare a triunghiurilor.
- Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare.

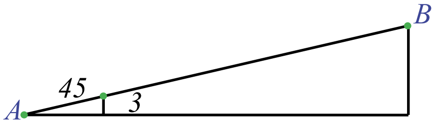


Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

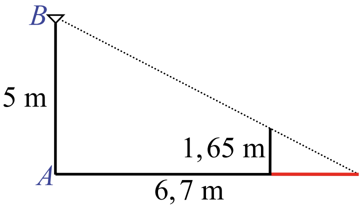
1 Sandu este în vacanță la bunici. El constată că trebuie făcute reparații la fântâna din grădină și pentru aceasta trebuie să afle adâncimea fântânii până la nivelul apei ($h = AD$). Nu are sfoară atât de lungă, dar este un bun geometru și recurge la o metodă inedită:
Sandu are 1,8 m înălțime și dacă se apropie la 0,3 m de fântână, el vede suprafața apei. Știe că diametrul fântânii este de 1,2 m și afirmă că acum poate afla (cu aproximație) adâncimea fântânii până la nivelul apei. Observați desenul. Cum a calculat Sandu?



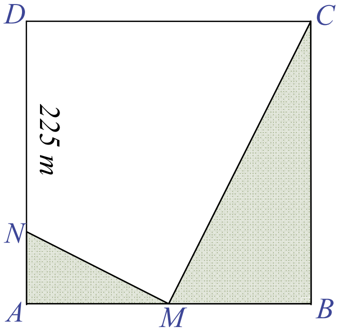
2 Un funicular cu tracțiune prin cablu transportă minereu și se deplasează în linie dreaptă, pe traseul AB, lung de 375 m. După ce parcurge, din punctul A, distanța de 45 m, funicularul a ajuns la înălțimea de 3 m. Calculați înălțimea la care este situat punctul de sosire, B.



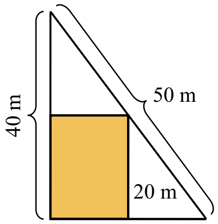
3 Terenul de joacă din curtea lui Raul este iluminat de un bec, situat pe un stâlp, la înălțimea de 5 m. Raul are înălțimea 1,65 m și se află la 6,7 m de stâlp.
Calculați lungimea umbrei lui Raul.



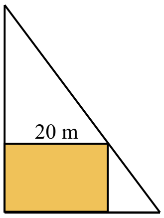
4 Un centru comercial este construit pe o suprafață pătratică $ABCD$, o schiță a acestuia fiind reprezentată în figura alăturată. Suprafața delimitată de triunghiurile AMN și BCM este destinată magazinelor, punctul M fiind mijlocul segmentului AB și $MN \perp MC$. Se știe că $DN = 225$ m. Calculați suprafața destinată magazinelor.



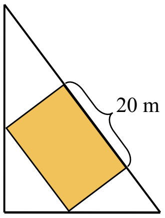
5 Vlad dorește să amenajeze un teren de baschet cu lungimea de 20 m. Grădina sa are forma unui triunghi dreptunghic, cu laturile de dimensiuni 30 m, 40 m, 50 m. Constructorul îi prezintă trei variante (figura de mai jos). Vlad a ales varianta în care terenul are cea mai mare suprafață. Care este aceasta?



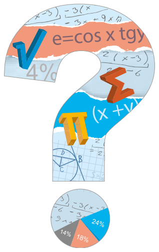
a)



b)



c)

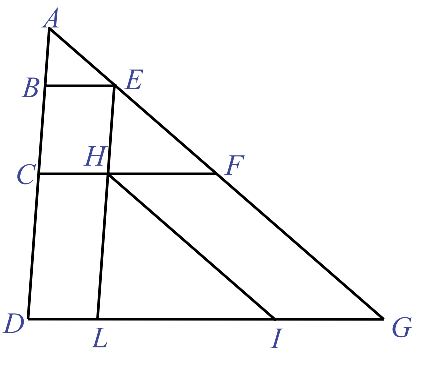


Evaluare sumativă

Se acordă 10 puncte din oficiu.

I. *Asociați fiecărei cifre corespunzătoare enunțurilor din coloana A, litera care indică răspunsul corect, aflat în coloana B*

1. În desenul prezentat, $BE \parallel CF \parallel DG$, $EL \parallel AD$, $EL \cap CF = \{H\}$, $HI \parallel FG$ și $AB = 4$ cm, $BC = 6$ cm, $AD = 20$ cm, $AG = 30$ cm, $DG = 24$ cm. Atunci:



	A	B
5p	**1.** $CF =$	a. 3,6 cm b. 12 cm c. 4,8 cm d. 37 cm e. 15 cm f. 18 cm
5p	**2.** $FG =$	
5p	**3.** $DL =$	
5p	**4.** $\mathcal{P}_{HIL} =$	

II. *La cerințele următoare alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.*

5p	**1.** În pătratul $ABCD$, $AB = 6$ cm, E este mijlocul laturii CD, $BE \cap AC = \{F\}$ și $FM \parallel CD$, $M \in BC$. Lungimea segmentului FM este: A. 2 cm B. 3 cm C. 4 cm D. 6 cm
10p	**2.** Prin centrul de greutate al triunghiului echilateral DEF se construiește o paralelă la latura EF, care intersectează laturile DE și DF în punctele T, respectiv S. Dacă $EF = 15$ cm, atunci perimetrul triunghiului DTS este: A. 15 cm B. 20cm C. 25 cm D. 30 cm
5p	**3.** Pe latura CD a dreptunghiului $ABCD$ se iau punctele E și F, cu $DE = CF = 2$ cm. Dacă $AB = 12$ cm și $AF \cap BE = \{P\}$. Atunci: A. $AP = 1,(3) \cdot PF$ B. $AP = 1,5 \cdot PF$ C. $AP = 2 \cdot PF$ D. $AP = PF$
5p	**4.** În triunghiul ABC, $\sphericalangle ABC = 90^\circ$, $AB = 30$ cm, $BC = 40$ cm, $AC = 50$ cm și $D \in BC$, $CD = 0,75 \cdot BC$. Distanța de la punctul D la dreapta AC este: A. 15 cm B. 16 cm C. 18 cm D. 20 cm

III. *La problemele următoare se cer rezolvări complete.*

	1. În triunghiul MAB, bisectoarele unghiurilor MAB și MBA se intersectează în punctul I, iar paralela prin I la AB intersectează latura MA în punctul C și latura MB în punctul D. Se știe că $MC = 12$ cm, $MA = 18$ cm, $MD = 8$ cm.
5p	a) Calculați lungimea segmentului BD.
10p	b) Arătați că $CI = 6$ cm.
10p	c) Determinați lungimea segmentului AB.
	2. Fie P și Q mijloacele laturilor BC, respectiv CD ale rombului $ABCD$. Dreapta AP intersectează dreapta BD în punctul E, dreapta BQ intersectează dreapta AC în punctul F și $AC \cap BD = \{O\}$.
10p	a) Demonstrați că triunghiurile ADE și PBE sunt asemenea.
10p	b) Calculați raportul $\frac{EO}{BD}$.
5p	c) Demonstrați că dreptele EF și BC sunt paralele.

7

Relații metrice în triunghiul dreptunghic

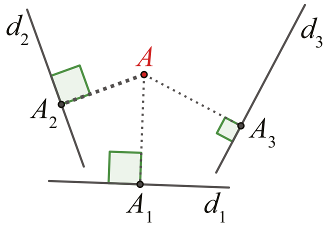
Competențe specifice:

1.7	2.7	3.7	4.7	5.7	6.7

7.1 Proiecții ortogonale pe o dreaptă. Teorema înălțimii. Teorema catetei

L1 Proiecții ortogonale pe o dreaptă

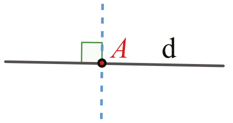
Definiția 1: Piciorul perpendicularei duse dintr-un punct A, pe o dreaptă d, se numește **proiecția ortogonală a punctului A pe dreapta d** (sau, pe scurt, **proiecția punctului A pe dreapta d**).



Dacă M este proiecția punctului A pe dreapta d, vom scrie $M = pr_d A$.
Se mai citeștre și „punctul M este proiecția pe dreapta d a punctului A"

Exemple:

a) Punctul A_1 este proiecția punctului A pe dreapta d_1 pentru că $AA_1 \perp d_1$ și $A_1 \in d_1$.
Punctul A_2 este proiecția punctului A pe dreapta d_2 pentru că $AA_2 \perp d_2$ și $A_2 \in d_2$.
Punctul A_3 este proiecția punctului A pe dreapta d_3 pentru că $AA_3 \perp d_3$ și $A_3 \in d_3$.
Vom scrie $A_1 = pr_{d_1} A$, $A_2 = pr_{d_2} A$, $A_3 = pr_{d_3} A$.

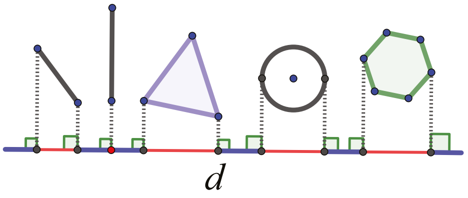


În toate aceste exemple, punctul A este exterior dreptei pe care se proiectează.

b) Punctul A aparține dreptei d. Piciorul perpendicularei pe dreapta d, care conține punctul A este chiar punctul A, deci proiecția sa pe dreapta d este punctul A însuși.

Figurile geometrice sunt mulțimi de puncte, deci putem vorbi despre proiecția ortogonală a unei mulțimi de puncte pe o dreaptă.

Definiția 2: *Mulțimea proiecțiilor tuturor punctelor unei mulțimi F pe o dreaptă **d** se numește proiecția mulțimii (figurii) pe dreapta **d**.*

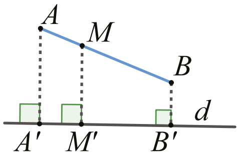


Exemple: În figura alăturată, sunt reprezentate mai multe figuri geometrice, împreună cu proiecțiile lor pe o dreaptă d. Observăm că proiecțiile, reprezentate cu roșu, sunt segmente sau puncte.

Teorema.

1) Dacă $AB \not\perp d$, atunci proiecția segmentului AB pe dreapta d este segmentul $A'B'$, unde $A' = pr_d A$ și $B' = pr_d B$.
2) Dacă $AB \perp d$, atunci proiecția segmentului AB pe dreapta d este punctul A'.

Demonstrație: Fie segmentul AB și dreapta d. Vom considera cazurile:



1) Segmentul AB nu este situat pe o dreaptă perpendiculară pe d.

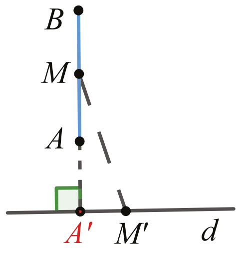
Notăm cu A', B' proiecțiile punctelor A, respectiv B pe dreapta d, evident $A' \neq B'$. Vom arăta că proiecția pe d, a segmentului AB, este segmentul $A'B'$.

Pentru un punct M oarecare pe segmentul AB, notăm M' proiecția sa pe dreapta d.

Avem $AA' \parallel BB' \parallel MM'$, deoarece sunt perpendiculare pe aceeași dreaptă d.

Considerând dreptele MM' și AA' paralele, rezultă că A și A' sunt de aceeași parte a dreptei MM'. Analog B și B' sunt de aceeași parte a dreptei MM'. Cum A și B sunt de o parte și de alta a dreptei MM', rezultă că și A' și B' sunt de o parte și de alta a acesteia, adică M' se găsește pe segmentul $A'B'$.

Vom demonstra, de asemenea, că orice punct al segmentului $A'B'$ este proiecția unui punct din AB.



Luăm un punct M' pe segmentul $A'B'$ în care ridicăm o perpendiculară pe d. Notăm cu M punctul în care perpendiculara pe d intersectează AB. Relația $AA' \parallel MM' \parallel BB'$, conduce la faptul că M se află între A și B, deci aparține segmentului AB.

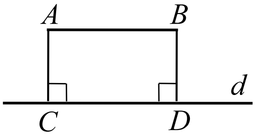
2) Segmentul AB este perpendicular pe d, adică dreptele AB și d formează un unghi drept și deci se intersectează într-un punct notat A'.

Vom arăta că proiecția segmentului AB pe d este punctul A', adică toate punctele segmentului AB au aceeași proiecție și anume punctul A'.

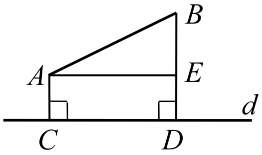
Presupunem că există un punct M pe AB astfel încât proiecția sa M' să nu fie A', deci $M' \neq A'$. S-ar obține triunghiul $MA'M'$ cu două unghiuri drepte, ceea ce este fals. Prin urmare, presupunerea făcută este falsă, deci proiecțiile tuturor punctelor segmentului AB se suprapun cu punctul A'.
Rezultă că proiecția segmentului AB pe dreapta d este punctul A'.

Aplicația 1

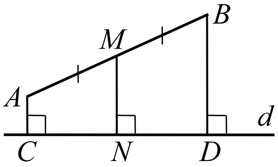
a) Proiecția unui segment pe o dreaptă are lungimea cel mult egală cu lungimea segmentului.
b) Proiecția mijlocului unui segment pe o dreaptă este mijlocul proiecției segmentului.
Soluție: a) Fie AB un segment oarecare, d o dreaptă și $C = pr_d A$, $D = pr_d B$. Atunci, proiecția segmentului AB pe dreapta d este segmentul CD și scriem $pr_d AB = CD$.
Vom compara lungimile segmentelor AB și CD.
Cazul când $AB \perp d$ este evident, deoarece proiecția segmentului AB se reduce la un punct, $C = D$.
Rămân de analizat cazurile a$_1$) când $AB \parallel d$ și a$_2$) când $AB \nparallel d$.



a$_1$) Dacă $AB \parallel d$, din $AC \perp d$, $BD \perp d$ rezultă $AC \parallel BD$ și $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BDC = 90°$.
Deoarece $AB \parallel CD$, rezultă că $ABDC$ este dreptunghi și $CD = AB$.

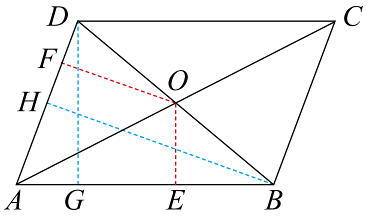


a$_2$) Dacă dreapta AB nu este paralelă cu dreapta d, construim $AE \perp BD$, $E \in BD$.
Patrulaterul $AEDC$ este dreptunghi și $AE = CD$. În triunghiul ABE, cu $\sphericalangle AEB = 90°$, lungimea oricărei catete este mai mică decât lungimea ipotenuzei, adică $AE < AB$ sau $CD < AB$.
Din a$_1$) și a$_2$) rezultă $CD \leq AB$.



b) Cazul $AB \perp d$ nu trebuie discutat, deoarece $C = D$. Rămâne de analizat cazul $AB \not\perp d$.
Perpendicularele din A, M și B pe d sunt paralele echidistante (M este mijlocul lui AB). Folosind teorema paralelelor echidistante, rezultă că N este mijlocul lui CD.

Aplicația 2



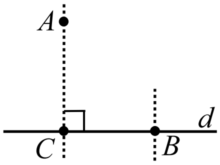
Se consideră paralelogramul $ABCD$ cu unghiul A ascuțit, în care diagonala BD nu este perpendiculară pe latura AD și $AC \cap BD = \{O\}$. Punctele E și F sunt proiecțiile ortogonale ale punctului O pe laturile AB, respectiv AD, iar punctele G și H sunt proiecțiile ortogonale ale punctelor D și B pe laturile AB, respectiv AD.
Demonstrați că $BE \cdot FH = DF \cdot GE$.
Soluție: Din $E = pr_{AB} O$, $G = pr_{AB} D$ și $B = pr_{AB} B$, rezultă: proiecția segmentului BD pe dreapta AB este segmentul BG, iar punctul O, mijlocul segmentului BD, se proiectează în E, mijlocul segmentului BG. Rezultă $BE = EG$. Notăm $BE = a$. (1)
Din $F = pr_{AD} O$, $H = pr_{AD} B$ și $D = pr_{AD} D$, rezultă: proiecția segmentului BD pe dreapta AD este segmentul DH, iar punctul O, mijlocul segmentului BD, se proiectează în F, mijlocul segmentului DH. Rezultă $DF = FH$.
Notăm $DF = b$. (2)
Din relațiile (1) și (2), obținem $BE \cdot FH = a \cdot b = DF \cdot GE$.

Temă de portofoliu

Reformulați și rezolvați **Aplicația 2** pentru cazul când unghiul A este obtuz.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

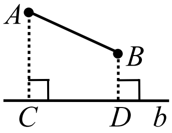
1 În figura de mai jos, sunt reprezentate punctele A, B, C și dreapta d astfel încât $A \notin d, B \in d, C \in d$ și $AC \perp d$. Copiați pe caiete propozițiile de mai jos, apoi completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate.



a) Punctul C este proiecția punctului … pe dreapta d.

b) Punctul B este proiecția punctului … pe dreapta d.

2 Punctele A și B sunt situate de aceeași parte a dreptei b, $AB \not\parallel b$. Dreptele AC și BD sunt perpendiculare pe dreapta b, cu $C \in b$, $D \in b$.



Precizați: $pr_b A$, $pr_b B$ și $pr_b AB$.

Observație: în problemele 2, 3, 4, 9 notația $pr_d AB$ reprezintă proiecția segmentului AB pe dreapta b.

3 Fie punctele E, G și dreapta d, astfel încât $E \notin d$ și $G \in d$. Construiți $EF \perp d$, $F \in d$. Precizați: $pr_d E$, $pr_d G$ și $pr_d EG$.

4 Fie punctele A, B situate de o parte și de alta a dreptei d și $AB \cap d = \{C\}$.
Fie $AD \perp d$, $D \in d$ și $BE \perp d$, $E \in d$.

a) Precizați: $pr_d A$, $pr_d B$, $pr_d C$, $pr_d AB$.

b) Dacă C este mijlocul segmentului AB, arătați că $pr_d C$ este mijlocul segmentului DE.

5 Desenați într-un sistem de axe ortogonale xOy punctele $A(-2; 4)$, $B(0; 3)$, $C(3; -2)$, $D(5; 0)$, apoi punctele A', B', C', D' proiecțiile punctelor A, B, C respectiv D pe axa Ox. Precizați coordonatele punctelor A', B', C', D'.

6 Desenați într-un sistem de coordonate xOy punctele $A(-3; -4)$, $B(0; 2)$, $C(1; 5)$, $D(3; 0)$, apoi punctele A', B', C', D' proiecțiile punctelor A, B, C, respectiv D pe axa Oy. Precizați coordonatele punctelor A', B', C', D'.

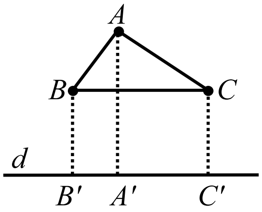
7 Punctul P este situat în interiorul unghiului xOy, iar proiecțiile segmentului OP pe laturile unghiului sunt segmentele congruente OA, respectiv OB. Demonstrați că semidreapta OP este bisectoarea unghiului xOy.

8 De o parte și de alta a dreptei d se consideră punctele M și N, $d \cap MN = \{O\}$, iar $A = pr_d M$, $B = pr_d N$. Arătați că:

a) Dacă $OM = ON$, arătați că $OA = OB$.

b) Dacă $OA = OB$, arătați că $OM = ON$.

9 În figura de mai jos, punctele A, B, C sunt situate de aceeași parte a dreptei d, cu $BC \parallel d$.



Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

p_1: $pr_d AB = A'B'$;

p_2: $pr_d AC = A'C'$;

p_3: $pr_d BC = B'C'$.

10 Fie triunghiul ABC și AD înălțime a acestuia.

a) Construiți și numiți proiecțiile laturilor AB și AC pe dreapta BC, în următoarele situații:
  1) $\sphericalangle B < 90^\circ$ și $\sphericalangle C < 90^\circ$;
  2) $\sphericalangle B > 90^\circ$.

b) Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției „$BD + DC = BC$” pentru fiecare din cele două cazuri de la subpunctul a).

11 Punctele A, B, C, D sunt coliniare și sunt situate de aceeași parte a dreptei d, astfel încât $AB = BC = CD$, iar punctele A', B', C', D' sunt proiecțiile punctelor A, B, C, respectiv D pe dreapta d. Arătați că au loc egalitățile:

a) $A'B' = B'C' = C'D'$

b) $BB' = \dfrac{AA' + CC'}{2}$, $CC' = \dfrac{BB' + DD'}{2}$,

$$BB' = \frac{2\,AA' + DD'}{3}, \quad CC' = \frac{AA' + 2\,DD'}{3}.$$

L2 Teorema înălțimii

Alături de triunghiul echilateral, triunghiurile cu un unghi drept, pe care le numim triunghiuri dreptunghice, apar în numeroase aplicații și studii. Cunoștințele despre triunghiul dreptunghic apar încă de la începutul istoriei matematicii, rezultatele descoperite de-a lungul timpului fiind aplicate în multe domenii ale vieții sociale.

Puțină istorie

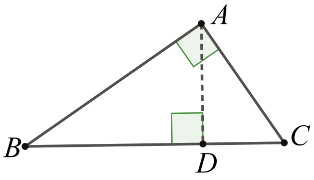
Primele texte matematice descoperite, (2000-1800 I.Hr.), scrise pe tăblițe de argilă de babilonieni (Plimpton 332) sau pe papyrus (Rhind Mathematical Papyrus), vorbesc despre numere care pot fi lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic (numere pitagoreice) și despre proprietăți ale triunghiului dreptunghic.

Ne amintim

Cu notațiile din figura alăturată, ΔABC este dreptunghic în A, segmentele CA, BA și AD sunt înălțimile triunghiului, iar punctul A este ortocentrul acestuia (punctul de intersecție a înălțimilor).

1) Catetele unui triunghi dreptunghic sunt înălțimi ale triunghiului.

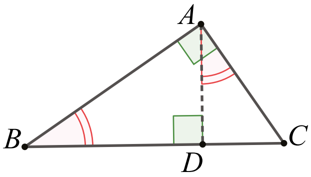
2) Ortocentrul triunghiului dreptunghic este vârful unghiului drept al triunghiului.



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Teorema înălțimii

Într-un triunghi dreptunghic, lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei este egală cu media geometrică a lungimilor proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.



Demonstrație: Fie triunghiul ABC dreptunghic, cu $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ și AD înălțimea corespunzătoare ipotenuzei. Relația de demonstrat este: $AD = \sqrt{BD \cdot CD}$, echivalentă cu $AD^2 = BD \cdot CD$ sau $\dfrac{AD}{CD} = \dfrac{BD}{AD}$, ceea ce ne sugerează că am putea să o obținem ca rezultat al unui raport de asemănare. Segmentul AD este latură în triunghiurile ADB și ADC.

Deoarece fiecare dintre triunghiuri are câte un unghi drept, $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ADC = 90^\circ$, iar unghiurile ABD și CAD sunt congruente (au același complement, unghiul BAD), obținem $\Delta ABD \sim \Delta CAD$.

Din proporționalitatea laturilor, rezultă $\dfrac{AB}{CA} = \dfrac{BD}{AD} = \dfrac{AD}{CD}$, iar din $\dfrac{BD}{AD} = \dfrac{AD}{CD}$, obținem $AD^2 = BD \cdot CD$.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicația 1: a) Triunghiul ABC este dreptunghic, cu $\sphericalangle BAC = 90^\circ$. Calculați AD, lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei, știind că $DC = 2{,}25 \cdot BD$ și $AD + BC = 57$ cm.

b) Triunghiul ABC este dreptunghic cu $\sphericalangle BAC = 90^\circ$, AD este lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei, iar pentru numerele pozitive k și a au loc relațiile $DC = k^2 \cdot BD$ și $AD + BC = a$. Calculați lungimea segmentului AD în funcție de a și k.

Soluție: a) Notăm $BD = x$. Atunci, $DC = 2{,}25 \cdot BD = 2{,}25 \cdot x$, iar $BC = BD + DC = x + 2{,}25 \cdot x = 3{,}25 \cdot x$.
În triunghiul ABC sunt îndeplinite condițiile teoremei înălțimii și obținem
$AD^2 = BD \cdot DC = 2{,}25 \cdot x^2 \Rightarrow AD = 1{,}5 \cdot x$.
Din ipoteză $AD + BC = 57 \Rightarrow 1{,}5 \cdot x + 3{,}25 \cdot x = 57 \Rightarrow 4{,}75 \cdot x = 57 \Rightarrow x = 57 : 4{,}75 = 12$.
Așadar $AD = 1{,}5 \cdot x = 18$ cm.

b) Vom exprima lungimea ipotenuzei BC în funcție de AD. Punctul D aparține ipotenuzei BC, iar $BC = BD + DC$.
Înlocuind DC, avem $BC = (k^2 + 1) \cdot BD$. (1)
În triunghiul dreptunghic ABC sunt îndeplinite condițiile teoremei înălțimii și se obține $AD^2 = BD \cdot CD$,
apoi egalitățile $AD^2 = k^2 \cdot BD^2$, $AD = k \cdot BD$, $BD = \dfrac{AD}{k}$, iar din relația (1), $BC = \left(k^2 + 1\right) \cdot \dfrac{AD}{k}$.

Relația $AD + BC = a$ devine succesiv: $AD + (k^2 + 1) \cdot \dfrac{AD}{k} = a$, apoi $AD \cdot \dfrac{k^2 + k + 1}{k} = a$, de unde
$AD = \dfrac{a \cdot k}{k^2 + k + 1}$.

Pentru a formula reciproca teoremei înălțimii, să reformulăm teorema înălțimii evidențiind ipoteza și concluzia.

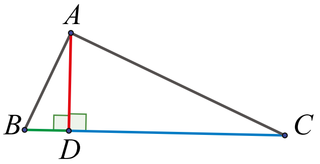
Reformulare: Fie ABC un triunghi și AD înălțimea corespunzătoare laturii BC.

Dacă triunghiul ABC este dreptunghic în A ($\sphericalangle A = 90^\circ$), atunci $AD = \sqrt{BD \cdot CD}$.
Vom formula reciproca teoremei în același cadru general, adică vorbim tot despre un triunghi ABC și înălțimea sa AD.

Ipoteza teoremei directe	Concluzie
Triunghiul ABC este dreptunghic cu $\sphericalangle A = 90^\circ$	$AD = \sqrt{BD \cdot CD}$

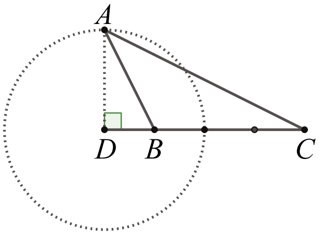
Pentru a stabili dacă reciproca este adevărată, ar trebui să analizăm dacă din relația $AD = \sqrt{BD \cdot CD}$, rezultă că triunghiul este dreptunghic în A.
Vom avea surpriza să constatăm că această implicație nu are loc întotdeauna. Totuși, adăugând o condiție (ipoteză) suplimentară, obținem teorema enunțată în continuare.

Reciproca teoremei înălțimii
Dacă într-un triunghi ABC, *care nu este triunghi obtuzunghic*, lungimea înălțimii AD este media geometrică a lungimilor proiecțiilor laturilor AB și AC pe BC, atunci triunghiul este dreptunghic.



Demonstrație: Considerăm triunghiul ABC și $AD \perp BC$, $D \in BC$. Condiția impusă triunghiului face ca D să fie punct interior al segmentului BC. Din ipoteză avem $AD = \sqrt{BD \cdot CD}$, relație echivalentă cu $AD^2 = BD \cdot CD$ sau chiar $\dfrac{AD}{CD} = \dfrac{BD}{AD}$.
Rapoartele egale ne sugerează alegerea triunghiurilor ADB și CDA, care sunt asemenea, conform cazului de asemănare L.U.L., deoarece unghiurile ADB și CDA sunt unghiuri drepte, deci congruente.
Deducem congruențele $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CAD$ și $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ACD$. În triunghiul ABD dreptunghic, unghiurile ABD și BAD sunt complementare și, ținând cont de $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CAD$, rezultă că $\sphericalangle CAD$ și $\sphericalangle BAD$ sunt complementare, adică $\sphericalangle BAC$ este drept.

Observație: Să motivăm interdicția impusă triunghiului ABC de a nu fi obtuzunghic, printr-un contraexemplu.
Împărțim segmentul CD în patru părți de lungimi egale și notăm cu B punctul interior segmentului, cu proprietatea $CD = 4BD$. Pe perpendiculara în D pe dreapta BC, luăm punctul A, cu $AD = 2BD$.



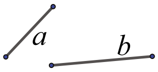
Au loc relațiile $\sqrt{BD \cdot DC} = \sqrt{BD \cdot 4 \cdot BD} = 2 \cdot BD = AD$, iar BD și CD sunt proiecțiile laturilor AB respectiv AC pe dreapta BC.
Concluzie: Există triunghiuri pentru care înălțimea din A determină segmente proporționale pe BC, dar care nu sunt dreptunghice.

Știați că... ?
1) Contraexemplul este un exemplu care contrazice validitatea unui enunț matematic.
2) Pentru a stabili că un enunț matematic este adevărat, este necesară o demonstrație.
3) Pentru a stabili că un enunț matematic este fals, este suficient un contraexemplu.

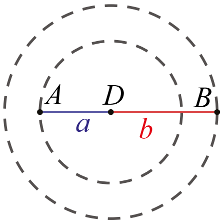
Aplicația 2: Se dau două segmente de lungimi a și b. Construiți cu rigla și compasul segmente de lungimi $\frac{a+b}{2}$ și $\sqrt{a \cdot b}$, demonstrând, în acest fel, inegalitatea mediilor: $\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$, oricare ar fi numerele pozitive a și b.

Soluție: Am arătat că media geometrică a lungimilor proiecțiilor catetelor pe ipotenuză este chiar înălțimea corespunzătoare ipotenuzei. Atunci, construcția noastră va consta în a găsi un triunghi dreptunghic ce are proiecțiile catetelor pe ipotenuză congruente cu cele două segmente date.
Ne amintim că un unghi drept subîntinde un diametru. Pentru a construi triunghiul dorit, parcurgem următorii pași:

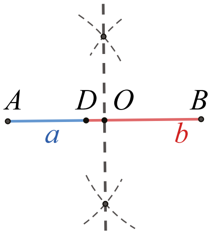
Stabilirea datelor: Se dau segmentele de lungimi a și b.



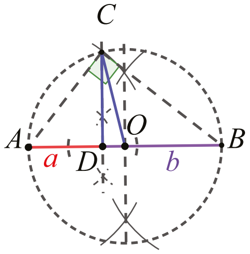
Pas 1: Considerăm o dreaptă d pe care am fixat un punct D și construim de-o parte și de alta a sa, cu ajutorul compasului, segmente de măsura a și b.



Pas 2: Determinăm mijlocul O al segmentului AB construind cu aceeași deschidere de compas două puncte ce se găsesc pe mediatoarea segmentului AB (intersecția mediatoarei cu segmentul AB este chiar mijlocul lui AB).



Pas 3: Construim semicercul de diametru AB, cu centrul în O. Trebuie să ducem în D o perpendiculară pe AB. Vom face asta (cu rigla și compasul) construind mediatoarea unui segment cu mijlocul D. Intersecția perpendicularei în D cu cercul de diametru AB este punctul C. Fiind înscris într-un semicerc, triunghiul ABC este dreptunghic, iar CD este înălțimea corespunzătoare ipotenuzei. Din teorema înălțimii, avem $CD = \sqrt{AD \cdot BD} = \sqrt{a \cdot b}$.



Raza CO este egală cu jumătate din lungimea diametrului, deci $CO = \frac{AB}{2} = \frac{AD+DB}{2} = \frac{a+b}{2}$. În orice triunghi dreptunghic, lungimea unei catete est mai mică decât lungimea ipotenuzei. Triunghiul DCO este dreptunghic, deci $DC \leq CO$, adică $\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$.

Reținem!

Într-un triunghi dreptunghic, lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei este egală cu media geometrică a lungimilor proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.
Dacă într-un triunghi ABC, care nu este triunghi obtuzunghic, lungimea înălțimii AD este media geometrică a lungimilor proiecțiilor celorlalte două laturi, AB și AC, pe BC, atunci triunghiul este dreptunghic în A.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Desenați triunghiul dreptunghic ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$, înălțimea AD a triunghiului ABC și înălțimea DE a triunghiului ACD. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

p_1: „Proiecția catetei AB pe ipotenuza BC a triunghiului ABC este BD."

p_2: „Proiecția catetei CD pe ipotenuza AC a triunghiului ACD este AE."

p_3: „$AD^2 = BD \cdot DC$"

p_4: „$DE^2 = AE + EC$"

2 Calculați lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei unui triunghi dreptunghic știind că proiecțiile catetelor pe ipotenuză au dimensiunile:

a) 5 cm și 20 cm; b) x și $4x$, cu $x > 0$;
c) 16 cm și 9 cm; d) 2,7 cm și 1,2 cm;
e) $\sqrt{3}$ dm și $3\sqrt{3}$ dm.

3 În triunghiul ABC, $\sphericalangle A = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in BC$.

a) Dacă $BD = 8$ cm și $CD = 18$ cm, aflați AD.

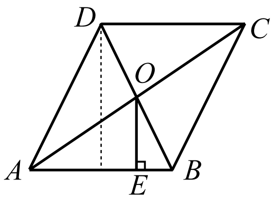
b) Dacă $AD = 12$ cm și $CD = 8$ cm, aflați BD și BC.

4 Se consideră triunghiul DEF, $\sphericalangle D = \sphericalangle E + \sphericalangle F$ și $DA \perp EF$, $A \in EF$. Se știe că $AD = 10$ cm și $EF = 5 \cdot AE$. Calculați lungimile segmentelor AE, AF și EF.

5 În triunghiul ABC, $\sphericalangle A = 90°$, $AM \perp BC$, $M \in BC$, $\frac{BM}{MC} = \frac{1}{4}$ și $BC = 20$ cm. Calculați AM și aria triunghiului ABC.

6 În trapezul dreptunghic $TRAP$, se cunosc: $\sphericalangle T = \sphericalangle P = 90°$, $TR = 30$ cm, $AP = 18$ cm și $TA \perp AR$. Calculați înălțimea trapezului.

7 Rombul $ABCD$ are înălțimea de 20 cm și $AC \cap BD = \{O\}$. Proiecția segmentului OB pe latura AB are lungimea de 5 cm. Calculați perimetrul rombului.



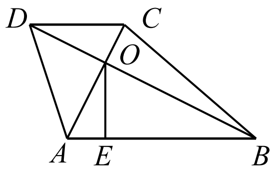
8 Fie $ABCD$ un dreptunghi. Proiecția punctului A pe diagonala BD este punctul E, $BE = 3\ DE$, iar $AC \cap BD = \{O\}$.

a) Determinați valoarea raportului $\frac{DE}{EO}$.

b) Pentru $BD = 8\sqrt{2}$ cm, calculați AE.

c) Aflați măsura unghiului ascuțit format de diagonalele dreptunghiului.

9 În trapezul $ABCD$ diagonalele sunt perpendiculare, $AC \cap BD = \{O\}$, proiecția punctului O pe baza mare AB este punctul E. Se cunosc $AE = 2$ cm și $BE = 8$ cm.



a) Calculați lungimea segmentului OE.

b) Dacă $CD = 5$ cm, aflați aria trapezului.

10 Se consideră dreptunghiul $MNPQ$, $MA \perp NQ$, $A \in NQ$ și $MA \cap PQ = \{B\}$. Dacă $AN = 12$ cm, $AQ = 27$ cm calculați MA și MB.

11 În triunghiul ABC isoscel, AM este înălțimea corespunzătoare bazei BC și $MD \perp AB$, $D \in AB$, $ME \perp AC$, $E \in AC$. Se știe că $MD = 2\sqrt{3}$ cm și $AD = 2\sqrt{6}$ cm.

a) Aflați lungimea segmentului AB.

b) Arătați că $DE \perp AM$ și apoi calculați DE.

12 Fie triunghiul echilateral ABM și D mijlocul laturii BM. Pe dreapta BM se consideră un punct C astfel încât M este mijlocul segmentului BC.

Arătați că $AD^2 = \frac{3BC^2}{16}$.

13 Fie AD înălțime a triunghiului AMN, $D \in MN$ și $AD = 3\sqrt{6}$ cm, $MD = 9$ cm, $ND = 6$ cm. Arătați că triunghiul AMN este dreptunghic.

14 Fie AD înălțime a triunghiului AMN, $D \in MN$ și $AD = a \cdot MD$, $ND = a \cdot AD$, unde $a > 0$. Arătați că triunghiul AMN este dreptunghic.

15 Dreptunghiul $DREP$ are $DR = 16$ cm și $RE = 8$ cm. Prelungim segmentul DR cu $RQ = \frac{RE}{2}$. Arătați că $DE \perp EQ$.

L3 Teorema catetei

Ne amintim

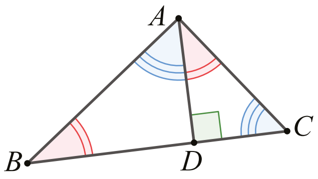
Dacă într-un triunghi dreptunghic reprezentăm înălțimea corespunzătoare ipotenuzei, se evidențiază trei triunghiuri dreptunghice, oricare două dintre ele, fiind asemenea.
Într-adevăr, considerând triunghiul *ABC* dreptunghic ($\sphericalangle BAC = 90°$) și *AD* înălțimea corespunzătoare ipotenuzei, au loc următoarele congruențe de unghiuri:

- $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle ADC$; sunt unghiuri drepte;
- $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle DAC$; au același complement, unghiul *BAD*;
- $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ACD$; au același complement, unghiul *CAD* .

Folosind asemănarea triunghiurilor *ABD* și *CAD* am demonstrat teorema înălțimii. Ne propunem să obținem un rezultat și din asemănarea celorlalte două perechi de triunghiuri: *ABC* și *DBA*, respectiv *ABC* și *DAC*.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Teorema 1. Teorema catetei
Într-un triunghi dreptunghic, pătratul lungimii unei catete este egal cu produsul dintre lungimea ipotenuzei și lungimea proiecției acelei catete pe ipotenuză.



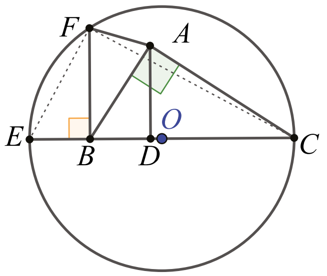
Demonstrație: Triunghiurile *ABC* și *DBA* sunt asemenea, deoarece unghiurile *BAC* și *ADB* sunt drepte, iar $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle ABD$ este unghi comun. Scriem proporționalitatea laturilor: $\frac{AB}{DB} = \frac{BC}{AB} = \frac{AC}{AD}$.

Din $\frac{AB}{DB} = \frac{BC}{AB}$, rezultă $AB^2 = BC \cdot BD$.

În mod analog, triunghiurile *ABC* și *DAC* sunt asemenea, deoarece unghiurile *BAC* și *ADC* sunt drepte, iar $\sphericalangle ACB$ și $\sphericalangle ACD$ este unghi comun. Atunci, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{AC}$. Din $\frac{AC}{DC} = \frac{BC}{AC}$, rezultă $AC^2 = BC \cdot CD$.

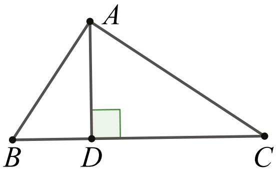
Observație: Egalitățile date de teorema catetei sunt echivalente cu $AB = \sqrt{BC \cdot BD}$, respectiv $AC = \sqrt{BC \cdot CD}$, ceea ce duce la o nouă formulare: *într-un triunghi dreptunghic, lungimea unei catete este media geometrică între lungimea ipotenuzei și lungimea proiecției acelei catete pe ipotenuză.*

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni



Aplicația 1: În triunghiul dreptunghic *ABC*, $\sphericalangle A = 90^\circ$, considerăm înălțimea *AD* și notăm cu *E* simetricul lui *D* față de *B*. Perpendiculara în *B* pe *CB* intersectează cercul de diametru *EC* în *F*. Arătați că triunghiul *BFA* este isoscel.
Soluție: Deoarece triunghiul *BAC* este dreptunghic, putem aplica teorema catetei pentru *AB*, obținând: $AB^2 = BC \cdot BD$.
Triunghiul *EFC* este înscris într-un semicerc, deci este dreptunghic și aplicăm, pentru înălțimea *FB*, teorema înălțimii: $FB^2 = BC \cdot BE$. Dar, *E* este simetricul lui *D* față de *B*, prin urmare $BD \equiv BE$, care implică $AB^2 = FB^2$ sau $BA \equiv BF$, adică triunghiul *BFA* este isoscel.

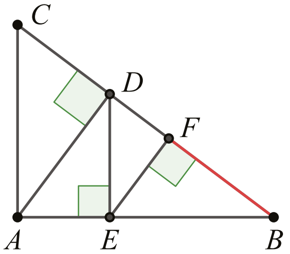
Teorema 2.
Reciproca teoremei catetei: Fie triunghiul ABC și $D = pr_{BC}A$. Dacă D aparține segmentului BC și este verificată una din relațiile: $AB^2 = BC \cdot BD$ sau $AC^2 = BC \cdot CD$, atunci triunghiul ABC este dreptunghic în A.



Demonstrație: Se construiește proiecția lui A pe BC, respectând condiția impusă: D se găsește pe segmentul BC. Considerând verificată relația $AB^2 = BC \cdot BD$, aceasta se mai scrie: $\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BA}$. În această proporție numărătorii reprezintă laturi ale triunghiului BAC, iar numitorii reprezintă laturi ale triunghiului BDA. Cele două triunghiuri au unghiul comun $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DBA$ și conform cazului de asemănare L.U.L., triunghiurile sunt asemenea. Din congruența unghiurilor corespunzătoare avem $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle BDA$. Dar, unghiul BDA este unghi drept, prin urmare și BAC este unghi drept, deci triunghiul este dreptunghic. Analog se demonstrează că triunghiul ABC este dreptunghic, plecând de la relația $AC^2 = BC \cdot CD$.

Temă de portofoliu

Justificați, printr-un contraexemplu, faptul că reciproca teoremei catetei nu rămâne valabilă dacă proiecția punctului A pe BC nu aparține segmentului BC.



Aplicația 2: În triunghiul dreptunghic ABC, AD este înălțime, E este proiecția punctului D pe dreapta AB iar F este proiecția punctului E pe dreapta BC. Calculați lungimea segmentului BF știind că $AB = 18$ cm și $BC = 27$ cm.
Soluție: Observăm că, realizând construcțiile cerute în enunț, s-au format mai multe triunghiuri dreptunghice și s-au trasat înălțimile corespunzătoare ipotenuzelor.
Aplicăm de mai multe ori teorema catetei și obținem:
În triunghiul $ABC, \sphericalangle A = 90°$, AD înălțimea corespunzătoare ipotenuzei $AB^2 = BC \cdot BD$,

de unde $BD = \frac{AB^2}{BC} = \frac{324}{27} = 12$ (cm). În triunghiul ABD, $\sphericalangle ADB = 90°$, DE este

înălțimea corespunzătoare ipotenuzei: $BD^2 = BE \cdot AB$ sau $BE = \frac{BD^2}{AB} = \frac{144}{18} = 8$ (cm).

În triunghiul BDE, $\sphericalangle BED = 90°$, EF înălțimea corespunzătoare ipotenuzei: $BE^2 = BD \cdot BF$ sau

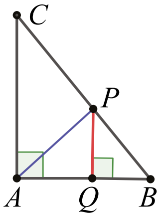
$$BF = \frac{BE^2}{BD} = \frac{64}{12} = \frac{16}{3} \text{ (cm).}$$

Aplicația 3: În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90^\circ$, AD este înălțime, E este proiecția punctului D pe dreapta AB, iar F este proiecția punctului E pe dreapta BC.
a) Calculați lungimea segmentului BF în funcție de $AB = c_1$ și $BC = ip$.
b) Determinați lungimea segmentului BF pentru $AB = 18$ cm, $BC = 27$ cm.
Soluție: Din enunț, $\sphericalangle A = 90^\circ$, $AD \perp BC$, $DE \perp AB$, deci triunghiurile ABC, ADB, DEB sunt dreptunghice, iar AD, DE, EF sunt înălțimile corespunzătoare ipotenuzelor în aceste triunghiuri. Vom calcula lungimea segmentului BF cu ajutorul teoremei catetei în triunghiul BED, adică $BF = \frac{BE^2}{BD}$.
Segmentul BE este proiecția catetei BD pe ipotenuză în triunghiul ADB, deci $BE = \frac{BD^2}{AB}$.
Segmentul BD este proiecția catetei AB pe ipotenuză în triunghiul ABC, deci $BD = \frac{AB^2}{BC}$.

Atunci, $BF = \frac{BE^2}{BD} = \left(\frac{BD^2}{AB}\right)^2 \cdot \frac{1}{BD} = \frac{BD^3}{AB^2} = \left(\frac{AB^2}{BC}\right)^3 \cdot \frac{1}{AB^2} = \frac{AB^4}{BC^3} = \frac{c_1^4}{ip^3}$.

b) Pentru $c_1 = 18$ cm și $ip = 27$ cm, obținem $BF = \frac{c_1^4}{ip^3} = \frac{18^4}{27^3} = \frac{2^4 \cdot 3^8}{3^9} = \frac{2^4}{3} = \frac{16}{3}$ (cm).

Aplicația 4: Punctul P este situat pe ipotenuza BC a triunghiul ABC, $PB = 6$ cm. Proiecția punctului P pe dreapta AB este punctul Q, $QA = 5$ cm, $QB = 4$ cm. Calculați lungimile segmentelor AP și BC.



*Soluție***:** Punctul P este situat pe ipotenuza triunghiului dreptunghic ABC. Atunci, unghiurile PAB și PBA sunt ascuțite, deci punctul Q, proiecția punctului P pe AB, este situat în interiorul segmentului AB.

În triunghiul APB au loc: $PQ \perp AB$, $Q \in AB$, $PB^2 = BQ \cdot BA = 4 \cdot 9 = 36$.

Reciproca teoremei catetei aplicată triunghiului ABP, arată că $\sphericalangle APB = 90^\circ$.

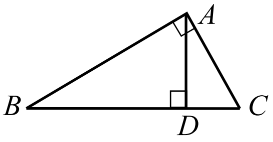
Aplicând teorema catetei în triunghiul APB, obținem $AP^2 = AQ \cdot AB = 45$, deci $AP = 3\sqrt{5}$ (cm) și aplicând teorema catetei în triunghiul ABC obținem $AB^2 = BC \cdot BP$, apoi $81 = BC \cdot 6$, de unde $BC = 13{,}5$ (cm).

Reținem!

- Teorema înălțimii și teorema catetei exprimă „legături” între lungimile elementelor unui triunghi dreptunghic: înălțimea, catetele, ipotenuza și proiecțiile catetelor pe ipotenuză. Aceste „legături” se numesc *relații metrice*.
- Reciproca teoremei catetei și reciproca teoremei înălțimii reprezintă modalități de a arăta perpendicularitatea unor drepte.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Triunghiul ABC este dreptunghic, $\sphericalangle A = 90^\circ$ și $AD \perp BC$.



Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

p_1: „Proiecția catetei AB pe ipotenuza BC este BD”

p_2: „Proiecția catetei AC pe ipotenuza BD este BC”

p_3: „$AB^2 = BC \cdot BD$”

p_4: „ $AC = \sqrt{BD \cdot DC}$ ”

2 În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90^\circ$, AD este înălțime, iar DE este înălțime în triunghiul ABD. Se știe că $AD = 24$ cm, $DC = 18$ cm. Calculați lungimile segmentelor BD, AC și AE.

3 În paralelogramul $ABCD$, avem $CD = 18$ cm, iar bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle B$ se intersectează în punctul E.

a) Arătați că triunghiul ABE este dreptunghic.

b) Știind că $AB = 3\ BE$, calculați lungimea proiecției segmentului BE pe dreapta AB.

4 Calculați lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic știind că proiecțiile catetelor pe ipotenuză au lungimile:

a) 9 cm și 16 cm;

b) 4 cm și 12 cm;

c) $9\sqrt{3}$ cm și $3\sqrt{3}$ cm;

d) x cm și $9x$ cm, $x > 0$.

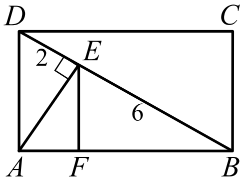
5 În dreptunghiul $ABCD$, avem $AB = 4{,}5$ cm și $BE \perp BD$, $E \in CD$. Știind că $DE = 12{,}5$ cm, calculați BE și perimetrul dreptunghiului.

6 În triunghiul ABC, avem $\sphericalangle A = 90^\circ$, $AD \perp BC$, $D \in BC$.
a) Dacă $BC = 20$ cm, $BD = 7{,}2$ cm, aflați CD, AB, și AC.
b) Dacă $BC = 6$ cm, $BD = 0{,}4$ dm, aflați DC, AC și AB.
c) Dacă $AB = 5\sqrt{6}$ m, $BC = 25$ m, aflați BD, CD și AC.
d) Dacă $AB = 2x$ cm, $BD = x$ cm, aflați BC și AC.

7 Triunghiul DEF este dreptunghic în D, $DG \perp EF$, $G \in EF$, iar dreapta DG intersectează paralela prin F la DE în punctul L. Dacă $DE = 15$ cm și $EF = 25$ cm, calculați lungimile segmentelor EG, DF și FL.

8 Fie rombul $ROMB$, $RM \cap OB = \{A\}$ și $AC \perp BM$, $C \in MB$. Știind că $OB = 24$ cm și $BC = 8$ cm, calculați latura și înălțimea rombului.

9 Proiecțiile laturilor AB și AD ale dreptunghiului $ABCD$ pe diagonala BD au lungimile de 2 cm și 6 cm.



a) Calculați dimensiunile dreptunghiului.
b) Dacă $AE \perp BD$, $E \in BD$ și $EF \perp AB$, $F \in AB$ aflați aria triunghiului BEF.

10 În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90^\circ$, mediana AM și înălțimea AD formează un unghi de 30°. Calculați:
a) valoarea raportului $\dfrac{DM}{BC}$;
b) $\left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\dfrac{AC}{AB}\right)^2$.

11 În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90^\circ$, AD este înălțime și $CD = 3 \cdot BD$. Determinați măsura unghiului $\sphericalangle ABC$.

12 Fie triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90^\circ$, $AD \perp BC$, $D \in BC$, $DE \perp AB$, $E \in AB$ și $DF \perp AC$, $F \in AC$.
a) Demonstrați că $\dfrac{AE}{AF} = \dfrac{AC}{AB}$.
b) Arătați că ΔAEF și ΔACB sunt asemenea.
c) Dacă $BD = 3$ cm și $BC = 15$ cm calculați EF.

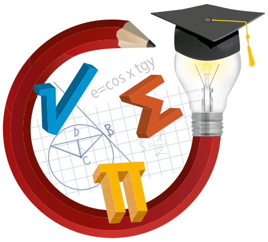
13 Fie triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 135^\circ$ și punctele D, E pe latura BC astfel încât $AD \perp BC$, $CD = 6$ cm, $CE = 8$ cm și $AE = 4$ cm.
a) Demonstrați că triunghiul AEC este dreptunghic.
b) Calculați lungimea segmentului BE.

14 Se consideră triunghiul isoscel ABC, cu $\sphericalangle BAC = 120^\circ$, AD înălțime și AP bisectoarea unghiului BAD, $P \in BC$, $AP = 2\sqrt{3}$ cm.
a) Arătați că triunghiul APC este dreptunghic.
b) Calculați lungimile segmentelor AC și BC.

15 În triunghiul ABC, $\sphericalangle BAC = 30^\circ$, $AB = 10$ cm, $BD \perp AC$, $D \in AC$. Proiecția segmentului BD pe dreapta BC are lungimea de 2,5 cm. Demonstrați că triunghiul ABC este isoscel.

16 Un triunghi dreptunghic cu ipotenuza de 9 cm, are lungimile proiecțiile catetelor pe ipotenuză exprimate, în centimetri, prin două numere prime. Calculați lungimile catetelor acestui triunghi.

17 Perimetrul rombului $ABCD$ este 60 cm și $BD \equiv CD$. Perpendiculara în A pe AB intersectează dreapta BD în punctul E. Calculați:
a) lungimea proiecției segmentului AB pe dreapta BE;
b) perimetrul triunghiului ACE.

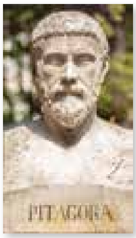


7.2 Teorema lui Pitagora. Reciproca teoremei lui Pitagora

Ne amintim

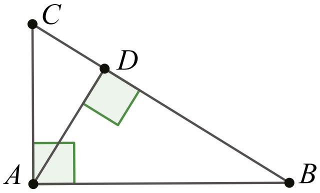
Teorema catetei exprimă lungimea unei catete, ca medie geometrică între lungimea ipotenuzei și lungimea proiecției sale pe ipotenuză.
Într-un triunghi dreptunghic proiecția vârfului unghiul drept pe ipotenuză aparține acesteia, adică suma lungimilor celor două proiecții ale catetelor pe ipotenuză este chiar lungimea ipotenuzei.

Folosind aceste două observații putem demonstra unul din cele mai frumoase rezultate din geometria triunghiului dreptunghic, rezultat pe care îl cunoaștem din clasa a VI-a, sub numele de Teorema lui Pitagora.
Teorema lui Pitagora are, probabil, cele mai multe demonstrații dintre toate teoremele din matematică.



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Teorema lui Pitagora.
Într-un triunghi dreptunghic, pătratul lungimii ipotenuzei este egal cu suma pătratelor lungimilor catetelor.



Demonstrație: În triunghiul dreptunghic ABC ($\sphericalangle A = 90^\circ$), notăm cu D proiecția lui A pe BC. Deoarece unghiurile B și C sunt ascuțite, rezultă că D se găsește pe latura BC, iar segmentele BD și CD sunt proiecțiile catetelor AB respectiv AC pe ipotenuză.

Folosind teorema catetei, obținem $BD = \dfrac{AB^2}{BC}$ și $CD = \dfrac{AC^2}{BC}$.

$BD + CD = BC$, iar prin înlocuire deducem: $\dfrac{AB^2}{BC} + \dfrac{AC^2}{BC} = BC$ sau $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Observație: Teorema lui Pitagora permite aflarea lungimii unei laturi a unui triunghi dreptunghic atunci când cunoaștem lungimile celorlalte două laturi:

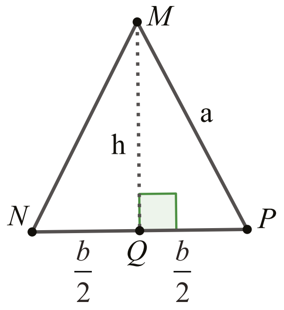
1) cunoscând lungimile catetelor, lungimea ipotenuzei este: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$;

2) cunoscând lungimea unei catete și lungimea ipotenuzei, cealaltă catetă este: $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2}$ sau $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2}$.

Temă de portofoliu

Decideți care dintre următoarele afirmații sunt adevărate:
1) Suma pătratelor lungimilor diagonalelor unui pătrat este egală cu suma pătratelor lungimilor laturilor sale.
2) Suma pătratelor lungimilor diagonalelor unui dreptunghi este egală cu suma pătratelor lungimilor laturilor sale.
3) Suma pătratelor lungimilor diagonalelor unui romb este egală cu suma pătratelor lungimilor laturilor sale.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni



Aplicația 1:

a) Considerăm triunghiul isoscel MNP, cu $MN = MP = 15$ cm și $NP = 18$ cm. Calculați înălțimea corespunzătoare bazei.

b) Demonstrați că pentru triunghiul isoscel cu laturile congruente de lungime a și baza de lungime b, lungimea h a înălțimii corespunzătoare bazei este $h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$.

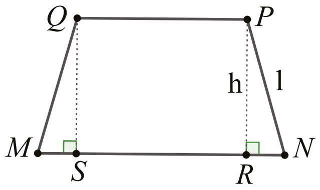
c) Fie trapezul isoscel $MNPQ$, cu $MN \parallel PQ$, $MN = 30$ cm, $PQ = 16$ cm și $MQ = 25$ cm. Calculați înălțimea trapezului.

d) Demonstrați că pentru trapezul isoscel cu lungimile bazelor B, respectiv b și laturile neparalele de lungime l, lungimea h a înălțimii trapezului este: $h = \sqrt{l^2 - \frac{(B-b)^2}{4}}$.

Soluție: a) Considerăm triunghiul isoscel MNP cu baza NP și Q proiecția lui M pe latura NP. Din ipoteză, MQ este înălțimea corespunzătoare bazei triunghiului isoscel, deci MQ este și mediană, prin urmare $QP = \frac{NP}{2} = 9$ (cm).

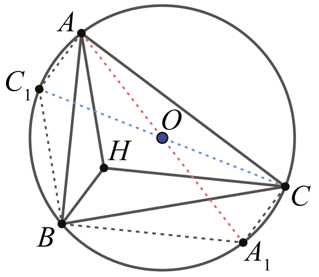
Notăm $MQ = h$. Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul MQP, dreptunghic, $\sphericalangle MQP = 90°$ și obținem $h = MQ = \sqrt{MP^2 - QP^2}$, $h = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$ cm.

b) Vom parcurge același *drum*, considerând lungimile laturilor numere pozitive, astfel încât triunghiul să existe. Din ipoteză, avem $QP = \frac{b}{2}$, $MP = a$ și $MQ = h$. Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul MQP, dreptunghic, $\sphericalangle MQP = 90°$ și obținem $h = MQ = \sqrt{MP^2 - QP^2} = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$.



c) Considerăm trapezul isoscel $MNPQ$ ($MN \parallel PQ$) și notăm cu R și S proiecțiile punctelor P, respectiv Q, pe baza mare. Cu datele din ipoteză, obținem $MS = RN = \frac{MN - PQ}{2} = 7$ cm, $MQ = NP = 25$ cm, $h = PR = QS$.
Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic PRN și obținem $h = PR = \sqrt{PN^2 - RN^2}$, deci $h = \sqrt{25^2 - 7^2} = \sqrt{576} = 24$ (cm).

d) Cu datele din ipoteză, avem lungimile segmentelor: $MS = RN = \frac{B-b}{2}$, $MQ = NP = l$, $h = PR = QS$.
Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic PRN și obținem $h = PR = \sqrt{PN^2 - RN^2} = \sqrt{l^2 - \frac{(B-b)^2}{4}}$.

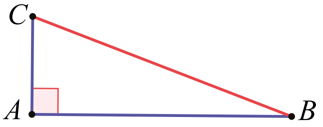


Aplicația 2: Fie H ortocentrul triunghiului ABC.
Arătați că $AH^2 + BC^2 = BH^2 + AC^2 = CH^2 + AB^2$.
Soluție: Să observăm figura alăturată. Vom trasa cercul circumscris triunghiului ABC și vom nota cu A_1 și C_1 punctele diametral opuse lui A, respectiv C. Am obținut diametrele AA_1 și CC_1. Atunci, unghiurile ABA_1, ACA_1, CAC_1, CBC_1 sunt drepte, deci $A_1B \perp AB$, $A_1C \perp AC$, $C_1A \perp AC$ și $C_1B \perp CB$. Punctul H este ortocentru, deci $AH \perp BC$, $BH \perp AC$ și $CH \perp AB$. Rezultă $AH \parallel C_1B$ și $BH \parallel C_1A$, deci $BHAC_1$ este paralelogram.
Analog, $BHCA_1$ este paralelogram. Obținem $BH \equiv A_1C$ și $CH \equiv A_1B$. Triunghiurile AA_1C și AA_1B sunt dreptunghice, deci putem aplica teorema lui Pitagora:
$AA_1^2 = AC^2 + A_1C^2$ și $AA_1^2 = AB^2 + A_1B^2$, adică $AC^2 + BH^2 = AB^2 + CH^2$.
Analog pentru paralelogramul $BHAC_1$, obținem $CC_1^2 = AC^2 + BH^2$ și $CC_1^2 = BC^2 + AH^2$, adică $AC^2 + BH^2 = BC^2 + AH^2$.

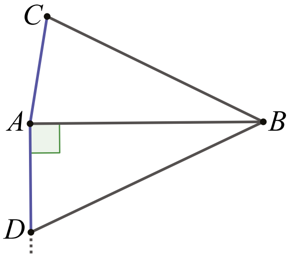
Reciproca teoremei lui Pitagora

Dacă pătratul lungimii unei laturi este egal cu suma pătratelor lungimilor celorlalte două laturi, atunci triunghiul este dreptunghic, unghiul drept fiind opus primei laturi.

Cu notațiile din figura alăturată, enunțul reciprocei teoremei lui Pitagora este următorul: *Dacă între lungimile laturilor triunghiului ABC are loc relația* $BC^2 = AB^2 + AC^2$, *atunci triunghiul este dreptunghic, cu* $\sphericalangle A = 90^\circ$.



Demonstrație: Pe perpendiculara în A pe AB, considerăm punctul D astfel încât $AD \equiv AC$, punctele D, C fiind situate în semiplane diferite determinate de dreapta AB. În triunghiul ABD, dreptunghic, $\sphericalangle BAD = 90^\circ$ (din construcție) aplicăm teorema lui Pitagora: $BD^2 = AB^2 + AD^2$. Din ipoteză, $BC^2 = AB^2 + AC^2 = AB^2 + AD^2$. Rezultă că $BD \equiv BC$. Comparând triunghiurile ABD și ABC avem: $AB \equiv AB$, $AD \equiv AC$ și $BD \equiv BC$. Cazul de congruență L.L.L. ne conduce la congruența triunghiurilor ABD și ABC, deci la congruența unghiurilor $\sphericalangle BAC$ și $\sphericalangle BAD$. Deoarece $\sphericalangle BAD = 90^\circ$, rezultă că triunghiul ABC este dreptunghic, cu ipotenuza BC.



Reciproca teoremei lui Pitagora ne oferă o metodă de a demonstra că un triunghi este dreptunghic.

Pentru a decide dacă un triunghi, căruia i se cunosc lungimile laturilor este dreptunghic, procedăm astfel:

1) Ordonăm crescător lungimile laturilor.

2) Calculăm pătratele lungimilor laturilor, păstrând ordinea crescătoare.

3) Calculăm suma pătratelor numerelor mai mici și comparăm cu pătratul numărului mai mare.

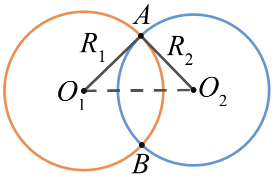
4) Interpretăm rezultatul: Dacă obținem egalitate, reciproca teoremei lui Pitagora ne spune că triunghiul este dreptunghic și că unghiul drept se opune celei mai mari dintre laturi.
Dacă cele două numere sunt diferite, atunci triunghiul nu este dreptunghic.

Exemple:

a) Triunghiul ABC cu $AB = 3$, $AC = 4$ și $BC = 5$ este triunghi dreptunghic în A pentru că:
   1) $3 < 4 < 5$;
   2) $9 < 16 < 25$;
   3) $AB^2 + AC^2 = 9 + 16 = BC^2$.

b) Triunghiul MNP cu $MN = 4$, $MP = 5$ și $NP = 6$ nu este dreptunghic pentru că:
   1) $4 < 5 < 6$;
   2) $16 < 25 < 36$;
   3) $6 + 25 \neq 36$.

Aplicația 3: Cu centrul în punctul O_1 se construiește un cerc de rază $R_1 = 21$ cm, iar cu centrul în O_2 se construiește un cerc de rază $R_2 = 20$ cm. Se știe că $O_1O_2 = 29$ cm, iar cele două cercuri se intersectează în A și B. Arătați că dreapta O_1A este tangentă cercului $\mathcal{C}(O_2, R_2)$, iar dreapta O_2B este tangentă cercului $\mathcal{C}(O_1, R_1)$.

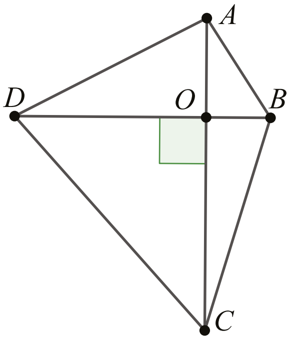


Soluție: Pentru ca O_1A să fie tangentă cercului de centru O_2, trebuie ca $O_1A \perp O_2A$. Vom verifica aceasta prin reciproca teoremei lui Pitagora în triunghiul O_1O_2A. Calculăm $O_1O_2^{\ 2} = 29^2 = 841$ și $O_1A^2 + O_2A^2 = 21^2 + 20^2 = 841$.

Cele două valori sunt identice, deci este verificată reciproca teoremei lui Pitagora, triunghiul O_1O_2A este dreptunghic, adică dreapta O_1A este tangentă în A la cercul de centru O_2.

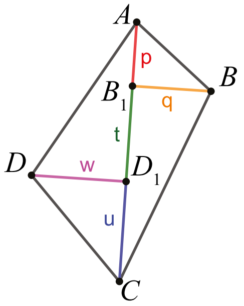
Procedând la fel, în triunghiul O_1O_2B se obține $O_1O_2^{\ 2} = 29^2 = 841 = 21^2 + 20^2 = O_1B^2 + O_2B^2$, egalitate ce arată că $\sphericalangle O_1B\,O_2 = 90^\circ$, deci dreapta O_2B este tangentă cercului $\mathcal{C}(O_1, R_1)$.

Aplicația 4: În patrulaterul convex $ABCD$, diagonalele AC și BD sunt perpendiculare.
a) Arătați că suma pătratelor laturilor opuse este constantă.
b) Enunțați și demonstrați reciproca acestei propoziții.



Soluție: a) Notăm intersecția diagonalelor cu O. Deoarece diagonalele sunt perpendiculare s-au format triunghiurile dreptunghice OAB, OBC, OCD, ODA. Aplicând teorema lui Pitagora în aceste triunghiuri, calculăm suma pătratelor laturilor opuse: $AD^2 + BC^2 = (AO^2 + DO^2) + (BO^2 + CO^2)$ și $AB^2 + DC^2 = (AO^2 + BO^2) + (CO^2 + DO^2)$. Atunci, $AD^2 + BC^2 = AB^2 + DC^2$.

b) Reciproca: Dacă suma pătratelor lungimilor laturilor opuse ale unui patrulater este constantă , atunci diagonalele sunt perpendiculare.



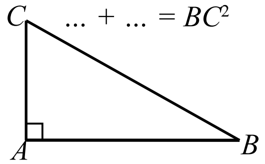
Vom presupune că diagonalele nu sunt perpendiculare, notând proiecțiile punctelor B și D pe dreapta AC cu B_1, respectiv D_1. Cum $B_1 \neq D_1$, pentru început considerăm ordinea pe AC: $A–B_1–D_1–C$. Pentru operativitatea scrierii notăm lungimile segmentelor cu: $AB_1 = p$, $B_1D_1 = t$, $D_1C = u$, $DD_1 = w$, și $BB_1 = q$. Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice BB_1A și DD_1C și calculăm suma pătratelor lungimilor laturilor opuse AB și DC: $AB^2 + DC^2 = p^2 + q^2 + u^2 + w^2$.
Procedăm la fel în triunghiurile dreptunghice BB_1C și DD_1A:
$AD^2 + BC^2 = (p + t)^2 + w^2 + q^2 + (u + t)^2$.
Egalitatea sumei pătratelor lungimilor laturilor opuse conduce la $p^2 + u^2 = (p + t)^2 + (u + t)^2$, egalitate cu numere pozitive, imposibilă. Analog tratăm și cazul în care ordinea pe AC este: $A–D_1–B_1–C$.
Am ajuns la o contradicție, prin urmare presupunerea făcută este falsă, adică diagonalele sunt perpendiculare.

Reținem!

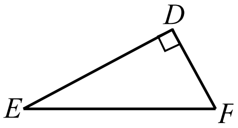
Teorema lui Pitagora: Într-un triunghi dreptunghic, pătratul lungimii ipotenuzei este egal cu suma pătratelor lungimilor catetelor.
Reciproca teoremei lui Pitagora: Dacă suma pătratelor lungimilor a două laturi ale unui triunghi este egală cu pătratul lungimii celei de-a treia laturi, atunci triunghiul este dreptunghic, unghiul drept fiind opus laturii a treia.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Analizați triunghiurile din figurile de mai jos, desenați-le pe caiete și completați spațiile libere astfel încât să obțineți afirmații adevărate.

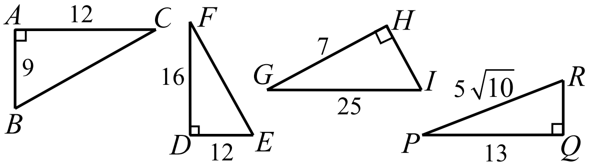


$... + ... = BC^2$



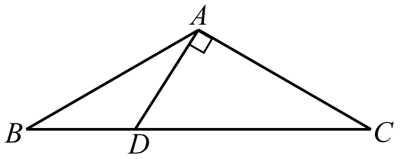
$DE^2 = ...$

2 Pentru fiecare dintre triunghiurile de mai jos, calculați lungimea laturii necunoscute:



3 Triunghiul ABC este isoscel, $AB = AC = 25$ cm și $BC = 40$ cm. Aflați $h_1 + h_2 + h_3$, suma înălțimilor triunghiului.

4 Fie triunghiul ABC cu $AB = AC = 8\sqrt{3}$ cm și $\sphericalangle BAC = 120^\circ$. Perpendiculara în A pe AC intersectează latura BC în D. Calculați:
a) măsurile unghiurilor $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle ACB$.
b) lungimile segmentelor DC și BD.



5 Calculați:

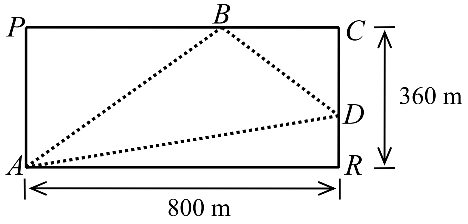
a) lungimea înălțimii unui triunghi echilateral cu latura de 8 cm;

b) lungimea diagonalei unui pătrat cu perimetrul de 48 cm;

c) lungimea diagonalei unui dreptunghi cu dimensiunile a și $2a$;

d) perimetrul unui romb cu diagonalele 2 cm și $2\sqrt{3}$ cm.

6 Maria se deplasează pe aleile parcului *PARC* cu suprafața dreptunghiulară (vezi figura de mai jos). În punctul *B* se află o fântână arteziană la 480 m de punctul *P*, iar în punctul *D* se află o statuie, la 120 m de punctul *R*. Arătați că, dacă Maria se deplasează pe traseul $A - B - D - A$, atunci ea parcurge mai mult de 1,8 km.



7 A, B, C sunt puncte ale cercului $C(O,r)$, $\sphericalangle AOB = 90^\circ$. Punctul C este situat pe arcul mic AB, la distanța de $8\sqrt{2}$ cm de dreapta AO și la distanța de 4 cm de dreapta BO. Calculați raza cercului.

8 Un triunghi dreptunghic are un unghi de 60° și lungimea ipotenuzei de 6 cm. Calculați perimetrul triunghiului.

9 În triunghiul ABC, $\sphericalangle A = 90^\circ$, BD este mediană și CE este bisectoarea $\sphericalangle ACB$, $E \in AB$. Știind că $BD = 50$ cm și $AC = 80$ cm, aflați distanța de la punctul E la dreapta BC.

10 Un trapez isoscel are baza mare de 8 cm, diagonala de $2\sqrt{13}$ cm și laturile neparalele de lungime $2\sqrt{3}$ cm. Calculați înălțimea trapezului.

11 Fie triunghiul ABC cu $BC = a$, $AC = a\sqrt{3}$, $AB = 2a$. Arătați că $\sphericalangle A = \frac{1}{2}\sphericalangle B = \frac{1}{3}\sphericalangle C$.

12 Se consideră paralelogramul *MNPQ*, cu $MN = 17$ cm, $NQ = 16$ cm și $MP = 30$ cm. Determinați măsura unghiului format de diagonalele paralelogramului.

13 Triunghiul *DEF* este dreptunghic, având catetele *DE* și *DF*, cu lungimile 15 cm și 20 cm și *M* este un punct situat pe ipotenuza *EF*. Calculați lungimea segmentului *DM* în fiecare din situațiile:

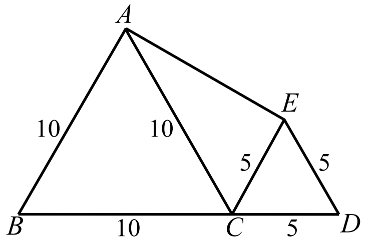
a) *M* este mijlocul segmentului *EF*;

b) $MF = 4$ cm.

14 Analizați triunghiurile din figura de mai jos. Se știe că punctele *B*, *C* și *D* sunt coliniare. Demonstrați că triunghiul *ACE* este dreptunghic în două moduri:

a) folosind reciproca Teoremei lui Pitagora.

b) fără a folosi reciproca teoremei lui Pitagora.

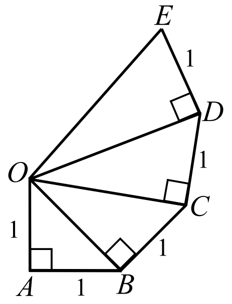


15 Triunghiurile *OAB*, *OBC*, *OCD* și *ODE* sunt dreptunghice, $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OBC = \sphericalangle OCD = \sphericalangle ODE = 90^\circ$ și $OA = AB = BC = CD = DE = 1$ cm (vezi figura de mai jos).

a) Calculați lungimile segmentelor *OB*, *OC*, *OD*, *OE*.

b) Fie $s = OA + OB + OC + OD + OE$. Arătați că $7 < s < 10$.

c) Descrieți un procedeu prin care se poate construi un segment cu lungimea de $\sqrt{10}$ cm.



7.3 Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic

Ne amintim

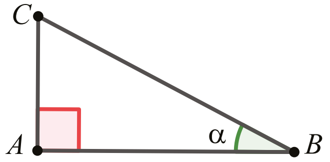
1) Într-un triunghi, latura mai mare se opune unghiului mai mare.
2) Lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic este mai mare decât lungimea oricărei catete.
3) Dacă într-un triunghi, pătratul lungimii unei laturi este egală cu suma pătratelor lungimilor celorlalte două laturi, atunci triunghiul este dreptunghic, prima latură fiind ipotenuza.
4) Într-un triunghi dreptunghic, cu un unghi de 30°, cateta care se opune acestui unghi are lungimea egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Problemă: Considerăm triunghiul dreptunghic ABC cu $\sphericalangle A = 90^\circ$ și $\sphericalangle B = 30^\circ$.

a) Calculați rapoartele: $\frac{AC}{BC}, \frac{AB}{BC}, \frac{AC}{AB}, \frac{AB}{AC}$.

b) Stabiliți dacă valoarea rapoartelor calculate depinde de lungimile laturilor triunghiului.



Soluție: a) Din $\sphericalangle A = 90^\circ$ și $\sphericalangle B = 30^\circ$, deducem că $AC = \frac{BC}{2}$, care se poate scrie $\frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$. (1)

Cu teorema lui Pitagora, aplicată în triunghiul ABC, aflăm $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{\frac{3 \cdot BC^2}{4}}$, adică

$AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot BC$ sau $\frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (2)

Obținem apoi $\frac{AB}{AC} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot BC\right) : \left(\frac{1}{2} \cdot BC\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \sqrt{3}$ și $\frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. (3)

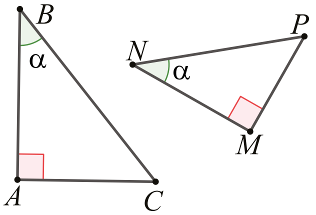
b) Observăm rezultatele (1), (2) și (3) și constatăm că niciunul din rapoartele calculate nu depinde de lungimile laturilor.

Observație: Rezultatele care au fost obținute depind doar de următoarele aspecte:
1) Triunghiul ABC este dreptunghic în A;
2) Măsura unghiului B este 30°.
3) AC este cateta opusă unghiului de 30°.

Concluzie: Pentru toate triunghiurile dreptunghice care au un unghi de 30°, găsim aceleași valori pentru cele patru rapoarte, independente de lungimile laturilor.

Ne întrebăm: 1) *Cum se justifică faptul că aceste rapoarte nu depind de lungimile laturilor?*
2) *Rapoartele căutate sunt constante și pentru alte măsuri de unghiuri?*
3) *Ce valori pot avea aceste rapoarte*?

Pentru a răspunde, considerăm triunghiurile dreptunghice ABC și MNP, astfel încât $\sphericalangle A = \sphericalangle M = 90^\circ$ și $\sphericalangle B = \sphericalangle N = \alpha^\circ$, cu $0 < \alpha < 90$.
Rezultă că triunghiurile ABC și MNP sunt asemenea (cazul de asemănare U.U.).
Atunci, unghiurile C și P sunt, de asemenea, ascuțite și congruente:
$\sphericalangle C = \sphericalangle P = 90^\circ - \alpha^\circ$.



Din proporționalitatea laturilor corespunzătoare, $\frac{AC}{MP}=\frac{AB}{MN}=\frac{BC}{NP}$, deducem proporțiile: $\frac{AC}{MP}=\frac{BC}{NP}$, $\frac{AB}{MN}=\frac{BC}{NP}$ și $\frac{AC}{MP}=\frac{AB}{MN}$ din care, cu proporții derivate, găsim: $\frac{AC}{BC}=\frac{MP}{NP}$, $\frac{AB}{BC}=\frac{MN}{NP}$, $\frac{AC}{AB}=\frac{MP}{MN}$, $\frac{AB}{AC}=\frac{MN}{MP}$.

Să observăm că laturile celor două triunghiuri asemenea sunt dispuse astfel:

1) AC și MP sunt catetele opuse unghiului de măsură $\alpha°$;

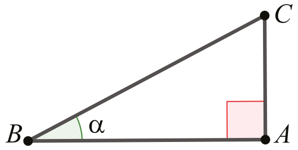
2) AB și MN sunt catetele alăturate unghiului de măsură $\alpha°$;

3) BC și NP sunt ipotenuzele celor două triunghiuri.

Concluzie:

Dacă un triunghi dreptunghic are un unghi de măsură $\alpha°$, cu $0<\alpha<90$, atunci:

- raportul dintre cateta opusă unghiului de măsură $\alpha°$ și ipotenuză este constant;
- raportul dintre cateta alăturată unghiului de măsură $\alpha°$ și ipotenuză este constant;
- raportul dintre cateta opusă și cateta alăturată unghiului de măsură $\alpha°$ este constant;
- raportul dintre cateta alăturată și cateta opusă unghiului de măsură $\alpha°$ este constant.



Folosind rezultatele și notațiile de mai sus, definim relațiile care au loc între raportul a două laturi ale unui triunghi dreptunghic și măsura unui unghi ascuțit al acestui triunghi, numite *relații trigonometrice* în triunghiul dreptunghic.

Definiții	**Interpretarea**
Definiția 1: Într-un triunghi dreptunghic, cu unghiul ascuțit B de măsură $\alpha°$, raportul dintre lungimea catetei *opuse* unghiului B și lungimea *ipotenuzei* se numește **sinusul** unghiului și se notează $\sin B$ sau $\sin\alpha°$.	$\sin B=\frac{AC}{BC}$
Definiția 2: Într-un triunghi dreptunghic, cu unghiul ascuțit B de măsură $\alpha°$, raportul dintre lungimea catetei *alăturate* unghiului B și lungimea *ipotenuzei* se numește **cosinusul** unghiului și se notează $\cos B$ sau $\cos\alpha°$.	$\cos B=\frac{AB}{BC}$
Definiția 3: Într-un triunghi dreptunghic, cu unghiul ascuțit B de măsură $\alpha°$, raportul dintre lungimea catetei *opuse* unghiului B și lungimea catetei *alăturate* se numește **tangenta** unghiului și se notează $\operatorname{tg} B$ sau $\operatorname{tg}\alpha°$.	$\operatorname{tg} B=\frac{AC}{AB}$
Definiția 4: Într-un triunghi dreptunghic, cu unghiul ascuțit B de măsură $\alpha°$, raportul dintre lungimea catetei *alăturate* unghiului B și lungimea catetei *opuse* se numește **cotangenta** unghiului și se notează $\operatorname{ctg} B$ sau $\operatorname{ctg}\alpha°$.	$\operatorname{ctg} B=\frac{AB}{AC}$ *(vezi figura de mai sus)*

Aplicația 1: Folosind definițiile de mai sus, pentru triunghiul dreptunghic ABC cu $\sphericalangle A=90°$ și $\sphericalangle B=\alpha°$, $0<\alpha<90$, calculați:

a) $\frac{\sin\alpha°}{\cos\alpha°}$; b) $\frac{\cos\alpha°}{\sin\alpha°}$; c) $(\sin\alpha°)^2+(\cos\alpha°)^2$; d) $\operatorname{tg}\alpha°\cdot\operatorname{ctg}\alpha°$.

Soluție: a) $\frac{\sin\alpha°}{\cos\alpha°}=\frac{AC}{BC}:\frac{AB}{BC}=\frac{AC}{BC}\cdot\frac{BC}{AB}=\frac{AC}{AB}=\operatorname{tg}\alpha°$, deci $\frac{\sin\alpha°}{\cos\alpha°}=\operatorname{tg}\alpha°$.

b) $\frac{\cos\alpha°}{\sin\alpha°}=\frac{AB}{BC}:\frac{AC}{BC}=\frac{AB}{BC}\cdot\frac{BC}{AC}=\frac{AB}{AC}=\operatorname{ctg}\alpha°$, deci $\frac{\cos\alpha°}{\sin\alpha°}=\operatorname{ctg}\alpha°$.

c) $(\sin\alpha°)^2+(\cos\alpha°)^2=\left(\frac{AC}{BC}\right)^2+\left(\frac{AB}{BC}\right)^2=\frac{AC^2+AB^2}{BC^2}=\frac{BC^2}{BC^2}=1$, adică $(\sin\alpha°)^2+(\sin\alpha°)^2=1$.

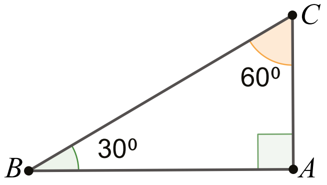
d) $\operatorname{tg}\alpha°\cdot\operatorname{ctg}\alpha°=\frac{\sin\alpha°}{\cos\alpha°}\cdot\frac{\cos\alpha°}{\sin\alpha°}=1$.

Observații:

1) Relațiile obținute la aplicația 1 sunt valabile pentru orice valoare α, măsură a unui unghi ascuțit.

2) Egalitatea $(\sin\alpha°)^2+(\cos\alpha°)^2=1$ se numește *formula fundamentală a trigonometriei*.

3) $0<\sin\alpha°<1$ și $0<\cos\alpha°<1$ pentru orice valoare α, măsură a unui unghi ascuțit.



Aplicația 2: a) Calculați sinα°, cosα°, tgα°, ctgα° pentru $\alpha \in \{30, 60\}$.
b) Calculați sinα°, cosα°, tgα°, ctgα° pentru $\alpha = 45°$.
Soluție: În ΔABC, cu $\sphericalangle BAC = 90°$ și $\sphericalangle ABC = 30°$, rezultă $\sphericalangle ACB = 60°$.
Notând $BC = 2 \cdot x$, lungimile catetelor sunt $AC = \frac{BC}{2} = x$ și $AB = x\sqrt{3}$.

a) **Pentru α = 30°** avem: $\sin 30° = \frac{AC}{BC} = \frac{x}{2 \cdot x} = \frac{1}{2}$, $\cos 30° = \frac{AB}{BC} = \frac{x\sqrt{3}}{2 \cdot x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ și } \operatorname{ctg} 30° = \frac{\cos 30°}{\sin 30°} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \sqrt{3}.$$

Pentru α = 60° avem: $\sin 60° = \frac{AB}{BC} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60° = \frac{AC}{BC} = \sin 30° = \frac{1}{2}$,

$$\operatorname{tg} 60° = \frac{AB}{AC} = \operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3}, \ \operatorname{ctg} 60° = \frac{AC}{AB} = \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

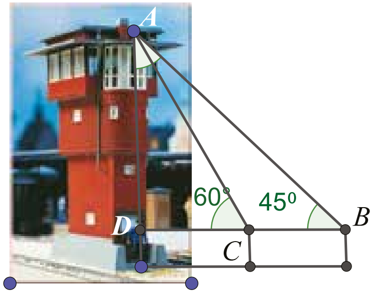
b) **Pentru α = 45°**: În triunghiul dreptunghic ABC cu $\sphericalangle BAC = 90°$ și $\sphericalangle ABC = 45°$, rezultă $\sphericalangle ACB = 45°$.

Notăm $AB = BC = x$ și găsim $BC = x\sqrt{2}$. Deci:

$$\sin 45° = \cos 45° = \frac{AC}{BC} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\operatorname{tg} 45° = \operatorname{ctg} 45° = \frac{AC}{AB} = 1.$$

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicația 3: Sandu se află la 20 de metri de o clădire pe care o vede sub un unghi de 60°.
a) Calculați înălțimea clădirii.
b) Aflați distanța la care trebuie să se afle Sandu pentru a vedea clădirea sub un unghi de 45°.



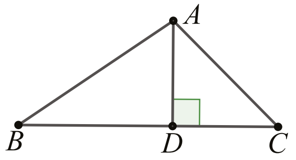
Soluție: a) Sandu se află în punctul C, la distanța $CD = 20$ m față de clădire, AD este înălțimea clădirii, $\sphericalangle ADC = 90°$ și $\sphericalangle ACD = 60°$. În triunghiul dreptunghic ADC, știm lungimea catetei CD și vrem să aflăm cateta AD.
Din $\operatorname{tg} \sphericalangle ACD = \frac{AD}{CD}$, obținem $\operatorname{tg} 60° = \frac{AD}{20}$. Rezultă că înălțimea clădirii este $AD = 20 \cdot \operatorname{tg} 60° = 20\sqrt{3}$ (m).
b) Fie B un punct din care clădirea se vede sub un unghi de 45°, $B \in CD$. Atunci, triunghiul ADB este dreptunghic isoscel și $AD = DB = 20\sqrt{3}$ (m), deci Sandu trebuie să se afle la distanța de $20\sqrt{3} \approx 34{,}64$ metri pentru a vedea clădirea sub un unghi de 45°.

Temă de portofoliu

Cum ar putea Sandu să măsoare înălțimea clădirii, folosind cele două poziții din problema precedentă, dar cunoscând doar distanța BC?

Aplicația 4: Calculați sinusul unghiului C al triunghiului oarecare ABC, în care $AB = 1$ dm, $BC = 1{,}4$ dm și $\sin B = \frac{3}{5}$.

Să nu ne pripim!



Nu putem folosi relația $\sin B = \frac{AC}{BC}$, deoarece despre ΔABC nu știm că ar fi dreptunghic.

Soluție: Exprimăm lungimile laturilor în centimetri, deci $AB = 10$ cm, $BC = 14$ cm. Fie $AD \perp BC$, $D \in BC$.

În triunghiul ABD, $\sphericalangle ADB = 90°$, $\sin B = \frac{AD}{AB}$, adică $\frac{3}{5} = \frac{AD}{10}$.

Rezultă $AD = 6$ cm. Aplicând teorema lui Pitagora, se obține $BD^2 = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$ (cm)
În triunghiul ADC, $\sphericalangle ADC = 90°$, $AD = 6$ cm și $DC = BC - BD = 6$ (cm).

Triunghiul ADC este dreptunghic isoscel, $\sphericalangle ACD = \sphericalangle C = 45°$ și $\sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Aplicația 5: Într-un triunghi ABC, $\sphericalangle A = \sphericalangle B + \sphericalangle C$, $AC = 5\sqrt{5}$ cm și $\sin \sphericalangle ACB = \frac{2}{3}$. Arătați că perimetrul triunghiului este mai mare decât 36 cm.
Soluție: Relația $\sphericalangle A = \sphericalangle B + \sphericalangle C$ ne evocă egalitatea provenită din suma măsurilor unghiurilor unui triunghi. Folosind acestea vom ajunge la $\sphericalangle A + \sphericalangle A = 180°$, deci triunghiul ABC este dreptunghic, cu $\sphericalangle A = 90°$.

Din $\sin \sphericalangle ACB = \frac{2}{3}$, deducem $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$, prin urmare putem nota $AB = 2x$, $BC = 3x$, unde $x > 0$.

Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul ABC, obținem $BC^2 = AB^2 + AC^2$, adică $(3x)^2 = (2x)^2 + (5\sqrt{5})^2$. Prin calcul, găsim $x = 5$ cm, $BC = 15$ cm și $AB = 10$ cm și $P_{\Delta ABC} = 25 + 5\sqrt{5} \geq 25 + 5 \cdot 2{,}2 = 36$ (cm).

Reținem!

Într-un triunghi dreptunghic:

- *sinusul* unui unghi ascuțit este raportul dintre lungimea catetei opuse acestui unghi și lungimea ipotenuzei.
- *cosinusul* unui unghi ascuțit este raportul dintre lungimea catetei alăturate acestui unghi și lungimea ipotenuzei.
- *tangenta* unui unghi ascuțit este raportul dintre lungimea catetei opuse și lungimea catetei alăturate acestui unghi.
- *cotangenta* unui unghi ascuțit este raportul dintre lungimea catetei alăturate și lungimea catetei opuse acestui unghi.

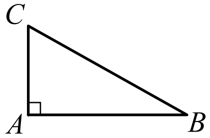
	α		
	30°	45°	60°
sin α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg α	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Fie triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90^\circ$. Copiați pe caiete și completați spațiile libere cu rapoartele corespunzătoare:

$\sin B = \ldots$ $\quad$ $\text{tg}\, B = \ldots$

$\cos C = \ldots$ $\quad$ $\text{ctg}\, C = \ldots$



2 În triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90^\circ$, $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. Notând măsura unghiului B cu u° și măsura unghiului C cu v°, copiați pe caiete și completați tabelul:

	u°	v°
sin		
cos		
tg		
ctg		

3 În triunghiul DEF, $\sphericalangle D = 90^\circ$, $DE = 8$ cm și $\sin F = 0{,}8$. Calculați perimetrul triunghiului.

4 Fie u° măsura unui unghi ascuțit al unui triunghi dreptunghic.

a) Dacă $\sin u^\circ = \dfrac{12}{13}$, calculați $\cos u^\circ$.

b) Dacă $\cos u^\circ = \dfrac{1}{6}$, calculați $\text{tg}\, u^\circ$.

c) Dacă $\text{tg}\, u^\circ = \dfrac{3}{4}$, calculați $\sin u^\circ$.

5 Calculați:

a) $\sin 30^\circ \cdot \text{tg}\, 45^\circ + \cos 30^\circ \cdot \text{ctg}\, 60^\circ$

b) $\sin 60^\circ \cdot \cos 60^\circ + \sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ$
$- \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ$

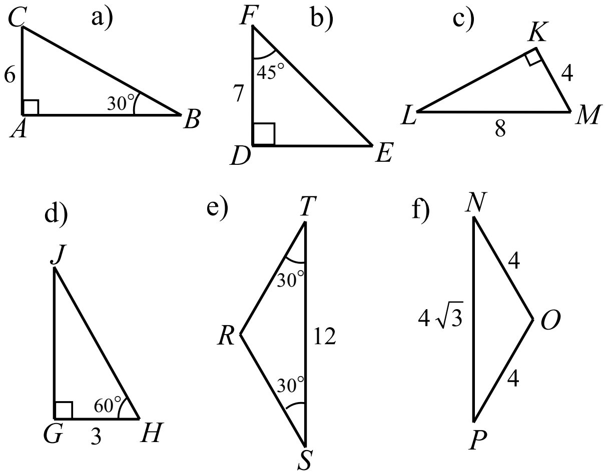
6 Triunghiul ABC este dreptunghic, $\sphericalangle B = 90^\circ$, $BD \perp AC$, $D \in AC$, $AD + DC = 10$ cm și $3 \cdot AD = 2 \cdot CD$.

a) Realizați un desen care să corespundă datelor problemei.

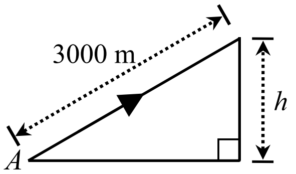
b) Calculați $\sin C$, $\text{tg}\, A$ și $\cos \sphericalangle CBD$.

7 Fie triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90^\circ$ și $D = pr_{BC}A$. Dacă $AD = 8$ cm și $BD = 4$ cm, calculați $\sin B + \sin C$.

8 Aflați măsurile unghiurilor și lungimile laturilor pentru triunghiurile din figurile de mai jos:



9 Un avion se desprinde de la sol în punctul A și urcă sub un unghi de 30°. Aflați la ce altitudine h ajunge după ce parcurge 3000 m.



10 Calculați aria și perimetrul triunghiului MNP știind că $\sphericalangle M = 90^\circ$, $MN = 18$ cm și $\text{tg}\, P = \dfrac{3}{4}$.

11 În trapezul $ABCD$, avem $\sphericalangle A = 90^\circ$, $\sphericalangle B = 60^\circ$, $BC = 8$ cm, $CD = 12$ cm.

a) Calculați înălțimea trapezului.

b) Demonstrați că $AC \perp BC$.

12 Triunghiul DEF este isoscel, $DE = DF = 18$ cm, $EF = 24$ cm. Calculați sinusul unghiului $\sphericalangle DEF$.

7.4 Rezolvarea triunghiului dreptunghic. Aplicații

L1 Rezolvarea triunghiului dreptunghic

Ne amintim

1) Elementele unui triunghi dreptunghic sunt: ipotenuza, cele două catete, unghiul drept și cele două unghiuri ascuțite.
2) Un poligon care are toate laturile și toate unghiurile congruente se numește poligon regulat.
3) Orice poligon regulat poate fi înscris într-un cerc.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Prin *rezolvarea triunghiului dreptunghic* înțelegem demersul logic pe care îl urmăm pentru aflarea tuturor elementelor triunghiului dreptunghic (toate laturile și toate unghiurile) atunci când sunt cunoscute un număr cât mai mic de elemente ale acestuia.

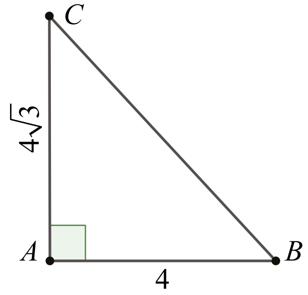
Exemple:
1) Dacă se cunosc două laturi, se poate afla a treia latură folosind teorema lui Pitagora. Apoi se pot afla și măsuri de unghiuri cu ajutorul rapoartelor de laturi (relații trigonometrice)
2) Dacă se cunoaște un unghi ascuțit, celălalt unghi ascuțit este complementul primului unghi; despre laturi nu obținem informații. Nu avem suficiente date pentru rezolvarea triunghiului.

Să analizăm două din cazurile care permit rezolvarea triunghiului dreptunghic:

C_1: Dacă se cunosc lungimile a două laturi ale triunghiului dreptunghic.

1) Se determină lungimea celei de-a treia laturi, folosind teorema lui Pitagora.
2) Se calculează raportul dintre cateta opusă unui unghi și ipotenuză și se determină sinusului acelui unghi ascuțit. Dacă este una dintre valorile care au fost determinate pentru unghiurile de 30°, 45°, 60°, atunci se pot afla și unghiurile ascuțite. Dacă nu este una dintre aceste valori, atunci se poate aproxima valoarea unghiului, folosind tabele care conțin valori aproximative ale sinusului unghiurilor ascuțite sau folosind calculatorul.

Aplicația 1: Se consideră triunghiul ABC în care $\sphericalangle A = 90^\circ$, $AB = 4$ cm, $AC = 4\sqrt{3}$ cm. Aflați lungimea ipotenuzei și măsurile unghiurilor ascuțite.



Soluție: Calculăm ipotenuza BC cu teorema lui Pitagora:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{16 + 48} = \sqrt{64} = 8 \text{ (cm)}.$$

$\sin B = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{4\sqrt{3}}{8} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, care este o valoare cunoscută, deci putem afla unghiurile ascuțite $\sphericalangle B = 60^\circ$, $\sphericalangle C = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Observație: În aplicația de mai sus se cunosc ambele catete. Demersul este similar atunci când se cunoaște o catetă și ipotenuza.

Temă de portofoliu

Rezolvați triunghiul MNP, cu $\sphericalangle M = 90^\circ$, $MN = 12$ cm și $NP = 12\sqrt{2}$ cm.

C_2: Dacă se cunoaște lungimea unei laturi și un raport între lungimile laturilor (una din valorile: sinusul, cosinusul, tangenta, cotangenta unui unghi ascuțit al triunghiului)

Se disting două situații:

a) Latura a cărei lungime se cunoaște este una dintre laturile raportului. Atunci, se află cealaltă latură din raport și am ajuns la cazul C_1, deci se pot afla toate elementele triunghiului.

b) Latura a cărei lungime se cunoaște nu apare în raportul dat.

Sunt posible situațiile:

b_1) raportul dat și latura cunoscută permit aflarea lungimilor celorlalte două laturi folosind teorema lui Pitagora și am ajuns la cazul C_1.

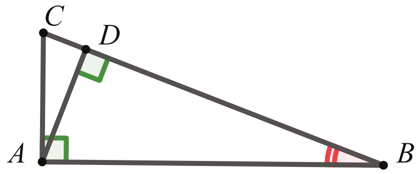
b_2) raportul dat ne dă posibilitatea să aflăm un alt raport, în care intervine latura cunoscută și am ajuns, din nou, la cazul C_1.

Aplicația 2:

În triunghiul ABC, se cunosc $\sphericalangle A = 90^\circ$, $\text{ctg}\sphericalangle ABC = 3$ și $BC = 5$ cm .
Fie AD înălțimea corespunzătoare ipotenuzei. Aflați valorile expresiilor:

a) $E_1 = AB \cdot AC \cdot \dfrac{1}{AD}$

b) $E_1 = AB \cdot \sin C + AC \cdot \sin B$.



Soluție: a) Aflăm lungimile segmentelor AB, AC, AD.

În triunghiul dreptunghic ABC, avem $\text{ctg}B = \dfrac{AB}{AC} = 3$. Atunci, $\dfrac{AB^2}{AC^2} = 9$, $\dfrac{AB^2}{AB^2 + AC^2} = \dfrac{9}{10}$

sau $\dfrac{AB^2}{BC^2} = \dfrac{AB^2}{25} = \dfrac{9}{10}$. Obținem $AB = \dfrac{3\sqrt{10}}{2}$ (cm), $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$ (cm) și

$$AD = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{3\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{2} \text{ (cm)}. \quad E_1 = \frac{3\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{2}{3} = 5.$$

b) Pentru expresia E_2 scriem rapoartele $\sin C$, $\sin B$ și, fără a înlocui lungimile lor, se calculează

$$AB \cdot \sin C + AC \cdot \sin B = AB \cdot \frac{AB}{BC} + AC \cdot \frac{AC}{BC} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC} = \frac{BC^2}{BC} = BC = 5 \text{ (cm)}$$

Comentariu: Măsura exactă a unghiurilor nu poate fi aflată, deoarece valoarea pentru $\text{ctg} \sphericalangle ABC = 3$ nu este printre cele determinate de noi. Pentru aflarea unghiului ABC și a complementului său, se pot folosi tabelele de valori aproximative.

L2 Aplicații ale triunghiului dreptunghic în determinarea elementelor unor poligoane regulate și în situații practice

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

A. Calculul elementelor (latură, apotemă, arie, perimetru) în triunghiul echilateral, în pătrat și în hexagonul regulat

Când vorbim de un poligon regulat, ne referim la: *latura poligonului*, *un unghi al poligonului*, *raza cercului circumscris poligonului*, *diagonalele poligonului*, *apotema poligonului*, *perimetrul și aria* acestuia.

În numeroase cazuri, cunoaștem un element sau câteva dintre elementele unui poligon regulat și le determinăm pe celelalte.

Vom studia, în acest sens, poligoanele regulate cu 3, 4 respectiv 6 laturi. Notăm L latura poligonului regulat cu n laturi, $n \in \{3, 4, 6\}$ și R raza cercului circumscris acestui poligon. Vom determina câteva relații foarte utile.

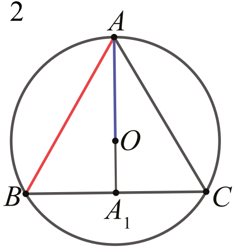
A$_1$. Relația între lungimea laturii unui poligon regulat și raza cercului circumscris

- În triunghiul echilateral ABC, liniile importante ale triunghiului coincid și se intersectează în O, centrul cercului circumscris. Punctul O aparține medianei AA_1, pe care o împarte în raportul $\frac{OA_1}{OA} = \frac{1}{2}$.

  În triunghiul dreptunghic ABA_1 notăm $AB = L$, iar $BA_1 = \frac{L}{2}$.

  Calculăm cu teorema lui Pitagora $AA_1 = \sqrt{AB^2 - BA_1^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}L$.

  Pentru raza AO, avem: $R = AO = \frac{2}{3}AA_1 = \frac{L}{\sqrt{3}}$, deci $L = R\sqrt{3}$.

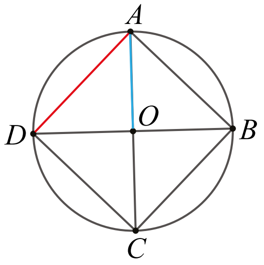


- Pătratul $ABCD$ este înscris în cercul de centru O.

  Diagonalele pătratului sunt diametre, deci O este punctul de intersecție a diagonalelor și determină segmente congruente (le înjumătățește).

  În triunghiul dreptunghic ADB, notăm $AB = L$, iar cu teorema lui Pitagora calculăm $DB = \sqrt{AB^2 + AD^2} = L\sqrt{2}$.

  Raza cercului circumscris este oricare din segmentele OA, OB, OC, OD, deci $R = OB = \frac{1}{2}BD = \frac{L}{\sqrt{2}}$. Am obținut $L = R\sqrt{2}$.

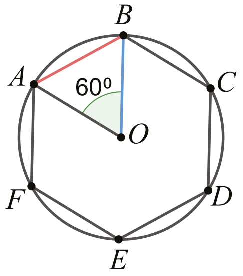


- Hexagonul $ABCDEF$ este înscris în cercul de centru O.

  Unghiul la centru corespunzător unei laturi are măsura $360^\circ : 6 = 60^\circ$.

  În triunghiul echilateral AOB notăm cu $AB = L$, iar raza este OA.

  Am obținut $L = R$.

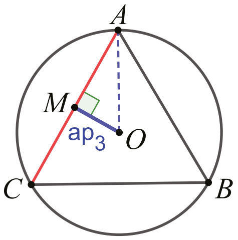


- Pentru poligonul regulat cu n laturi, triunghiurile cu vârful în centrul cercului circumscris și o latură comună cu latura poligonului sunt isoscele și congruente (au două laturi raze ale cercului, iar a treia este chiar latura patrulaterului regulat). Deducem că în toate aceste triunghiuri, înălțimile duse din vârful O, sunt congruente, adică distanța de la centrul cercului circumscris la oricare dintre laturile poligonului, este aceeași.

Definiția 1: Distanța de la centrul cercului circumscris la o latură unui poligon regulat se numește **apotemă** a poligonului.

Pentru un poligon regulat cu n laturi, notăm apotema poligonului cu a_n.

A_2. Relația dintre apotemă și raza cercului circumscris

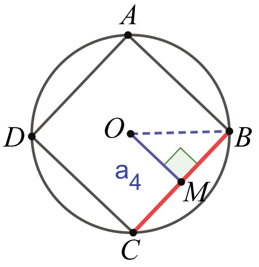


$d(O, AC) = a_3$

Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul AOM:

$$a_3 = OM = \sqrt{AO^2 - AM^2}$$

$$a_3 = \frac{L\sqrt{3}}{6} = \frac{R}{2}$$

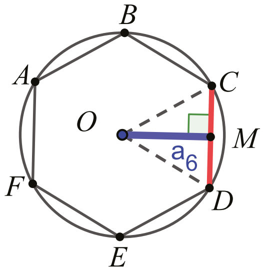


$d(O, BC) = a_4$

Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul BOM:

$$a_4 = OM = \sqrt{BO^2 - BM^2}$$

$$a_4 = \frac{L}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$



$d(O, CD) = a_6$

Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul COM:

$$a_6 = OM = \sqrt{CO^2 - CM^2}$$

$$a_6 = \frac{L\sqrt{3}}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

A_3. Unghiurile poligonului regulat

Cu notațiile din figurile de la aplicația A_2, au loc relațiile:

	Triunghiul echilateral ABC	Pătratul $ABCD$	Hexagonul regulat $ABCDEF$
Unghiul format de două laturi alăturate	$\sphericalangle ABC = 60^\circ$	$\sphericalangle ABC = 90^\circ$	$\sphericalangle ABC = 120^\circ$
Unghiul la centru corespunzător unei laturi	$\sphericalangle AOB = 120^\circ$	$\sphericalangle AOB = 90^\circ$	$\sphericalangle AOB = 60^\circ$

A_4. Perimetrul și aria poligoanelor regulate

Calculăm perimetrul unui poligon regulat cu n laturi ca suma lungimilor tuturor laturilor: $\mathcal{P}_n = n \cdot L$.

$\mathcal{P}_3 = 3 \cdot L$	$\mathcal{P}_4 = 4 \cdot L$	$\mathcal{P}_6 = 6 \cdot L$

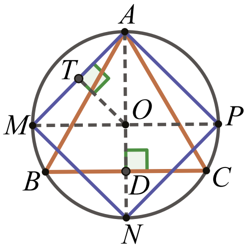
Descompunem suprafața poligonală în n suprafețe triunghiuri isoscele congruente, cu vârful în centrul cercului circumscris, având ca bază o latură a poligonului. Apotema poligonului devine înălțime a acestor triunghiuri. Rezultă formula pentru aria poligonului regulat cu n laturi: $\mathcal{A}_n = n \cdot \dfrac{L \cdot a_n}{2}$

$\mathcal{A}_3 = \dfrac{L^2\sqrt{3}}{4}$	$\mathcal{A}_4 = L^2$	$\mathcal{A}_6 = 6 \cdot \dfrac{L^2\sqrt{3}}{4}$

Aplicația 1: Un triunghi și un pătrat au vârfurile pe același cerc.

a) Dacă latura triunghiului echilateral este de 12 cm, calculați apotema pătratului.

b) Dacă aria pătratului este 72 cm², aflați apotema triunghiului.



Soluție: Vârfurile poligoanelor regulate ABC și $AMNP$ sunt situate pe cercul $\mathcal{C}(O, R)$.

a) Fie AD înălțime în triunghiul ABC cu $AB = 12$ cm. Atunci, $\sphericalangle ADB = 90^\circ$ și în triunghiul ABD cu $\sphericalangle ABD = 60^\circ$, calculăm AD, $\sin(\sphericalangle ABD) = \dfrac{AD}{AB} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{AD}{12} \Rightarrow AD = 6\sqrt{3}$ cm.

Dar $O \in AD$ și $AO = R = \dfrac{2}{3} \cdot AD = 4\sqrt{3}$ (cm). În triunghiul AOM, $\sphericalangle AOM = 90^\circ$, $AO = OM = 4\sqrt{3}$ (cm), $\sphericalangle MAO = 45^\circ$, iar AM este latura pătratului. Fie $OT \perp AM$, $T \in AM$. Rezultă $\sphericalangle ATO = 90^\circ$ și OT este apotema pătratului.

În triunghiul ATO avem $\sin(\sphericalangle TAO) = \dfrac{OT}{AO} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{OT}{4\sqrt{3}} \Rightarrow OT = a_4 = 2\sqrt{6}$ (cm).

b) $\mathcal{A}_{AMNP} = 72$ cm², rezultă $AM^2 = 72$, deci $AM = 6\sqrt{2}$ cm. În triunghiul AMN dreptunghic isoscel cu $AM = MN = 6\sqrt{2}$ (cm), se obține $AN = AM\ \sqrt{2} = 12$ (cm). AN este diametru al cercului deci $R = AO = 6$ (cm).

În triunghiul echilateral ABC, AD este înălțime, $O \in AD$ și $OD = a_3 = \dfrac{R}{2} = 3$ (cm).

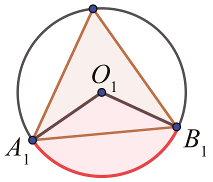
Aplicația 2: Punctele A și B aparțin unui cerc $\mathcal{C}(O,R)$, cu $\overset{\frown}{AB} = 120°$ și $AB = 24\sqrt{3}$ cm. Aflați raza cercului și apotema hexagonului regulat cu vârfurile pe cercul $\mathcal{C}(O,R)$.

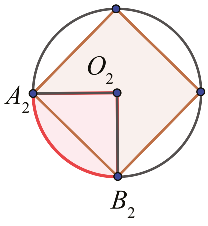
Soluție: Dacă măsura arcului mic este 120°, atunci AB este latura triunghiului echilateral (vezi A_3).

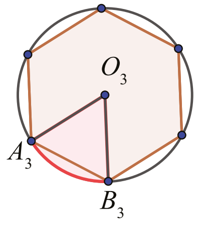
Deci $AB = L = R\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$. Rezultă $R = 24$, iar $a_6 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$.

Aplicația 3: Se consideră discul de diametru 10 cm. Decideți care dintre poligoanele regulate cu 3, 4 sau 6 laturi se poate decupa din acest disc astfel încât pierderea de material să fie minimă. Exprimați suprafața îndepărtată, în procente.

Soluție: Figurile corespunzătoare celor trei poligoane regulate sunt:







Aria suprafeței îndepărtate (pierdute) este diferența dintre aria discului și aria poligonului regulat.

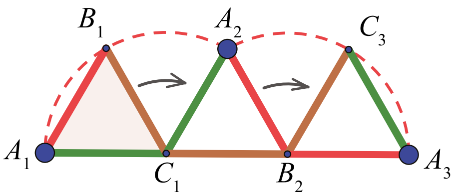
	Aria suprafeței materialului pierdut	Procentul
Triunghi	$\pi R^2 - \dfrac{3\sqrt{3}R^2}{4} = \dfrac{\left(4\cdot\pi - 3\sqrt{3}\right)R^2}{4}$	$\dfrac{4\cdot\pi - 3\sqrt{3}}{4\cdot\pi}\cdot 100\% \approx 58{,}65\%$
Pătrat	$\pi R^2 - 2\cdot R^2 = \left(\pi - 2\right)R^2$	$\dfrac{\pi - 2}{\pi}\cdot 100\% \approx 36{,}3\%$
Hexagon	$\pi R^2 - \dfrac{3\sqrt{3}R^2}{2} = \dfrac{\left(2\cdot\pi - 3\sqrt{3}\right)R^2}{2}$	$\dfrac{2\cdot\pi - 3\sqrt{3}}{2\cdot\pi}\cdot 100\% \approx 17{,}30\%$

Exprimarea procentuală arată că, în cazul hexagonului, se pierde cel mai puțin material.

B. Calculul distanțelor, în situații practice, folosind relații metrice

Aplicația 1:

Triunghiul echilateral ABC are latura 10 cm. Rostogolim triunghiul, fără alunecare, pe dreapta AB. Calculați lungimea arcelor parcurse de punctul A. Desenați pe caiete traiectoria parcursă de punctul A până ajunge din nou pe dreapta AB.



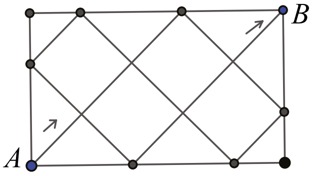
Soluție: Considerăm $A_1B_1C_1$ poziția inițială a triunghiului echilateral dat. Acesta s-a rotit în jurul lui C_1 cu 120°. Punctul A_1 descrie arcul $\overset{\frown}{A_1B_1A_2}$, care are lungimea egală cu o treime din lungimea cercului de rază 10 cm (corespunde unui unghi la centru de 120° care este o treime din unghiul de 360°).

Astfel, punctul A ajunge din poziția A_1 în poziția A_2. Triunghiul continuă rostogolirea, rotindu-se cu un unghi de 120° în jurul punctului B_2, iar A descrie arcul $\overset{\frown}{A_2C_2A_3}$, congruent cu primul arc. Așadar, lungimea arcelor parcurse de punctul A de pe „roata triunghi” este $2\cdot\dfrac{2\cdot\pi\cdot R}{3} = \dfrac{4\cdot\pi\cdot R}{3} = \dfrac{40\cdot\pi}{3}$.

Temă de portofoliu

Formulați și rezolvați aceeași cerință pentru „roata” pătrat sau hexagon.

Aplicația 2



O masă dreptunghiulară de biliard are dimensiunile în raportul 3 : 5. Arătați că dacă lansez o bilă din unul din colțuri la un unghi de 45° față de laturile mesei, acesta având o reflexie perfectă cu marginile mesei în cele șase puncte, va ajunge exact în colțul opus. Găsiți raportul dintre lungimea traseului parcurs de bilă și perimetrul mesei.

Soluție: Notând dimensiunile dreptunghiului cu 3L și 5L avem perimetrul 16L iar triunghiurile pe ipotenuza cărora merge bila sunt dreptunghice isoscele, având, în această ordine, dimensiunile: $3\sqrt{2}L$, $2\sqrt{2}L$, $\sqrt{2}L$, $3\sqrt{2}L$, $\sqrt{2}L$, $2\sqrt{2}L$, $3\sqrt{2}L$ adică lungimea parcursă de bilă este $15\sqrt{2}\,L$. Raportul dintre lungimea traseului parcurs de bilă și perimetrul mesei este $\frac{15\sqrt{2}}{16}$.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Fie triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90^\circ$.

a) Dacă $AB = 4$ cm și $\sphericalangle B = 60^\circ$, aflați $\sphericalangle C$, AC, BC.

b) Dacă $AC = 12$ cm și $\sin B = 0,6$, aflați AB, BC și $\text{tg}\, B$.

c) Dacă $AB = 3 \cdot AC$ și $BC = \sqrt{10}$ cm, aflați $\sin B$ și înălțimea corespunzătoare ipotenuzei.

2 AD este înălțimea corespunzătoare ipotenuzei triunghiului ABC, $AD = 18$ cm și $\text{tg} \sphericalangle ACB = 2$. Calculați AC, AB și $\sin \sphericalangle ABC$.

3 Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu $\sphericalangle B = 90^\circ$. Calculați lungimile laturilor triunghiului, măsurile unghiurilor și înălțimea corespunzătoare ipotenuzei, în următoarele situații:

a) $\sphericalangle A = \sphericalangle C$ și $AC = 12\sqrt{2}$ cm;

b) $AB = 8$ cm și $\text{tg}\, C = \sqrt{3}$;

c) $BC = 2\sqrt{3}$ și $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = 2\sqrt{3}$ cm².

4 $ABCD$ este un dreptunghi, M este mijlocul laturii CD, iar $N \in BC$, astfel încât $\sphericalangle DAM = \sphericalangle CMN = u$.

a) Arătați că triunghiul AMN este dreptunghic.

b) Dacă $u = 30^\circ$ și $AB = 2\sqrt{3}$ cm, calculați raportul dintre aria triunghiului AMN și aria dreptunghiului.

5 În triunghiul DEF, $\sphericalangle D = 45^\circ$, $\sphericalangle E = 60^\circ$ și $DF = 3\sqrt{2}$ cm.

a) Calculați FM, înălțimea corespunzătoare laturii DE.

b) Calculați perimetrul triunghiului FME.

c) Arătați că latura DE are lungimea mai mare de 4,7 cm.

6 Fie triunghiul ABC cu $AB = 30$ cm, $BC = 24$ cm, $CA = 18$ cm și P mijlocul laturii AB. Aflați $n = \sin \sphericalangle ACP + \sin \sphericalangle BCP$.

7 În triunghiul ABC, $\sphericalangle A = 90^\circ$, $\sphericalangle C = 15^\circ$ și AD este înălțimea triunghiului.

a) Desenați mediana AM a triunghiului ABC și determinați măsurile unghiurilor triunghiului ADM.

b) Dacă $BC = 4a$, exprimați lungimile segmentelor AM și MD în funcție de a.

c) Demonstrați că $4 \cdot AD^2 = AC \cdot AB$.

8 Punctele A, B, C sunt coliniare în această ordine, $AB = 2$ cm, $BC = 8$ cm și $DB \perp AC$, $DB = 4$ cm.

a) Calculați $\sin \sphericalangle ADB + \sin \sphericalangle BDC$.

b) Aflați perimetrul triunghiului ADC.

9 În triunghiul oarecare TRI se știe că $\sphericalangle R = 60^\circ$, $TR = 8$ cm, $RI = 12$ cm, iar $TA \perp RI$, $A \in RI$.

a) Aflați lungimile segmentelor AR și TI.

b) Punctul B este simetricul punctului R față de mijlocul segmentului AI. Demonstrați că triunghiul BTR este dreptunghic.

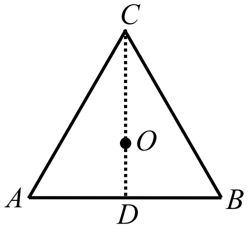
10 $ABCD$ este un romb cu $AB = 24$ cm şi $AC \cap BD = \{O\}$. Ştiind că $\frac{AO}{BO} = \sqrt{3}$, calculaţi lungimile diagonalelor rombului.

11 În trapezul dreptunghic $ABEF$, $AB \parallel EF$, $\sphericalangle A = 90^\circ$, $\sphericalangle B = 60^\circ$, $AB = 15$ cm şi BF este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABE$.

a) Calculaţi lungimea bazei mici a trapezului.

b) Dacă C este mijlocul diagonalei BF, aflaţi perimetrul triunghiului ACE.

12 În figura alăturată, ABC este un triunghi echilateral şi O este centrul cercului circumscris.



Precizaţi segmentul a cărui lungime reprezintă:

a) raza cercului circumscris;

b) raza cecului înscris;

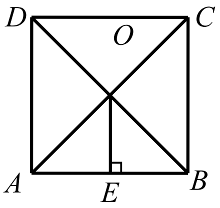
c) apotema triunghiului.

13 În tabelul următor l, R, a, $\mathcal{P}$ şi $\mathcal{A}$ reprezintă latura, raza cercului circumscris, apotema, perimetrul şi aria unui triunghi echilateral (dimensiunile sunt date în cm, respectiv cm^2).

	l	R	a	$\mathcal{P}$	$\mathcal{A}$
a)	18				
b)		$4\sqrt{3}$			
c)			$3\sqrt{3}$		
d)					$36\sqrt{3}$

Copiaţi pe caiete şi completaţi spaţiile libere, efectuând calculele necesare.

14 În figura alăturată, $ABCD$ este un pătrat şi O este punctul de intersecţie a diagonalelor. Precizaţi segmentul a cărui lungime reprezintă:



a) diametrul cercului circumscris;

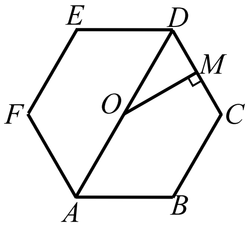
b) raza cercului înscris;

c) apotema pătratului.

15 În tabelul următor l, R, a, $\mathcal{P}$ şi $\mathcal{A}$ reprezintă latura, raza cercului circumscris, apotema, perimetrul şi aria unui pătrat (cm, respectiv cm^2). Copiaţi pe caiete şi completaţi spaţiile libere, efectuând calculele necesare.

	l	R	a	$\mathcal{P}$	$\mathcal{A}$
a)	8				
b)		$10\sqrt{2}$			
c)			5		
d)					3,24

16 În figura alăturată $ABCDEF$ este un hexagon regulat şi O este centrul cercului circumscris. Precizaţi segmentul a cărui lungime reprezintă:



a) raza cercului circumscris;

b) raza cercului înscris;

c) apotema.

17 În tabelul următor l, R, a, $\mathcal{P}$ şi $\mathcal{A}$ reprezintă latura, raza cercului circumscris, apotema, perimetrul şi aria unui hexagon regulat. Completaţi spaţiile libere efectuând calculele necesare.

	l	R	a	$\mathcal{P}$	$\mathcal{A}$
a)				36	
b)		3			
c)			$\sqrt{3}$		
d)					$144\sqrt{3}$

18 Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat cu latura de 24 cm. Calculaţi:

a) Măsurile unghiurilor $\sphericalangle ACB$ şi $\sphericalangle BDF$.

b) Raza cercului circumscris hexagonului.

c) Perimetrul triunghiului ADE.

d) Aria patrulaterului $ACDF$.

19 Aflaţi latura unui triunghi echilateral ştiind că diferenţa dintre raza cercului circumscris şi apotemă este de 2 cm.

20 În cercul $\mathcal{C}(O,\ R)$, $R = \sqrt{11}$ cm, sunt înscrise un triunghi echilateral, un pătrat şi un hexagon regulat. Notând l_3, l_4 respectiv l_6 lungimile laturilor acestor poligoane, calculaţi

$$l_3^{-2} + l_4^{-2} + l_6^{-2}$$

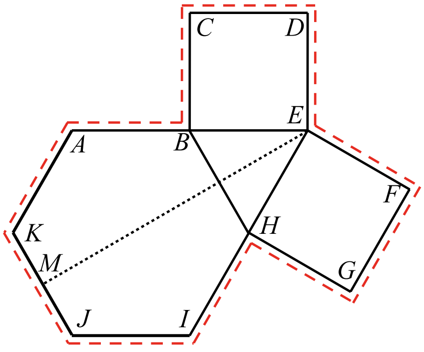
Evaluare sumativă

Se acordă 10 puncte din oficiu.

I. *La cerințele următoare alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.*

5p	**1.** Lungimea diagonalei unui pătrat cu aria de 200 cm^2 este: A. 30 cm B. 24 cm C. 20 cm D. 15 cm
5p	**2.** Un triunghi isoscel are laturile congruente de 15 cm și înălțimea corespunzătoare bazei de 9 cm. Baza triunghiului are lungimea: A. 24 cm B. 20 cm C. 28 cm D. 32 cm
5p	**3.** În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90^\circ$, AD este înălțime, $BD = 3$ cm, iar $CD = 12$ cm. Segmentul AD are lungimea: A. 8 cm B. 9 cm C. 10 cm D. 6 cm
5p	**4.** Un sector de cerc are aria o optime din aria discului din care provine. Măsura unghiului la centru este: A. 30° B. 45° C. 60° D. 15°
5p	**5.** Triunghiul ABC are $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm, $AC = 10$ cm. Proiecția segmentului AB pe dreapta AC are lungimea: A. 3,2 cm B. 2,4 cm C. 6,3 cm D. 3,6 cm
5p	**6.** În trapezul isoscel $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = 17$ cm, $CD = 5$ cm și $\cos \sphericalangle BAD = 0{,}75$. Laturile neparalelele au lungimea de: A. 8 cm B. 10 cm C. 12 cm D. 16 cm
5p	**7.** Un triunghi dreptunghic are înălțimea corespunzătoare ipotenuzei de $6\sqrt{2}$ cm și proiecția unei catete pe ipotenuză de 6 cm. Aria triunghiului este: A. $36\sqrt{2}$ B. $18\sqrt{2}$ C. $54\sqrt{2}$ D. $48\sqrt{2}$
5p	**8.** Distanța de la centrul de greutate al unui triunghi echilateral la una dintre laturi este 2 cm. Raza cercului circumscris triunghiului are lungimea: A. 2 cm B. 4 cm C. 1 cm D. 6 cm

II. *La problemele următoare se cer rezolvări complete.*

	1. În dreptunghiul $ABCD$, cu $AB < BC$, diagonalele se intersectează în punctul O, iar $BO = 10$ cm. Punctul P este proiecția punctului B pe diagonala AC și $AP - CP = 12$ cm.
5p	a) Realizați un desen care să corespundă datelor problemei.
10p	b) Calculați lungimile segmentelor AC și BP.
10p	c) Aflați tangenta unghiului format de diagonalele dreptunghiului.
	2. În figura alăturată, linia punctată reprezintă schița unui circuit de motociclism viteză. Pista circuitului înconjoară un teren compus din hexagonal regulat $ABHIJK$, pătratele $BCDE$, $EFGH$ și triunghiul echilateral BEH. Se știe că $AB = 450$ m, iar lungimea pistei este cu 20% mai mare decât perimetrul terenului înconjurat de pistă. 
10p	a) Calculați lungimea pistei exprimând rezultatul în km.
15p	b) În timpul competițiilor, o camera video aeriană se deplasează pe un cablu, pe traseul EM și transmite imagini de la cursele de motociclism. Arătați $EM < 1{,}3$ km.

Probleme de sinteză

1 Efectuați următoarele calcule cu numere reale:

a) $1+\sqrt{2+\sqrt{4}}$ b) $10+\sqrt{20+\sqrt{25}}$ c) $\sqrt{64+3\cdot\sqrt{144}}$

d) $\sqrt{306+2\cdot\sqrt{33+3\cdot\sqrt{256}}}$ e) $\frac{1}{2}\sqrt{64}+\frac{1}{3}\sqrt{81}+\frac{1}{4}\sqrt{144}$ f) $0,(7)\cdot\sqrt{36}-2,5\cdot\sqrt{400}$

g) $\sqrt{25^{n+1}:5^{2n}}$ h) $\sqrt{2^{2n+1}+3\cdot4^{n}+4^{n+1}}$ i) $\sqrt{\left(-\sqrt{5}\right)^{2}}+\sqrt{\left(\sqrt{5}-3\right)^{2}}$.

2 a) Arătați că numărul $A=\frac{\sqrt{24,01}+\sqrt{37,21}}{\sqrt{4,84}+\sqrt{10,89}}$ este număr natural.

b) Arătați că numărul $B=\sqrt{146,41}:\left(-\sqrt{1,21}\right)$ este număr întreg.

3 Scrieți prin enumerarea elementelor mulțimea $M=\left\{x\in\mathbb{N} \mid \sqrt{0,(4)}<x<\sqrt{1+4,(4)}\right\}$.

4 Determinați numerele naturale *n* pentru care numerele următoare sunt raționale.

a) $\sqrt{\frac{16}{n}}$, $n<20$; b) $\sqrt{\frac{5-n}{n}}$; c) $\sqrt{\frac{100-n^{2}}{81}}$; d) $\sqrt{\frac{1}{50-n^{2}}}$.

5 Reprezentați pe axa numerelor punctele $A(-2)$, $B(\sqrt{2})$, $C(4-\sqrt{2})$, $D(5)$. Determinați lungimile segmentelor *AB* și *CD*. Stabiliți care dintre ele este mai mare. Justificați răspunsul dat.

6 Se consideră numerele $a=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1}+\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^{-3}$ și $b=\left(\frac{2}{\sqrt{27}-\sqrt{3}}\right)^{-1}+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-3}$.

Aflați numărul $c=\left|1+a\right|+\left|7-\sqrt{6}\cdot b\right|$.

7 Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor *x* și *y*, știind că

$\sqrt{\left(x-\sqrt{2}\right)^{2}}+\sqrt{\left(y-2\sqrt{2}\right)^{2}}\leq 0$.

8 Rezolvați următoarele sisteme de ecuații liniare:

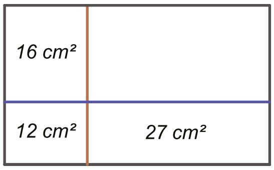
a) $\begin{cases} 2\cdot(x-2)+3\cdot\left(y-\frac{1}{3}\right)=2 \\ 5-\left(y+\frac{1}{3}\right)=4\cdot(x-1)-\frac{1}{3} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-\frac{x-y+1}{3}=y \\ y-\frac{y-x+4}{2}=x-3y \end{cases}$.

9 La o librărie s-au vândut într-o zi 200 de caiete de matematică și dictando, obținându-se suma de 588 de lei. Știind că un caiet de matematică costă 3,60 lei, iar unul dictando costă 2,40 lei, determinați numărul caietelor de matematică vândute în acea zi.

10 Dreptunghiul din desenul alăturat este împărțit, prin drepte paralele cu laturile, în patru regiuni, având ariile înscrise în interioarele lor.

a) Precizați numărul dreptunghiurilor din imagine.

b) Determinați aria dreptunghiului mare.

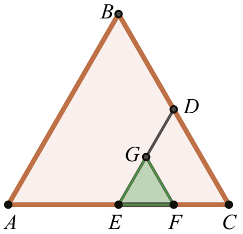


11 Pătratul *EFGH* are vârfurile pe un cerc $\mathcal{C}(O,r)$, iar distanța de la centrul cercului la una dintre laturi este $4\sqrt{2}$ cm. Calculați raza și lungimea cercului în care este înscris pătratul *EFGH*, apoi calculați aria discului mărginit de acest cerc.

12 Fie $ABCD$ un patrulater convex și M un punct pe diagonala AC a patrulaterului. Se construiește $ME \parallel AB$, $E \in BC$ și $MF \parallel CD$, $F \in AD$.

a) Arătați că $AF \cdot BC = BE \cdot AD$.

b) Dacă $\frac{AF}{FD} = \frac{CE}{EB}$, demonstrați că M este mijlocul diagonalei AC.



13 În desenul din figura alăturată, triunghiurile ABC și EFG sunt echilaterale, $A_{ABC} = 144\text{ cm}^2$, $AE \equiv EC$ și $DG \equiv GE$. Calculați aria patrulaterului $CDGF$.

14 Dreptunghiul $ABCD$ este înscris într-un cerc de centru O și $AC = 2 \cdot BC$.

a) Demonstrați că O este punctul în care se intersectează diagonalele dreptunghiului;

b) Aria triunghiului AOD este $4\sqrt{3}$ cm²; calculați lungimea cercului și aria discului delimitat de acest cerc.

15 Se consideră triunghiul ABC cu $AB = AC = 12$ cm, $BC = 12\sqrt{2}$ cm și BM mediană a triunghiului. Determinați $\cos \sphericalangle AMB$.

16 Într-un trapez isoscel baza mare are lungimea de 30 cm, linia mijlocie este de 27 cm și înălțimea este de 4 cm.

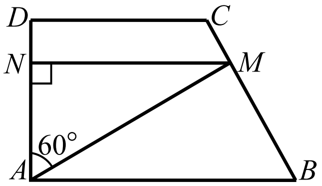
a) Calculați perimetrul și lungimea diagonalelor trapezului.

b) Calculați distanța de la un vârf al bazei mari la latura neparalelă căreia nu-i aparține.

17 Se consideră $ABCD$ un trapez dreptunghic, cu $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$ și M un punct pe latura BC astfel încât $BM = 3 \cdot CM$.

a) Calculați distanța de la punctul M la dreapta AD, în funcție de lungimile bazelor, $AB = x$ și $CD = y$, $x > y$.

b) Dacă $AD = 22$ cm și $\sphericalangle DAM = 60°$, aflați AM.



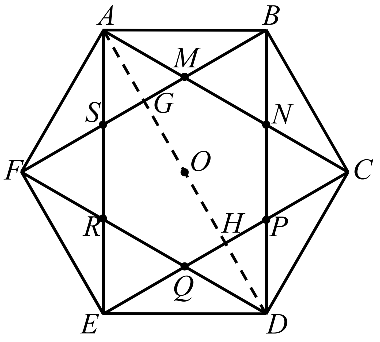
18 Fie triunghiul ABC cu laturile $AB = 6$ cm, $AC = 4$ cm și $\sphericalangle A = 60°$. Aflați aria, perimetrul și lungimea înălțimii din A a triunghiului.

19 Hexagonul regulat $ABCDEF$ are latura de 1 dm. Diagonalele AC, BD, CE, DF, EA și FB se intersectează câte două și determină hexagonul $MNPQRS$ (figura alăturată), iar dreapta AD intersectează BF în punctul G și CE în punctul H.

a) Demonstrați că $MNPQRS$ este un hexagon regulat.

b) Calculați lungimile segmentelor AG, GH, HD.

c) Aflați raportul dintre apotemele celor două hexagoane.



20 Fie $ABCD$ un patrulater convex și M un punct pe diagonala AC a patrulaterului.
Se construiește $ME \parallel AB$, $E \in BC$ și $MF \parallel CD$, $F \in AD$.

Arătați că $\frac{AF}{AD} + \frac{CE}{BC} = 1$.

21 Pe latura CD a dreptunghiului $ABCD$, se consideră punctele E și F astfel încât $DE = \frac{CD}{4}$ și $CF = \frac{CD}{3}$.
Fie $AE \cap BF = \{M\}$ și $MT \perp CD$, $T \in CD$. Aflați valoarea raportului $\frac{ET}{TF}$.

Teste finale și răspunsuri

T1 Test final 1

Se acordă 10 puncte din oficiu.

I. *Copiați pe caiete, apoi completați în căsuța alăturată fiecărui enunț litera **A**, dacă propoziția este adevărată și litera **F**, dacă propoziția este falsă:*

5p	**1.** Rezultatul calculului $\sqrt{20}+\sqrt{45}-\sqrt{80}$ este $\sqrt{5}$.
5p	**2.** Soluția, număr negativ, a ecuației $(x+3)^2=25$ este -4.
5p	**3.** Dacă $x>0$, $y<0$ și $x^2=5$, $y^2=20$, atunci $\frac{1}{2}\cdot x\cdot y=-5$.
5p	**4.** Linia mijlocie a unui trapez cu bazele de 6 cm și 14 cm are lungimea de 9 cm.
5p	**5.** Un pătrat are aria de 64 cm^2. Mărind perimetrul pătratului cu 32 cm, aria devine 256 cm^2.
5p	**6.** Distanța dintre punctele $A(1, 3)$ și $B(5, 0)$ este 10 (u.m.).

II. În triunghiul dreptunghic ABC cu $\sphericalangle BAC=90°$, $AB=24$ cm și $\sin C=\frac{4}{5}$, segmentele AD și AM sunt înălțimea, respectiv mediana corespunzătoare ipotenuzei.
Asociați fiecare cifră corespunzătoare cerințelor din coloana A, cu litera care indică răspunsul corect, aflat în coloana B.

	A	***B***
5p	**1.** $BC=$	**a.** 18 cm **b.** 14,4 cm **c.** 4,4 cm **d.** 12 cm **e.** 30 cm **f.** 14,2 cm
5p	**2.** $AC=$	
5p	**3.** $AD=$	
5p	**4.** $DM=$	

III. *La problemele următoare se cer rezolvări complete.*

	1. Se consideră numărul $a=\sqrt{6}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{6}}\right)-\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{3}{2\sqrt{3}}\right)$.
10p	a) Efectuați calculele și stabiliți dacă $a\in\mathbb{Q}$ sau $a\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$.
10p	b) Comparați numărul a cu numărul $b=\left|\left(-\frac{5}{6}\right)^{-1}\right|$.
	2. O bucată de carton are forma unei suprafețe dreptunghiulare cu dimensiunile 20 cm și 30 cm.
10p	a) Calculați diagonala dreptunghiului.
10p	b) Determinați numărul minim de suprafețe pătratice în care poate fi împărțită bucata de carton, având latura de aceeași lungime, exprimată în centimetri, printr-un număr natural.

T2 Test final 2

Se acordă 10 puncte din oficiu.

I. *La cerințele următoare alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.*

5p	**1.** Fie $A=\left\{0,(8);\sqrt{0,(1)};\sqrt{3};\frac{\sqrt{25}}{5};4,(123)\right\}$. Numărul elementelor mulțimii $A \cap \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ este: A. 2 B. 1 C. 3 D. 4
5p	**2.** Calculând $\left(2\sqrt{10}+\sqrt{2}\right):\sqrt{2}-\frac{10}{\sqrt{5}}$, se obține: A. $\sqrt{10}$ B. $\sqrt{2}$ C. 1 D. $\sqrt{5}$
5p	**3.** Dacă $n=-2\sqrt{7}$ și $p=-4\sqrt{2}$, atunci: A. $n>p$ B. $n=p$ C. $n=-p$ D. $n<p$
5p	**4.** Un triunghi dreptunghic are lungimile catetelor direct proporționale cu numerele 8 respectiv 15 și ipotenuza de 17 cm. Perimetrul triunghiului este: A. 60 cm B. 50 cm C. 40 cm D. 30 cm
5p	**5.** Apotema unui triunghi echilateral este de $2\sqrt{3}$ cm. Latura triunghiului are lungimea: A. 8 cm B. 12 cm C. 15 cm D. 6 cm
5p	**6.** Raportul măsurilor arcului mic și a arcului mare $\overset{\frown}{AB}$ situate pe un cerc $\mathcal{C}(O,r)$ este $\frac{1}{7}$. Măsura unghiului $\sphericalangle AOB$ este: A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°
5p	**7.** Soluția sistemului $\left\{\begin{array}{l} x+\ \ y=11 \\ -x+11y=\ 1 \end{array}\right.$ este: A. $S=\{(1;10)\}$ B. $S=\{(10;1)\}$ C. $S=\{(-1;10)\}$ D. $S=\{(1;-10)\}$
5p	**8.** În cercul $C(O,r)$ cu $r=5$ cm, se consideră coardele paralele $AB=8$ cm, $CD=2\sqrt{21}$ cm. Distanța dintre AB și CD este: A. 4 cm B. 5 cm C. 6 cm D. 8 cm

II. *La problemele următoare se cer rezolvări complete.*

20p	**1.** Numerele naturale x, y, z verifică egalitățile $\sqrt{x+2}=3$ și $\sqrt{y\cdot(z+3)}=2$. Calculați x, y, z și $\sqrt{x+y+z}$.
	2. Trapezul dreptunghic $ABCD$, $\sphericalangle A=\sphericalangle D=90°$, are baza mare $AB=20$ cm și linia mijlocie MN de 14 cm, $M\in AD$, $N\in BC$. Știind că $CN=10$ cm se cer:
10p	a) Lungimea bazei mici a trapezului.
10p	b) Aria trapezului.
10p	c) Tangenta unghiului $\sphericalangle BAC$.

Răspunsuri evaluări sumative

1. MULȚIMEA NUMERELOR REALE

1.1. Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural. Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional pozitiv

I. 1 C; **2.** D; **3.** C; **4.** D; **5.** C; **6.** C; **7.** B; **8.** D; **II. 1.** a) –8; b) 4; c) 0,(1). **2.** $a = 2$, $b = 0{,}5$. **3.** 271 m.

1.3 Scoaterea factorilor de sub radical. Introducerea factorilor sub radical

I. 1. A. **2.** F. **3.** A. **4.** F. **II. 1.** D. **2.** B. **3.** A. **4.** C. **5.** A. **6.** A. **7.** D. **III.** 1 – b; 2 – a; 3 – c; 4 – e; 5 – d; 6 – f. **IV.** $B = \{1, \sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{15}, \sqrt{21}, 2\sqrt{7}, 6, \sqrt{45}\}$.

1.4 Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor, prin aproximări. Compararea și ordonarea numerelor reale. Modulul unui număr real.

I. 1. C. **2.** A. **3.** A; D. **4.** B. **5.** C. **6.** D. **7.** D. **II.** a) negativ; b) pozitiv. **III. 1.** 10. **2.** a) $\sqrt{10}$; b) 2.

1.5 Operaţii cu numere reale. Raționalizarea numitorilor de forma $a\sqrt{b}$

I. 1. B. **2.** A. **3.** C. **4. D**. **5.** A. **6.** C. **7. C**. **8.** D. **II. 1.** a) –3; b) $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$, apoi se compară pătratele numerelor. **2.** E($\sqrt{5}$) = –10, E($-\sqrt{5}$) = 10, nul.

1.6 Media aritmetică ponderată a *n* numere reale, *n* ≥ 2. Media geometrică a două numere reale pozitive.

I. 1.C; **2.** A; **3.** B; **4.** B; **5.** C; **6.** C; **7.** D; **8.** A. **II. 1.** a) $a = 1$, $b = 3$; b) $a = 1$, $b = 9$; c) 3,24. **2.** a) $x = 2\sqrt{3}$, $y = 6\sqrt{3}$; b) < .

1.7 Ecuații de forma $x^2 = a$, $a \in \mathbb{R}$.

I. 1.C; **2.** B; **3.** D; **4.** A; **5.** B; **6.** C. **II. 1.** $(x + 25)^2 = 5625$, $x = 50$. **2.** a) 27 m; b) L = 81 m, l = 27 m; c) 216 m. **3.** $x \in \mathbb{N}$ este latura posterului, $x^2 > 6 \cdot 2{,}4 : 4 = 3{,}6$ și $x < 2{,}4$. Obținem $x = 2$.

2. ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

2.2 Ecuații de forma $a \cdot x + b = 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Mulțimea soluțiilor unei ecuații. Ecuații echivalente

I. 1 D; **2.** A; **3.** D; **4.** C; **5.** A; **6.** B.

II. 1. a) 7; b) –4; c) –4; d) sunt echivalente b și c. **2.** a) $u(3a + 19) \in \{0, 5\} \Rightarrow u(a) \in \{7, 2\} \Rightarrow u(2a + 91) = 5$; b) $a = 67$.

2.3 Sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute. Rezolvarea prin metoda substituției și/sau reducerii

I. 1 C; **2.** B; **3.** C; **4.** A; **5.** A; **6.** B.

II. 1. $x = -3 \Rightarrow y = -1$; $y = -1 \Rightarrow x = -3$; $x = 0{,}6 \Rightarrow y = 1{,}7$; $y = 1{,}4 \Rightarrow x = 0{,}2$; $x = 1 + 4\sqrt{2} \Rightarrow y = 2 + 3\sqrt{2}$; **2.** $x = 3$, $y = -2$. **3.** $a = 5$, $b = 24$.

2.4 Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau a sistemelor de ecuații liniare

I. 1 B; **2.** A; **3.** D; **4.** C. **II. 1.** $\frac{x}{y}$ este fracția inițială, $x = y - 4$, $2x = y + 1$, $x = 5$, $y = 9$. **2.** $m + \frac{a}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5a}{12}$, $a + \frac{m}{10} = \frac{9m}{10} + 96$, $a = 120$, $b = 30$. **3.** $x + y = \frac{5}{6}$, $x - y = \frac{1}{6}$, $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$.

3. ELEMENTE DE ORGANIZARE A DATELOR

3.2 Dependențe funcționale

I. 1 B; **2.** A; **3.** D; **4.** C; **5.** C; **6.** A; **7.** C; 8. D. **II. 1.** vezi figura 1; **2.** 5 cm → 25 km; 20 km → 4 cm; 7,5 cm → 37,5 km; 350 km → 70 cm; 12 cm → 60 km. **3.** a) vezi figura 2; b) vezi figura 3. **4.** a) $A = B = \{1, 2, 3, 4\}$; b) $y = 5 - x$

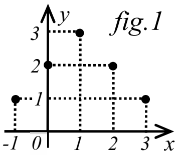


fig.1

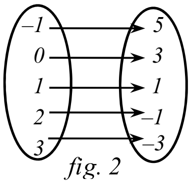


fig. 2

4. PATRULATERUL

4.2. Paralelogramul: proprietăți. Aplicații ale paralelogramului în geometria triunghiului

I. 1 C; **2.** D; **3.** A; **4.** B; **5.** C; **6.** D; **7.** B; **8.** C; **II.1.** a) $\sphericalangle ABO \equiv \sphericalangle ODC$; b) $\Delta ABC \equiv \Delta ADC$ (L.L.L.)

2. $\sphericalangle MBC + \sphericalangle MCB = 90°$. **3.** $\sphericalangle IBC \equiv \sphericalangle BCL$ $\Rightarrow IB \parallel LC$; $\sphericalangle ICB \equiv \sphericalangle CBL \Rightarrow IC \parallel BL$.
4. a) $\sphericalangle BAC = \sphericalangle C = 60°$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC = 120°$; b) $AD = 8$ cm, $\mathcal{P} = 24$ cm; c) $CE = 8$ cm, $CF = 24$ cm.

4.3 Paralelograme particulare: dreptunghi, romb, pătrat

I. 1 B; **2.** C; **3.** D; **4.** B; **5.** B; **6.** A; **7.** D; **8.** C;
II.1 a) $\sphericalangle DBC = 45°$, $\sphericalangle GBF = 45°$;
b) $CF \perp BF$, $DB \perp BF \Rightarrow BD \parallel CF$;
c) $MO \parallel BF$, $AO \parallel BF$.
2. $\sphericalangle DMA = 120° = \sphericalangle EMF$, $\sphericalangle BNC = 120° = {}= \sphericalangle ENF$, $\sphericalangle E = \sphericalangle F = 60°$, $DM = MA$, $DF = AE \Rightarrow MF = AE$. **3.** $8x + 14y = 30$, $x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 2, y = 1, h \geq 7$ (m).

4.4 Trapezul: clasificare, proprietăți. Linia mijlocie în trapez

I. 1 A; **2.** C; **3.** B; **4.** C. **II. 1.** b; **2.** c; **3.** a; **4.** d. **III. 1.** a) $\sphericalangle BCE = 30° \Rightarrow \sphericalangle BEC = 60°$; $\sphericalangle AED = \sphericalangle EBF = 60°$; b) $BF = EF$ și $BF = FC$. **2.** a) MN linie mijlocie și $NP = MN$ $\Rightarrow MP \parallel AB$, $MP = AB$; b) DN linie mijlocie în ΔAMP; $DN \parallel AM$, $DN < AM$, $\sphericalangle AMP = 90°$;
c) $BMCP$ este paralelogram.

4.5 Perimetre și arii

I. 1 C; **2.** D; **3.** D; **4.** B; **5.** C; **6.** B; **7.** A; **8.** C;
II. 1. a) $AM = 48$ cm, $AT = 24$ cm, $A = 576$ cm^2; b) 75%. **2.** $\Delta COP \equiv \Delta EOQ \Rightarrow CP \equiv QE$, $PO \equiv QO$, apoi $\mathcal{P}_{CPOF} = \mathcal{P}_{EQOD}$.
3. a) $\mathcal{A}_{ABNP} = 22$ cm^2, $\mathcal{A}_{CDPN} = 18$ cm^2.
b) $\mathcal{A}_{CMP} = \mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{AMP} - \mathcal{A}_{BMC} - \mathcal{A}_{CDP} = 14$ cm^2.

5. CERCUL

5.2 Poligoane regulate, înscrise într-un cerc

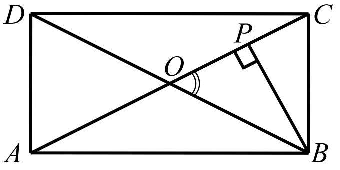
I. 1 C; **2.** A; **3.** B; **4.** D; **5.** B; **6.** D; **7.** C; **8.** B;
II. 1. b) $\mathcal{A}_{\mathcal{C}} = 40\pi$ cm^2; c) $\mathcal{A}_a = \dfrac{295\pi}{8}$ cm^2;
d) $l = \dfrac{29}{2}\pi$ cm.
2. $\Delta AMQ \equiv \Delta BNM \equiv \Delta CPN \equiv \Delta DQP \Rightarrow$ $MN \equiv NP \equiv PQ \equiv QM$; $\sphericalangle NMQ = 15° + 60° + 15° = 90°$. **3.** Fiecare unghi are măsura de 120°; b) $AB < BC$; nu este poligon regulat.

6. ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR

I. 1 b; **2.** e; **3.** c; **4.** d. **II. 1.** A; **2.** D; **3.** B; **4.** C.
III. 1. a) $BD = 4$ cm; b) $CI = CA = 6$ cm;
c) $AB = 15$ cm.
2. a) $\Delta ADE \sim \Delta PBE$ (U.U.); b) $\dfrac{EO}{BD} = \dfrac{1}{6}$;
c) $\dfrac{AE}{EP} = \dfrac{AF}{FC} = 2$.

7. RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC

I. 1. C; **2.**A; **3.** D; **4.** B; **5.** D; **6.** A; **7.** C; **8.** B.
II. a) vezi desenul de mai jos;



b) $AC = 2OA = 2OB = 20$; $AP - CP = 12$ și $AP + CP = 20$; $AP = 16$, $CP = 4$; din teorema înălțimii în triunghiul $ABC \Rightarrow BP = 8$;
c) $\text{tg}\sphericalangle POB = \dfrac{PB}{PO} = \dfrac{4}{3}$.
III. a) $0{,}45 \cdot 11 \cdot 1{,}2 = 5{,}94$ km;
b) $EM = 2 \cdot 0{,}45 + \dfrac{0{,}45 \cdot \sqrt{3}}{2} < 1{,}3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 0{,}45 \cdot \sqrt{3} < 0{,}8$ (A)

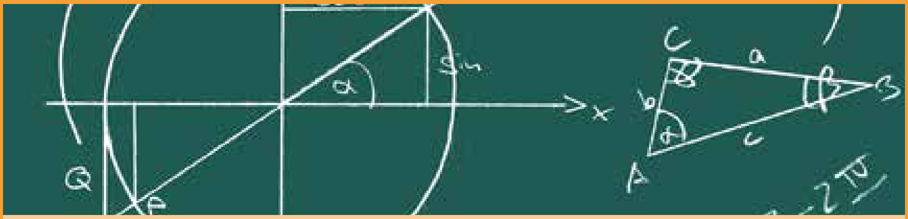
Test final 1

I. 1 A; **2.** F; **3.** A; **4.** F; **5.** A; **6.** F. **II. 1.** 1e, 2a, 3b, 4c. **III. 1.** a) $a = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; b) $a < b$.
2. a) $10\sqrt{13}$; b) 6.

Test final 2

I. 1 B; **2.** C; **3.** A; **4.** C; **5.** B; **6.** B; **7.** B; **8.** B.
II. 1. $x = 7, y = 1, z = 1$; **2.** a) $CD = 8$ cm;
b) $\mathcal{A}_{ABCD} = 224$ cm^2; c) 2.

Programa școlară poate fi accesată la adresa:
http://programe.ise.ro.



*Manualul este prezentat
în variantă tipărită
și în variantă digitală.
Varianta digitală are un
conținut similar celei tipărite.
În plus, cuprinde o serie de
activități multimedia interactive
de învățare (exerciții interactive,
jocuri educaționale, animații,
filme, simulări).*

Tradiție din 1989
www.litera.ro
ISBN 978-606-33-3992-9